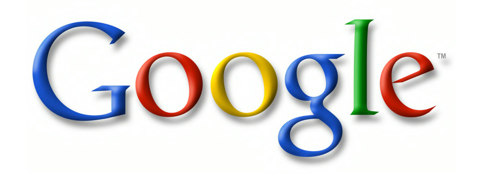
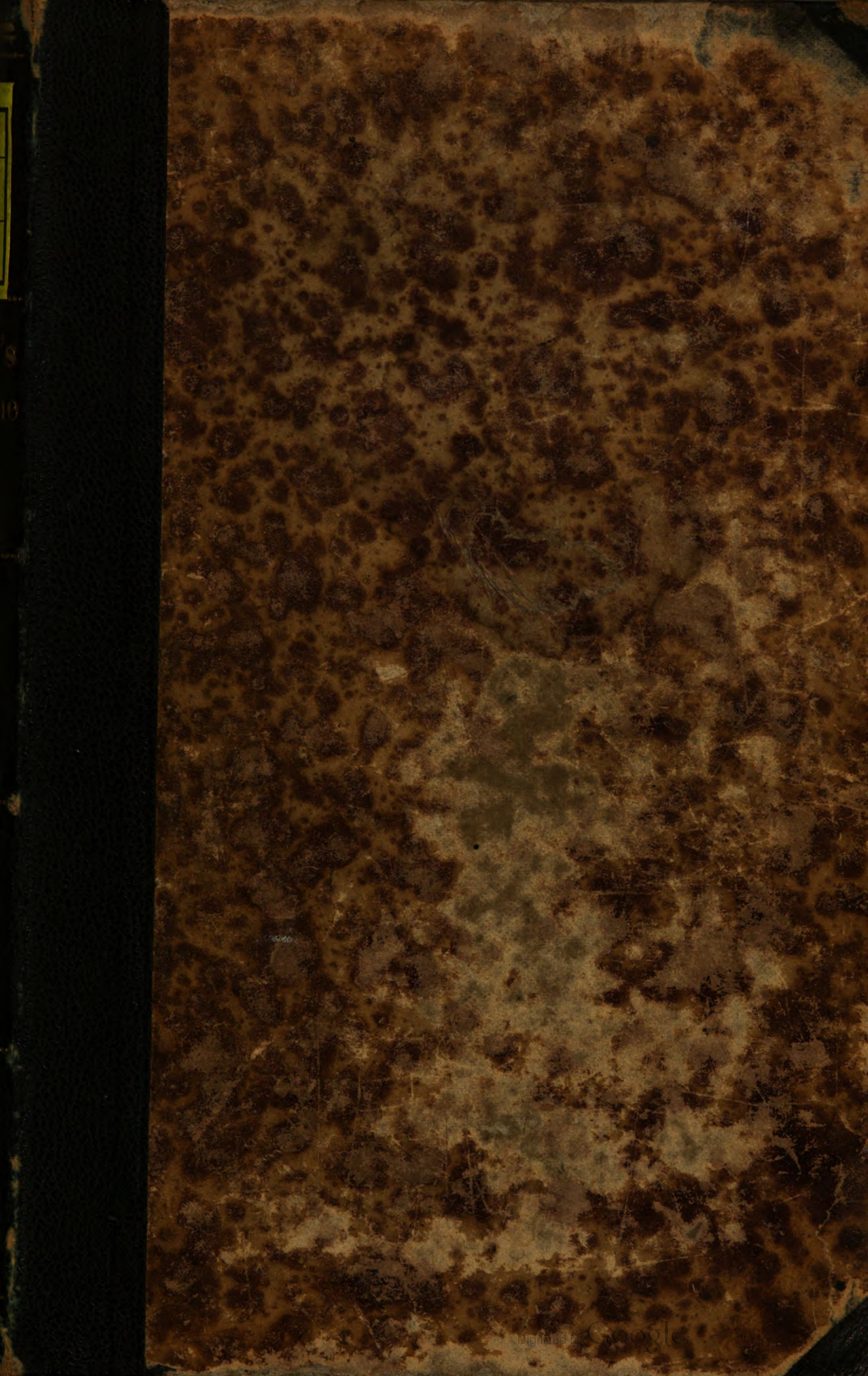




Thomson


Digitized by Google

HANDBUCH

DER

THEORETISCHEN PHYSIK.

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

HANDBUCH

DER

THEORETISCHEN PHYSIK

VON

W. THOMSON UND P. G. TAIT.

AUTORISIRTE DEUTSCHE ÜBERSETZUNG

VON

DR. H. HELMHOLTZ UND G. WERTHEIM.

ERSTER BAND.

ZWEITER THEIL.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1874.





VORREDE

ZUM

ZWEITEN THEILE DES ERSTEN BANDES.

Kritisches.

Seitdem die Uebersetzung des ersten Theils dieses Bandes veröffentlicht wurde, ist sowohl die ganze wissenschaftliche Richtung desselben, als insbesondere auch eine Reihe einzelner Stellen daraus von Herrn J. C. F. Zöllner in seinem Buche „über die Natur der Kometen“ einer mehr als lebhaften Kritik unterzogen worden. Auslassungen gegen die persönlichen Eigenschaften der englischen Autoren oder meiner selbst zu beantworten, halte ich nicht für nöthig. Auf eine Kritik wissenschaftlicher Sätze und Principien zu erwiedern, habe ich der Regel nach nur dann für nöthig gehalten, wenn neue Thatsachen beizubringen oder Missverständnisse aufzuklären waren, in der Erwartung, dass, wenn alle Data gegeben sind, die wissenschaftlichen Fachgenossen schliesslich sich ihr Urtheil zu bilden wissen auch ohne die weitläufigen Auseinandersetzungen oder sophistischen Künste der streitenden Gegner. Wäre das vorliegende Handbuch nur für reif ausgebildete Sachverständige bestimmt, so hätte der Zöllner'sche Angriff unbeantwortet bleiben können. Es ist aber auch wesentlich für Lernende berechnet, und da jüngere Leser durch die überaus grosse Zuversichtlichkeit und den Ton sittlicher Entrüstung, in welchem

unser Kritiker seine Meinungen vorzutragen sich berechtigt glaubt, vielleicht irre gemacht werden könnten, halte ich es für nützlich, die gegen die beiden englischen Autoren gerichteten sachlichen Einwendungen so weit zu beantworten, als nöthig ist, damit der Leser sich durch eigene Ueberlegung zurecht zu finden wisse.

Unter den Naturforschern, welche ihr Streben vorzugsweise darauf gerichtet haben, die Naturwissenschaft von allen metaphysischen Erschleichungen und von allen willkürlichen Hypothesen zu reinigen, sie im Gegentheil immer mehr zum reinen und treuen Ausdruck der Gesetze der Thatsachen zu machen, nimmt Sir W. Thomson eine der ersten Stellen ein, und er hat gerade dieses Ziel vom Anfange seiner wissenschaftlichen Laufbahn an in bewusster Weise verfolgt. Eben dies erscheint mir als ein Hauptverdienst des vorliegenden Buches, während es in Herrn Zöllner's Augen seinen fundamentalen Mangel bildet. Letzterer möchte statt der „inductiven" Methode der Naturforscher eine überwiegend „deductive" eingeführt sehen. Wir alle haben bisher das inductive Verfahren gebraucht, um neue Gesetze, beziehlich Hypothesen, zu finden, das deductive, um deren Consequenzen zum Zwecke ihrer Verificirung zu entwickeln. Eine deutliche Auseinandersetzung, wodurch sich sein neues Verfahren von dem allgemein eingehaltenen unterscheiden solle, finde ich in Herrn Zöllner's Buche nicht. Dem von ihm in Aussicht genommenen letzten Ziele nach läuft es auf Schopenhauer'sche Metaphysik hinaus. Die Gestirne sollen sich einander lieben und hassen, Lust und Unlust empfinden und sich so zu bewegen streben, wie es diesen Empfindungen entspricht. Ja in verschwommener Nachahmung des Gesetzes der kleinsten Wirkung wird (S. 326, 327) der Schopenhauer'sche Pessimismus, welcher diese Welt zwar für die beste unter den möglichen Welten, aber für schlechter als gar keine erklärt, zu einem angeblich allgemeingültigen Principe von der kleinsten Summe der Unlust formulirt, und dieses als oberstes Gesetz der Welt, der lebenden wie der leblosen, proclamirt.

Dass nun ein Mann, dessen Geist auf solchen Wegen wandelt, in der Methode des Thomson-Tait'schen Buches das gerade Gegentheil des richtigen Weges, oder dessen, was er selbst dafür hält, erblickt, ist natürlich; dass er den Grund des

Widerspruchs in allen möglichen persönlichen Schwächen der Gegner, nicht aber da sucht, wo er wirklich steckt, entspricht ganz der intoleranten Weise, in der Anhänger von metaphysischen Glaubensartikeln ihre Gegner zu behandeln pflegen, um sich und der Welt die Schwäche ihres eigenen Standpunktes zu verhüllen. Herr Zöllner ist überzeugt, „dass es der Mehrzahl unter den heutigen Vertretern der exacten Wissenschaften an einer klar bewussten Kenntniss der ersten Principien der Erkenntnisstheorie gebreche.“ (S. VIII.) Dies sucht er durch Nachweisung angeblicher grober Denkfehler bei mehreren von ihnen zu erhärten.

Dazu müssen zunächst die Herren Thomson und Tait herhalten. Diese haben ihrer Ueberzeugung betreffs des richtigen Gebrauchs der naturwissenschaftlichen Hypothesen in den Paragraphen 381 bis 385 des vorliegenden Buches Ausdruck gegeben. Sie tadeln in Paragraph 385 Hypothesen, die sich zu weit von den beobachtbaren Thatsachen entfernen, und wählen als Beispiele für den nachtheiligen Einfluss derselben natürlich nur solche, welche durch ausgedehnte Verbreitung und die Autorität ihrer Urheber wirklich einflussreich geworden sind. In dieser Beziehung stellen sie das von unserem Landsmanne W. Weber aufgestellte Gesetz der elektrischen Fernwirkung in gleiche Linie mit der von J. Newton physikalisch durchgearbeiteten Emissionstheorie des Lichtes. Diese Nebeneinanderstellung zeigt am besten, dass die Englischen Autoren Nichts beabsichtigten, was ein gesund gebliebenes deutsches Nationalgefühl verletzen müsste. Wir sind, denke ich, in Deutschland noch nicht dahin gekommen und werden hoffentlich nie dahin kommen, dass Hypothesen, wenn sie auch von einem noch so hochverdienten Manne aufgestellt worden sind, nicht kritisirt werden dürften. Sollte es aber wirklich jemals dahin kommen, dann würden Herr Zöllner und seine metaphysischen Freunde in der That das Recht haben, über den Untergang der deutschen Naturwissenschaft zu klagen, beziehlich zu triumphiren. Eine Hypothese aufgestellt zu haben, welche bei weiterer Entwicklung der Wissenschaft sich als unzulässig erweist, ist für Niemanden ein Tadel, ebensowenig als es für Jemanden, der in gänzlich unbekannter Gegend sich seinen Weg suchen muss, ein Vorwurf ist, trotz aller Aufmerksamkeit und Ueberlegung, die er verwendet hat, einmal fehl-

gegangen zu sein. Auch ist weiter klar, dass derjenige, der eine Hypothese, welche die Geister einer grossen Menge von wissenschaftlichen Männern gefangen genommen hat, für falsch hält, demnächst urtheilen muss, dass dieselbe zeitweilig schädlich und hemmend für die Entwickelung der Wissenschaft sei, und wird berechtigt sein dies auszusprechen, wenn ihm die Aufgabe zufällt, nach seiner besten Ueberzeugung den Lernenden über den Weg, den er einzuschlagen habe, zu berathen.

Unter den Gründen, welche Herr W. Thomson für die Unzulässigkeit der Weber'schen Hypothese anführt, ist auch der, dass sie dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft widerspreche. Dieselbe Behauptung war auch ich genöthigt, etwas später in einer im Jahre 1870 veröffentlichten Arbeit*) aufzustellen. Herr Zöllner hat nun auf die Autorität von Herrn C. Neumann hin angenommen, diese Behauptung sei falsch. Ihm erscheint im Gegentheil das Weber'sche Gesetz ebenfalls ein Universalgesetz aller Kräfte der Natur zu sein (wie sich diese verschiedenen Universalgesetze mit einander vertragen, bleibt unerörtert), und er verwendet 20 Seiten seiner Einleitung dazu, um seiner Entrüstung über die intellectuelle und moralische Stumpfheit derjenigen, die es antasten, Luft zu machen. Herr Zöllner wird seitdem wohl begriffen haben, dass es mindestens unvorsichtig ist, nur auf die Autorität eines der Gegner gestützt einem wissenschaftlichen Streite mit Schmähreden gegen die andere Partei assistiren zu wollen, abgesehen davon, dass man auf solche Weise zur Entscheidung des Streites gar Nichts, zur Verbitterung desselben vielleicht sehr viel beiträgt. Herr C. Neumann war selbst Partei in dieser Sache; die Theorie der elektrodynamischen Wirkungen, welche er selbst damals festhielt, wurde von meinen Einwänden mitgetroffen. Er hat seitdem diese Theorie fallen lassen. Er selbst, wie Herr W. Weber, haben des letztern ursprüngliche Theorie halten zu können geglaubt, wenn sie die Mitwirkung molecularer Kräfte für sehr genäherte elektrische Massen hinzunähmen. Ich habe dann in meiner zweiten Abhandlung zur Theorie der Elektrodynamik**) nachgewiesen, dass die Annahme

*) Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper. Borchardt, Journal für Mathematik. Bd. 72, 75.

**) Genanntes Journal Bd. 75.

von Molecularkräften den Leck in der Weber'schen Theorie nicht zustopft. Inzwischen hat Herr C. Neumann selbst, noch ehe er von meinem zweiten Aufsatze Kenntniss erhielt, die Begründung der Elektrodynamik auf das Weber'sche Gesetz aufgegeben, und ein neues Gesetz dafür zu construiren gesucht.

Hierbei möchte ich, gegenüber der Betonung der deductiven Methode durch unsere Gegner, an dieses Beispiel noch folgende Bemerkung knüpfen. Nach der bisherigen Ansicht der besseren Naturforscher war die deductive Methode nicht bloss berechtigt, sondern sogar gefordert, wenn es sich darum handelte, die Zulässigkeit einer Hypothese zu prüfen. Jede berechtigte Hypothese ist der Versuch, ein neues allgemeineres Gesetz aufzustellen, welches mehr Thatsachen unter sich begreift, als bisher beobachtet sind. Die Prüfung derselben besteht nun darin, dass wir alle Folgerungen, welche aus ihr herfliessen, uns zu entwickeln suchen, namentlich diejenigen, welche mit beobachtbaren Thatsachen zu vergleichen sind. Also wäre es meines Erachtens die erste Pflicht derjenigen gewesen, welche die Weber'sche Hypothese vertheidigen wollten, unter Anderem nachzusehen, ob diese Hypothese die allergemeinste Thatsache erklären kann, die nämlich, dass die Elektricität, wenn keine elektromotorischen Kräfte auf sie einwirken, in allen elektrischen Leitern in Ruhe bleibt und also fähig ist, in stabilem Gleichgewichte zu beharren. Wenn die Weber'sche Hypothese das Gegentheil ergiebt, wie ich nachzuweisen gesucht habe, so war zunächst nach einer solchen Modification derselben zu suchen, welche stabiles Gleichgewicht in den grössten wie in den kleinsten Leitern möglich machte. Nach meiner Ansicht wäre dies ein richtiges und durch die deductive Methode gefordertes Verfahren gewesen, nicht aber Halt zu machen, wenn man merkt, dass man auf unbequeme Folgerungen kommt, und sich damit zu entschuldigen, dass die richtigen Differentialgleichungen für die Bewegung der Elektricität aus dem Weber'schen Gesetz eben noch nicht gefunden seien. Und wenn ein Anderer sich dieser Mühe unterzieht, so sollte Jemand, der sich für einen Vertreter der deductiven Methode *κατ' ἐξοχὴν* hält, ihm Beifall spenden, statt ihn der Impietät zu bezichtigen, selbst wenn die Ergebnisse der Untersuchung sich als unbequem für den Icarusflug der Speculation herausstellen sollten.

Da Herr Zöllner sich nicht für einen Mathematiker ausgibt, im Gegentheil uns auf Seite 426 und 427 seines Buches belehrt, dass zu häufige Anwendung der Mathematik die bewusste Verstandesthätigkeit verkümmern mache und ein bequemes Mittel zur Befriedigung der Eitelkeit sei, ausserdem an vielen Stellen, immer wiederholt, seine Geringschätzung denen ausspricht, die seine Speculationen durch Nachweis von Fehlern im Differentiiren und Integriren zu widerlegen glaubten: so dürfen wir betreffs des Weber'schen Gesetzes nicht zu strenge mit ihm rechten. Freilich sollte billiger Weise Jemand, der die Freiheit für sich in Anspruch nimmt, unsicher in der Mathematik sein zu dürfen, nicht über Dinge absprechen wollen, die nur durch mathematische Untersuchungen entschieden werden können. Seine Kometentheorie, die man doch wohl als ein nach seiner Meinung mustergültiges Beispiel davon ansehen soll, wie die rechte Methode zu verfahren habe, gibt überdies andere viel populärere Beispiele derselben eigenthümlichen Art von Anwendung oder Nichtanwendung der Deduction, Beispiele, deren Besprechung für eine andere passendere Gelegenheit vorbehalten werden mag.

Es bleibt noch sein Ausfall gegen die Autoren dieses Buches wegen der Emissionstheorie des Lichtes zu besprechen. Sie sagen, eine solche Theorie wäre höchstens dann zu rechtfertigen gewesen, wenn ein Lichtkörperchen wirklich gesehen und untersucht worden wäre. Herr Zöllner findet in dieser Forderung „nicht etwa nur eine physikalische, sondern sogar eine leicht „zu entdeckende logische Unmöglichkeit. In der That, wenn „in uns erst durch die Berührung der Lichtkörperchen mit unseren „Nerven die Empfindung des Lichtes erzeugt wird, — so ist es „offenbar unmöglich, ein solches Lichtkörperchen, bevor es „unseren Sehnerven berührt oder afficirt hat, überhaupt durch „das Auge wahrzunehmen.“ Darauf folgen dann Declamationen über grobe Denkfehler, absoluten Nonsens u. s. w. Letzterer ist hier wirklich vorhanden; aber er steckt nicht in dem, was die englischen Autoren gesagt, sondern in dem, was ihr Angreifer in ihre Worte hineininterpretirt hat. Muss ich einem Manne, der so viel sicherer in den Elementen der Erkenntnisstheorie zu sein glaubt, als seine Gegner, noch erst auseinandersetzen, dass ein Object sehen, im Sinne der Emanationstheorie, heisst

die Lichtkörperchen in das Auge aufnehmen und empfinden, die von jenem Objecte abgeprallt sind? Nun ist aber nichts von einer logischen Unmöglichkeit oder Widerspruch gegen die Grundlagen der Theorie in der Annahme zu finden, dass ein ruhendes Lichtkörperchen — sie ruhen ja, sobald sie von dunkeln Körpern absorbirt sind — andere gegenstossende zurückwerfe, für die es dadurch Radiationscentrum wird und demnächst als Ausstrahlungspunkt dieser Radiation gesehen werde. Ob und wie ein solcher Vorgang zur Beobachtung zu bringen ist, wäre im Sinne der englischen Autoren natürlich Sache desjenigen, der die Existenz der Lichtkörperchen direct beweisen wollte. Man mag über die Strenge und Zweckmässigkeit dieser Anforderung denken, was man will, ein logischer Widerspruch liegt nicht darin, und gerade auf einen solchen käme es an, um das zu beweisen, was Herr Zöllner beweisen möchte.

Einen weiteren Einwurf von ähnlichem wissenschaftlichen Werthe will ich noch erwähnen, weil er sich auf Sir W. Thomson bezieht, wenn auch nicht auf eine Stelle dieses Buches. Es betrifft die Frage über die Möglichkeit, dass organische Keime in den Meteorsteinen vorkommen und den kühl gewordenen Weltkörpern zugeführt werden. Herr W. Thomson hatte diese Ansicht in seiner Eröffnungsrede der britischen Naturforscherversammlung zu Edinburg im Herbst 1871 als „nicht unwissenschaftlich“ bezeichnet. Auch hier muss ich mich, wenn darin ein Irrthum liegt, als Mitirrender melden. Ich hatte dieselbe Ansicht als eine mögliche Erklärungsweise der Uebertragung von Organismen durch die Welträume sogar noch etwas früher als Herr W. Thomson in einem im Frühling desselben Jahres zu Heidelberg und Cöln gehaltenen, aber noch nicht veröffentlichten Vortrage erwähnt. Ich kann nicht dagegen rechten, wenn Jemand diese Hypothese für unwahrscheinlich im höchsten oder allerhöchsten Grade halten will. Aber es erscheint mir ein vollkommen richtiges wissenschaftliches Verfahren zu sein, wenn alle unsere Bemühungen scheitern, Organismen aus lebloser Substanz sich erzeugen zu lassen, dass wir fragen, ob überhaupt das Leben je entstanden, ob es nicht eben so alt, wie die Materie sei, und ob nicht seine Keime von einem Weltkörper zum anderen herübergetragen sich überall entwickelt hätten, wo sie günstigen Boden gefunden.

Herrn Zöllner's angebliche physikalische Gegengründe sind von sehr geringem Gewicht. Er erinnert an die Erhitzung der Meteorsteine und fügt hinzu (S. XXVI). „Wenn daher „jener mit Organismen bedeckte Meteorstein auch beim Zer- „trümmern seines Mutterkörpers mit heiler Haut davon gekommen „wäre und nicht an der allgemeinen Temperaturerhöhung Theil „genommen hätte, so musste er doch nothwendig erst die Erd- „atmosphäre passirt haben, ehe er sich seiner Organismen zur „Bevölkerung der Erde entledigen konnte."

Nun wissen wir erstens, aus häufig wiederholten Beobachtungen, dass die grösseren Meteorsteine bei ihrem Fall durch die Atmosphäre sich nur in ihrer äussersten Schicht erhitzen, im Innern aber kalt oder sogar sehr kalt bleiben. Alle Keime also, die etwa in Spalten derselben steckten, wären vor Verbrennung in der Erdatmosphäre geschützt. Aber auch die oberflächlich gelagerten würden doch wohl, wenn sie in die allerhöchsten und dünnsten Schichten der Erdatmosphäre gerathen, längst durch den gewaltigen Luftzug herabgeblasen sein, ehe der Stein in dichtere Theile der Gasmasse gelangt, wo die Compression gross genug wird, um merkliche Wärme zu erzeugen. Und was andererseits den Zusammenstoss zweier Weltkörper betrifft, wie ihn Thomson annimmt, so werden die ersten Folgen davon gewaltige mechanische Bewegungen sein, und erst in dem Maasse, als diese durch Reibung vernichtet werden, entsteht Wärme. Wir wissen nicht, ob das Stunden, oder Tage, oder Wochen dauern würde. Die Bruchstücke, welche im ersten Moment mit planetarischer Geschwindigkeit fortgeschleudert sind, können also ohne alle Wärmeentwicklung davon kommen. Ich halte es nicht einmal für unmöglich, dass ein durch hohe Schichten der Atmosphäre eines Weltkörpers fliegender Stein, oder Steinschwarm einen Ballen Luft mit sich hinausschleudert und fortnimmt, der unverbrannte Keime enthält.

Wie gesagt, möchte ich alle diese Möglichkeiten noch nicht für Wahrscheinlichkeiten ausgeben. Es sind nur Fragen, deren Existenz und Tragweite wir im Auge behalten müssen, damit sie vorkommenden Falls durch wirkliche Beobachtungen oder Schlussfolgerungen aus solchen gelöst werden können.

Herr Zöllner versteigt sich dann zu folgenden zwei Sätzen (S. XXVIII und XXIX):

„Dass die Naturforscher heute noch einen so ungemeinen „Werth auf den inductiven Beweis der generatio aequivoca „legen, ist das deutlichste Zeichen, wie wenig sie sich mit den „ersten Principien der Erkenntnisstheorie vertraut gemacht „haben.“

und ferner:

„Ebenso drückt die Hypothese von der generatio aequi-„voca, — — nichts anderes als die Bedingung für die Begreiflich-„keit der Natur nach dem Causalitätsgesetze aus.“

Hier haben wir den ächten Metaphysiker. Einer angeblichen Denknothwendigkeit gegenüber blickt er hochmüthig auf die, welche sich um Erforschung der Thatsachen bemühen, herab. Ist es schon vergessen, wie viel Unheil dieses Verfahren in den früheren Entwicklungsperioden der Naturwissenschaften angerichtet hat? Und was ist die logische Basis dieses erhabenen Standpunktes? Die richtige Alternative ist offenbar:

„Organisches Leben hat entweder zu irgend einer Zeit angefangen zu bestehen, oder es besteht von Ewigkeit.“

Herr Zöllner lässt den zweiten Theil dieser Disjunction einfach weg, oder glaubt ihn durch einige kurz zuvor angeführte flüchtige physikalische Betrachtungen beseitigt zu haben, die durchaus nicht entscheidend sind. Demgemäss ist seine Conclusio, welche die erste Hälfte der oben aufgestellten Disjunction affirmirt, entweder gar nicht bewiesen, oder nur mittels eines Minor, der auf physikalische Gründe (und zwar ungenügende) gestützt ist. Also ist die Conclusio keineswegs, wie Herr Zöllner glaubt, ein Satz von logischer Nothwendigkeit, sondern höchstens eine unsichere Folgerung aus physikalischen Betrachtungen.

Dies ist, was Herr Zöllner auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Fragen gegen die Autoren dieses Handbuchs einzuwenden hat*). Anklagen, von genau demselben Gewichte, gegen andere Naturforscher mit derselben Zuversicht auf die eigene Unfehlbarkeit und mit demselben schnellfertigen Absprechen über die intellectuellen und moralischen Eigenschaften

*) Auf dem Gebiete der persönlichen Fragen muss ich bezüglich der die Principien der Spectralanalyse betreffenden Prioritätsreclamation, mit welcher Herr W. Thomson für Herrn Stokes gegen Herrn Kirchhoff aufgetreten ist, mich auf die Seite des Letztgenannten stellen in voller Anerkennung der Gründe, die er selbst geltend gemacht hat.



des Gegners erhoben, finden sich in Herrn Zöllner's Buche noch in grosser Anzahl vor. Einen anderen Theil dieser Beispiele zu besprechen wird sich noch eine andere Gelegenheit finden. Wenn ich eine Nutzanwendung, die uns hier interessirt, vorausnehmen darf, so ist es die, dass die strenge Disciplin der inductiven Methode, das treue Festhalten an den Thatsachen, welches die Naturwissenschaften gross gemacht hat, für den aufmerksamen und urtheilsfähigen Leser durch keine theoretischen Gründe wirksamer und beredter vertheidigt werden kann, als durch das praktische Beispiel, welches das Zöllner'sche Buch für die Consequenzen der entgegengesetzten, angeblich deductiven, speculirenden Methode gibt, um so mehr als Herr Zöllner unzweifelhaft ein talentvoller und kenntnissreicher Mann ist, der einst, ehe er in die Metaphysik verfiel, hoffnungsreiche Arbeiten lieferte, und noch jetzt, wo er auf dem Boden der Wirklichkeit festgehalten wird, z. B. bei der Construction optischer Instrumente und der Ermittelung optischer Methoden, Scharfsinn und Erfindungsgabe zeigt.

Berlin, December 1873.

H. Helmholtz.

Weiteres Verzeichniss neuer oder in deutschen Büchern weniger gebrauchter Benennungen mit Angabe des Ortes ihrer Bestimmung.

Fortsetzung von Seite XIII des ersten Theils.

Coefficienten der statischen und kinetischen Reibung § 451.

Ruhewinkel (Angle of Repose) eines zum Gleiten neigenden Körpers § 456.

Kegelecke (nach F. E. Neumann) oder der körperliche Winkel eines Kegels § 465.

Kraftlinie (Line of Force) § 489.

Correspondirende Punkte auf confocalen Ellipsoiden § 519.

Centrobarische Körper und ihr Attractionscentrum § 526.

Deflexion, Inclination, Krümmung einer elastischen Platte § 627.

Elastische Reaction und Zwang (stress) § 658.

Isotrop und äolotrop § 676.

Volumenelasticität und Gestaltselasticität, Starrheit (Rigidity) § 680.

Longitudinale Starrheit § 686.

Topographische Conturen (Coupes topographiques) § 708.

Hauptaxen und Hauptwiderstände der Biegung in einem Stabe § 715.

Ebene Deformation eines elastischen Körpers § 738.

Zähigkeit, Plasticität (viscosity, plasticity) § 741.

Metacentrum § 768.

INHALTSVERZEICHNISS

DES

ZWEITEN THEILS.

Fünftes Capitel.

Einleitung.

Sechstes Capitel.

Statik eines materiellen Punktes. — Attraction.

Siebentes Capitel.

Statik fester und flüssiger Körper.



ZWEITER THEIL.

ABSTRACTE DYNAMIK.

Fünftes Capitel.

Einleitung.

438. Approximative Behandlung physikalischer Fragen. — So lange wir nicht die Natur der Materie und die Kräfte, welche ihre Bewegungen hervorbringen, vollständig kennen, wird es durchaus unmöglich sein, die exacten Bedingungen irgend einer physikalischen Frage einer mathematischen Behandlung zu unterwerfen. Doch kann man fast jedes Problem der gewöhnlichen Theile der Physik leicht approximativ durch Einführung einer Art von abstracter oder vielmehr gegen eine Grenze hin verschobener Annahmen lösen, die uns in den Stand setzt, die Frage in ihrer modificirten Form ohne Mühe zu beantworten, während wir zugleich versichert sind, dass die (so modificirten) Umstände auf das Resultat nur von unwesentlichem Einflusse sind.

439. Nehmen wir z. B. den einfachen Fall eines Hebebaumes, den man anwendet, um eine schwere Masse in Bewegung zu setzen. Wollte man die Wirkung vollständig berechnen, so hätte man gleichzeitig die Bewegungen jedes Theils des Baumes, der Unterlage und der gehobenen Masse zu behandeln, und bei der fast gänzlichen Unkenntniss, in der wir uns über die Natur der Materie und der Molekularkräfte befinden, ist es offenbar unmöglich, das Problem in dieser Weise in Angriff zu nehmen.

Nun lehrt die Beobachtung, dass die Theile des Baumes, der Unterlage und der Masse, eines jeden für sich, während des ganzen Processes nahezu dieselben relativen Lagen gegen einander beibehalten, und diese Beobachtung bringt uns auf die Idee, statt der obigen unmöglichen Frage eine andere, allerdings ganz davon verschiedene Frage zu behandeln, die jedoch, während sie unendlich einfacher ist, offenbar zu nahezu denselben Resultaten wie die erstere führt.

440. Zu der neuen Form der Aufgabe führt uns unmittelbar das experimentelle Ergebniss des Versuchs. Stellen wir uns die in Frage kommenden Massen als vollkommen starr vor (d. h. als durchaus unfähig, ihre Form oder ihre Dimensionen zu ändern), so kann die unendliche Reihe der wirklich wirkenden Kräfte von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben; die mathematische Untersuchung hat es dann mit einer endlichen (und im Allgemeinen kleinen), statt mit einer praktisch unendlich grossen Anzahl von Kräften zu thun. Dass wir berechtigt sind, statt der Aufgabe, von der wir ausgingen, die neue einfachere zu behandeln, lässt sich in folgender Weise zeigen:

441. Die Wirkungen der zwischen den Molekülen thätigen Kräfte würden sich nur in Aenderungen der molekularen Form oder des Volumens der in Rede stehenden Massen zeigen. Da diese aber (praktisch) fast unverändert bleiben, so können die Kräfte, welche Aenderungen hervorbringen oder hervorzubringen suchen, von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Wir können folglich die Wirkung der Vorrichtung unter der Voraussetzung untersuchen, dass dieselbe aus getrennten Theilen bestehe, deren Form und Dimensionen unveränderlich sind.

442. Weitere Annäherungen. — Wenn wir ein wenig näher auf die Sache eingehen, so finden wir, dass sich der Hebel biegt, dass einige seiner Theile ausgedehnt, andere zusammengezogen werden. Dies würde uns in eine sehr ernsthafte und schwierige Untersuchung führen, wenn wir alle Umstände zu berücksichtigen hätten. Wir finden aber (auf dem Wege der Erfahrung), dass wir eine hinlänglich genaue Lösung dieser noch viel bedenklicheren Theile der Frage erhalten, wenn wir voraussetzen (was in der Praxis nie realisirt werden kann), die Masse sei homogen, und die durch eine Ausdehnung, eine Compression oder eine Verdrehung hervorgerufenen Kräfte seien beziehungsweise diesen Deformationen an Grösse proportional, an Richtung entgegengesetzt. Mittels dieser weiteren Annahme kann man die Vibrationen von

Stäben, Platten, u. s. w., sowie den statischen Effect von elastischen Federn, u. s. w. in sehr enger Annäherung behandeln.

443. Wir können den Process noch weiter verfolgen. Compression entwickelt im Allgemeinen Wärme, Ausdehnung, Kälte. Diese ändern merklich die Elasticität eines Körpers. Durch Einführung solcher Betrachtungen erreichen wir ohne grosse Schwierigkeit das, was man eine dritte Approximation an die Lösung des betrachteten physikalischen Problems nennen kann.

444. Wir könnten weiter die Leitung der so erzeugten Wärme durch den festen Körper und die Modificationen der Elasticität, von denen sie begleitet ist, einführen, u. s. w. Darauf könnten wir die Erzeugung der thermo-elektrischen Ströme betrachten, welche (wie wir sehen werden) immer durch ungleiche Erwärmung einer Masse entwickelt werden, wenn dieselbe nicht vollkommen homogen ist. Doch wird das Gesagte genügen zu zeigen, dass wir erstens völlig unfähig sind, irgend eine physikalische Frage mittels der einzig vollkommenen Methode, nämlich durch Betrachtung der Umstände, welche auf die Bewegung jedes einzelnen Theils jedes in Rede stehenden Körpers von Einfluss sind, exact und vollständig zu lösen; und dass zweitens praktische Fragen in praktisch ausreichender Weise dadurch in Angriff genommen werden können, dass man ihre Allgemeinheit beschränkt; die Beschränkungen, die man einführt, sind aus der Erfahrung hergeleitet und sind daher als die von der Natur selbst gegebene (mehr oder weniger genaue) Lösung der unendlich vielen Gleichungen zu betrachten, die uns sonst in Verlegenheit gesetzt haben würden.

445. Um einen anderen Fall zu nehmen, so ist es bei der Betrachtung der Fortpflanzung der Wellen auf der Oberfläche einer Flüssigkeit nicht nur der mathematischen Schwierigkeiten wegen, sondern auch weil wir nicht wissen, was die Materie ist und welche Kräfte ihre Theile auf einander ausüben, ganz unmöglich, die Gleichungen zu bilden, die uns die Bewegung jedes einzelnen Theils liefern würden. Unsere erste und für die meisten praktischen Zwecke genügende Annäherung an die Lösung wird aus der Betrachtung der Bewegung einer homogenen, unzusammendrückbaren und vollkommen plastischen Masse hergeleitet; eine hypothetische Substanz, die natürlich in der Natur nirgends existirt.

446. Betrachten wir die Sache etwas näher, so finden wir, dass die wirkliche Bewegung sich von der durch die analytische Lösung des beschränkten Problems gegebenen beträchtlich unterscheidet; wir führen deshalb weitere Betrachtungen ein, wie die

Zusammendrückbarkeit, die Reibung im Innern der Flüssigkeiten, die durch die Reibung erzeugte Wärme, die Ausdehnung, welche diese Erwärmung hervorbringt, u. s. w. Durch successive Correctionen dieser Art kommen wir zuletzt zu einem mathematischen Resultat, welches (jedenfalls beim jetzigen Stande der experimentellen Naturwissenschaft) innerhalb der Grenzen der Fehler, denen experimentelle Untersuchungen ausgesetzt sind, mit der Beobachtung übereinstimmt.

447. Es würde leicht sein, noch viele andere Beispiele zu geben, welche unsere obige Vorausbemerkung bestätigen; doch scheint dies kaum nöthig zu sein. Wir bemerken daher ein für allemal, dass es keine Frage in der Physik giebt, die sich vollständig und exact mittels mathematischer Schlussfolgerungen behandeln liesse (wobei, was man sorgfältig beachten muss, nicht nothwendig mathematische Symbole angewendet zu werden brauchen), dass es jedoch verschiedene Grade von Annäherung giebt, zu denen man bei der Lösung jeder besonderen Frage gelangt, indem man Annahmen macht, die mit der Beobachtung mehr oder weniger nahe zusammenfallen.

448. **Gegenstand des vorliegenden Theils des Werkes.** — Der Gegenstand des vorliegenden Theils dieses Bandes ist die Behandlung der ersten und der zweiten dieser Annäherungen. Wir werden darin alle festen Körper entweder als starr, d. h. als in Form und Volumen unveränderlich, oder als elastisch ansehen; im letzteren Falle werden wir aber voraussetzen, dass das Gesetz, welches den Zusammenhang zwischen einer Compression oder einer Verdrehung mit der Kraft, deren Folge sie ist, ausdrückt, eine besondere experimentell hergeleitete Form hat; auch werden wir in diesem Falle keine Rücksicht auf die Wärme- oder elektrischen Wirkungen nehmen, die eine Compression oder eine Verdrehung im Allgemeinen veranlasst. Ferner werden wir die Flüssigkeiten, seien sie nun tropfbar oder gasförmig, entweder als unzusammendrückbar oder als nach gewissen bekannten Gesetzen zusammendrückbar voraussetzen; die Reibung zwischen den Theilen einer Flüssigkeit werden wir nicht betrachten, obwohl wir auf die Reibung zwischen festen Körpern Rücksicht nehmen. Wir werden demnach die Flüssigkeiten als vollkommen voraussetzen, d. h. annehmen, dass jeder Theil derselben durch die geringste Kraft in Bewegung versetzt werden könne.

449. Wenn wir zu den Eigenschaften der Materie und zu den physikalischen Kräften gelangen, werden wir die Modificationen

(soweit sie jetzt bekannt sind) näher besprechen, welche die vorhergehenden Resultate durch weitere Annäherungen erlitten haben.

450. **Gesetze der Reibung.** — Die Gesetze der Reibung zwischen festen Körpern sind auf sehr geschickte Weise von Coulomb ermittelt, und da wir dieselben in den folgenden Capiteln nöthig haben werden, so wollen wir sie hier kurz zusammenstellen. Die sorgfältigere Prüfung der von Coulomb auf experimentellem Wege erhaltenen Resultate verschieben wir auf unser Capitel über die Eigenschaften der Materie.

451. Um zu bewirken, dass ein fester Körper auf einem andern gleitet, wird, wenn die in Berührung befindlichen Flächen eben sind, eine tangentiale Kraft erfordert, welche abhängt: — (1) von der Natur der Körper; (2) von ihrer Glätte, oder der Art und der Menge des angebrachten Schmiermittels; (3) von dem Normaldruck zwischen den Körpern; diesem Druck ist die Kraft im Allgemeinen direct proportional; (4) von der Länge der Zeit, während welcher man sie in Berührung gelassen hat.

Die Kraft hängt (abgesehen von den äussersten Fällen, in denen ein Kratzen oder ein Abreiben stattfindet) nicht merklich von der Grösse der Flächen ab, in denen sich die Körper berühren. Diese Reibung, die man die statische nennt, ist danach im Stande, der Bewegung einen tangentialen Widerstand entgegenzusetzen, der sich auf jeden erforderlichen Betrag bis zu μR belaufen kann, wo R der ganze Normaldruck zwischen den Körpern und μ der Coefficient der statischen Reibung ist (welcher hauptsächlich von der Natur der sich berührenden Oberflächen abhängt). Dieser Coefficient ändert sich in hohem Grade mit den Umständen; in einigen Fällen ist er nur 0·03, in anderen dagegen 0·80. Weiterhin werden wir eine Tabelle seiner Werthe geben. Wo die Kräfte, die man auf das System wirken lässt, nicht im Stande sind, eine Bewegung hervorzurufen, wird nicht der ganze Betrag der statischen Reibung ins Leben gerufen, sondern nur gerade so viel, als ausreicht, die übrigen Kräfte zu äquilibriren; die Richtung der dann thätigen Reibung ist derjenigen entgegengesetzt, in welcher die Resultante der übrigen Kräfte eine Bewegung zu erzeugen strebt. Wenn die statische Reibung überwunden und ein Gleiten hervorgebracht ist, so hört, wie sich durch Versuche zeigen lässt, die Reibung nicht auf zu wirken, sondern sie setzt der Bewegung einen Widerstand entgegen, der ungefähr dem normalen Druck proportional ist; für dieselben beiden Körper ist aber der Coef-

ficient der kinetischen Reibung kleiner als derjenige der statischen; auch ist er annähernd für jede Geschwindigkeit der Bewegung derselbe.

452. Einführung der Reibung in die Gleichungen der Dynamik. — Wenn sich unter den in irgend einem Falle des Gleichgewichts wirkenden Kräften Reibungen fester Körper auf festen Körpern vorfinden, so würden die Umstände keine Aenderung erfahren, wenn man die Reibung ganz fortliesse, und ihre Kräfte durch Kräfte einer Wechselwirkung ersetzte, von denen man annähme, dass sie durch unendlich kleine relative Bewegungen der Theile, zwischen denen sie wirken, nicht verändert würden. Durch diesen Kunstgriff werden alle solche Fälle unter das allgemeine Lagrange'sche Princip § 289 subsumirt.

453. Fortlassung bloss merkwürdiger Speculationen. — In den folgenden Capiteln über die abstracte Dynamik werden wir uns streng auf solche Theile dieses ausgedehnten Gegenstandes beschränken, die uns voraussichtlich in den späteren Theilen dieses Werkes von Nutzen sein werden, oder welche an sich so wichtig sind, dass ihre Einführung gerechtfertigt erscheint. Nur in speciellen Fällen werden wir Resultate mittheilen, die nicht sowohl nützlich als vielmehr merkwürdig sind, entweder um die Natur früherer Anwendungen der Methoden zu zeigen, oder um Beispiele besonderer Untersuchungsmethoden zu geben, mittels derer sich die Schwierigkeiten besonderer Probleme überwinden lassen. Um eine allgemeine Uebersicht dieses Zweiges, rein als Gegenstand analytischer Probleme aufgefasst, zu gewinnen, sei der Leser an die speciellen mathematischen Lehrbücher verwiesen, wie die Werke von Poisson, Delaunay, Duhamel, Todhunter, Tait und Steele, Griffin, u. s. w. Aus diesen Werken, die ja auch nur die mathematische Analysis des Gegenstandes geben wollen, kann man wenig mehr als Geschicklichkeit in der Lösung von Problemen erlangen, die im Allgemeinen von keinem grossen physikalischen Interesse sind. Im vorliegenden Werke wollen wir dagegen besonders diejenigen Fragen behandeln, welche die physikalischen Principien am besten erläutern. Schwierigkeiten rein mathematischer Natur werden wir weder aufsuchen noch vermeiden.

Sechstes Capitel.

Statik eines materiellen Punktes. — Attraction.

454. **Gegenstände des Capitels.** — Die Statik zerfällt naturgemäss in zwei Theile, deren einer das Gleichgewicht eines materiellen Punktes, deren anderer das eines starren oder elastischen Körpers oder eines festen oder flüssigen Massensystems behandelt. Für den einen Theil genügt das zweite Bewegungsgesetz, für den anderen sind das dritte Gesetz und die von Newton entwickelten Consequenzen desselben nothwendig. In einigen wenigen Paragraphen werden wir den ersteren dieser Theile abmachen; der Rest dieses Capitels wird einem Excurs über die Attraction gewidmet sein, ein Gegenstand, der von der höchsten Wichtigkeit ist.

455. **Bedingungen des Gleichgewichts eines materiellen Punktes.** — Nach § 255 werden Kräfte, welche auf denselben materiellen Punkt wirken, nach denselben Gesetzen wie Geschwindigkeiten zusammengesetzt. Es muss folglich, wenn Gleichgewicht bestehen soll, die Summe ihrer nach einer beliebigen Richtung genommenen Componenten Null sein, und hieraus ergeben sich die für das Gleichgewicht erforderlichen und hinreichenden Bedingungen.

Dieselben folgen auch direct aus Newton's Entwicklungen über die Arbeit, wenn wir voraussetzen, dass der Punkt irgend eine Geschwindigkeit von constanter Richtung und Grösse hat (und nach § 245 ist dies die allgemeinste Voraussetzung, die wir machen können, da absolute Ruhe wahrscheinlich nicht existirt). Denn da keine Aenderung der kinetischen Energie erfolgt, so ist die während einer beliebigen Zeit verrichtete Arbeit das Product der in dieser Zeit stattfindenden Verschiebung in die algebraische Summe der wirksamen Componenten der auf den Punkt einwirkenden Kräfte.

Diese Summe muss daher für jede Richtung verschwinden. Jede Verschiebung lässt sich nach drei beliebigen Richtungen, die nur nicht in einer Ebene liegen dürfen, in drei Componenten zerlegen, und diese letzteren reichen für das Criterium des Gleichgewichts aus. Es ist aber im Allgemeinen zweckmässig, jene drei Verschiebungen in zu einander senkrechten Richtungen anzunehmen.

Mit Rücksicht hierauf erhalten wir das Resultat: Damit ein materieller Punkt sich im Zustande des Gleichgewichts befinde, ist nothwendig und hinreichend, dass die (algebraischen) Summen der nach drei beliebigen zu einander senkrechten Richtungen genommenen Componenten aller auf den Punkt wirkenden Kräfte verschwinden.

Wenn eine der Kräfte, P, die Richtungscosinus l, m, n hat, so erhalten wir sofort

$$\Sigma lP = 0, \quad \Sigma mP = 0, \quad \Sigma nP = 0.$$

Wenn kein Gleichgewicht stattfindet, so möge die resultirende Kraft R sein und die Richtungscosinus λ, μ, ν haben. Es wird dann eine Kraft, welche R gleich und entgegengesetzt gerichtet ist, in Verbindung mit den übrigen Kräften Gleichgewicht erzeugen; folglich ist

$$\Sigma lP - \lambda R = 0, \quad \Sigma mP - \mu R = 0, \quad \Sigma nP - \nu R = 0,$$

und

$$R^2 = (\Sigma lP)^2 + (\Sigma mP)^2 + (\Sigma nP)^2,$$

wobei

$$\frac{\lambda}{\Sigma lP} = \frac{\mu}{\Sigma mP} = \frac{\nu}{\Sigma nP}.$$

456. Wir wollen einige wenige besondere Fälle als Beispiele der obigen allgemeinen Resultate betrachten: —

(1.) Wenn der materielle Punkt auf einer glatten Curve ruht, so muss die längs der Curve genommene Componente der Kraft verschwinden.

Sind x, y, z die Coordinaten des Curvenpunktes, in welchem der materielle Punkt ruht, so ist offenbar

$$P\left(l\frac{dx}{ds} + m\frac{dy}{ds} + n\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Wenn P, l, m, n durch x, y, z ausgedrückt sind, so bestimmt diese Gleichung in Verbindung mit den beiden Gleichungen der Curve die Gleichgewichtslage.

(2.) Wenn die Curve rauh ist, so muss die längs derselben genommene Componente der resultirenden Kraft durch die Reibung äquilibrirt werden.

Wenn die Reibung F ist, so ist die Bedingung

$$P\left(l\frac{dx}{ds} + m\frac{dy}{ds} + n\frac{dz}{ds}\right) - F = 0.$$



Diese Gleichung liefert uns die Grösse der Reibung, die ins Leben gerufen werden wird, und es wird Gleichgewicht bestehen, so lange die Reibung noch μ mal so gross als der auf der Curve lastende Normaldruck ist. Dieser Normaldruck ist aber

$$P\left(\left(m\frac{dz}{ds}-n\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(n\frac{dx}{ds}-l\frac{dz}{ds}\right)^2+\left(l\frac{dy}{ds}-m\frac{dx}{ds}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Grenzlagen, zwischen denen Gleichgewicht möglich ist, werden daher erhalten, wenn man die beiden Gleichungen der Curve mit der folgenden verbindet: —

$$P\left(l\frac{dx}{ds}+m\frac{dy}{ds}+n\frac{dz}{ds}\right)$$
$$\pm\mu P\left(\left(m\frac{dz}{ds}-n\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(n\frac{dx}{ds}-l\frac{dz}{ds}\right)^2+\left(l\frac{dy}{ds}-m\frac{dx}{ds}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=0.$$

(3.) Wenn der materielle Punkt auf einer glatten Oberfläche ruht, so muss die Resultante der auf ihn wirkenden Kräfte offenbar senkrecht zur Oberfläche sein.

Ist $\varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Oberfläche, so muss demnach

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{lP}=\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{mP}=\frac{\frac{d\varphi}{dz}}{nP}$$

sein, und diese drei Gleichungen bestimmen die Gleichgewichtslage.

(4.) Wenn der Punkt auf einer rauhen Oberfläche ruht, so wird Reibung ins Leben gerufen, welche einer Bewegung längs der Oberfläche einen Widerstand entgegensetzt, und es wird in jedem Punkte innerhalb einer gewissen Grenzlinie Gleichgewicht bestehen. Diese Grenzlinie bestimmt sich durch die Bedingung, dass die Reibung auf ihr μ mal so gross als der auf der Oberfläche lastende Normaldruck ist, während die Reibung in allen von ihr eingeschlossenen Punkten zum Normaldruck in einem kleineren Verhältniss steht. Wenn nur die Schwere auf den materiellen Punkt wirkt, so erhalten wir ein sehr einfaches Resultat, welches oft von praktischem Nutzen ist. Es sei ϑ der Winkel, welchen die in irgend einem Punkte errichtete Normale der Oberfläche mit der verticalen Richtung einschliesst. Der auf der Oberfläche lastende Normaldruck ist offenbar $W\cos\vartheta$, wo W das Gewicht des materiellen Punktes ist, und die der Oberfläche parallele Componente des Gewichts, die natürlich durch die Reibung äquilibrirt werden muss, ist $W\sin\vartheta$. In der Grenzlage, in welcher der Punkt eben anfängt zu gleiten, wird der grösste mögliche Betrag statischer Reibung ins Leben gerufen, und es ist

$$W\sin\vartheta = \mu W\cos\vartheta,$$

oder

$$\tan \vartheta = \mu.$$

Der so gefundene Werth von μ wird der Ruhewinkel genannt. Man kann ihn in der Natur an Sandhaufen und Abhängen sehen, welche bei einer zerfallenden Klippe (besonders, wenn dieselbe blätterig ist) von den hinabrutschenden Trümmern gebildet werden; es sind dann die Linien der grössten Abdachung gegen den Horizont unter einem Winkel geneigt, welcher durch diese Betrachtung bestimmt wird.

Es sei $\varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Oberfläche und P die Resultante der auf den Punkt wirkenden Kräfte; P habe die Richtungscosinus l, m, n. Der Normaldruck ist

$$P \cdot \frac{l\frac{d\varphi}{dx} + m\frac{d\varphi}{dy} + n\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}.$$

Die der Oberfläche parallele Componente von P ist

$$P\sqrt{\frac{\left(m\frac{d\varphi}{dz} - n\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(n\frac{d\varphi}{dx} - l\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + \left(l\frac{d\varphi}{dy} - m\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}.$$

Für die Umgrenzung des Theils der Oberfläche, innerhalb dessen Gleichgewicht möglich ist, erhalten wir also die weitere Gleichung

$$\left(m\frac{d\varphi}{dz} - n\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(n\frac{d\varphi}{dx} - l\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + \left(l\frac{d\varphi}{dy} - m\frac{d\varphi}{dx}\right)^2$$
$$= \mu^2\left(l\frac{d\varphi}{dx} + m\frac{d\varphi}{dy} + n\frac{d\varphi}{dz}\right)^2.$$

457. **Attraction.** — Einen höchst wichtigen Fall der Zusammensetzung von Kräften, die auf denselben Punkt wirken, liefert uns die Betrachtung der Attraction, welche ein Körper von beliebiger Form auf einen irgendwo gelegenen materiellen Punkt ausübt. Experimente haben gezeigt, dass die Attraction, welche ein beliebiger Massentheil auf einen andern Theil ausübt, durch die Nähe oder sogar die Dazwischenschiebung anderer Masse nicht modificirt wird. Die Attraction eines Körpers auf einen Massenpunkt ist daher die Resultante der Kräfte, mit welchen die verschiedenen Theile des Körpers diesen Punkt anziehen. Was die Betrachtung der oft sehr merkwürdigen Consequenzen verschiedener Attractionsgesetze betrifft, so müssen wir auf die Werke über angewandte Mathematik verweisen. Wir haben uns hier auf das Gravitationsgesetz zu beschränken, welches in der That eine grosse Menge ebenso interessanter als nützlicher Resultate liefert.

458. Allgemeines Gesetz der Attraction. — Dies Gesetz, welches (als eine Eigenschaft der Materie) im nächsten Theile dieses Werkes ausführlich behandelt werden wird, lässt sich folgendermaassen aussprechen: —

Jeder kleinste Theil Materie zieht jeden anderen Theil mit einer Kraft an, deren Richtung mit der Verbindungslinie beider Theile zusammenfällt, und deren Grösse dem Product ihrer Massen direct und dem Quadrat ihres Abstandes von einander umgekehrt proportional ist.

Experimente zeigen (wie wir später sehen werden), dass dasselbe Gesetz für elektrische und magnetische Attractionen gilt; wahrscheinlich ist es das Fundamentalgesetz jeder Wirkung in der Natur, wenigstens wenn die Körper, um deren Wirkung es sich handelt, nicht in wirklicher Berührung sind.

459. Specielle Einheit der Stoffmenge. — Für die speciellen Anwendungen der statischen Principien, zu denen wir uns jetzt wenden, wird es zweckmässig sein, eine specielle Einheit der Masse oder Stoffmenge und entsprechende Einheiten für die Messung der Elektricität und des Magnetismus zu gebrauchen.

In Uebereinstimmung mit dem in § 458 ausgesprochenen physikalischen Gesetze nehmen wir zum Ausdruck der Kraft, welche jede der beiden Massen M und m in der Entfernung D auf die andere ausübt, die Grösse

$$\frac{Mm}{D^2};$$

dann leuchtet ein, dass die Einheit der Kraft die wechselseitige Anziehung zweier Masseneinheiten ist, die sich in der Einheit der Entfernung von einander befinden.

460. Dichtigkeit. — Für viele Anwendungen ist es zweckmässig, von der Dichtigkeit der Vertheilung von wägbarer Masse, von Elektricität, u. s. w. längs einer Linie, auf einer Oberfläche oder in einem Volumen zu sprechen. Es ist aber die

Dichtigkeit in Linien = Masse, die auf die Einheit der Länge kommt;
" " Flächen = " " " " " " Fläche " ;
" im Raume = " " " " " des Volumens " .

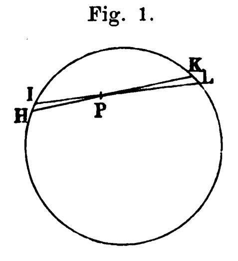
461. Einheiten für die Messung der Elektricität und des Magnetismus. — Um die nachstehenden Untersuchungen auf die Elektricität oder den Magnetismus anzuwenden, hat man nur voraus zu bemerken, dass dann M und m für Quantitäten freier Elektricität oder freien Magnetismus stehen, und dass dabei nicht

nothwendig an eine der Trägheit unterworfene Masse zu denken ist, dass im Gegentheil die Frage nach dem Wesen der Elektricität und des Magnetismus offen gelassen wird. Die Formel $\frac{Mm}{D^2}$ wird immer noch die Wechselwirkung zweier in der Entfernung D von einander befindlichen Massen M, m darstellen, wenn man zur Einheit der imaginären elektrischen oder magnetischen Materie eine solche Grösse nimmt, welche auf eine in der Einheit der Entfernung befindliche gleiche Quantität die Einheit der Kraft ausübt. Hier können jedoch eine der Grössen M, m, oder auch beide, negativ sein, und da hier gleichartige Grössen einander abstossen, so wird die Wechselwirkung eine Anziehung oder eine Abstossung sein, jenachdem ihr Ausdruck das negative oder positive Zeichen hat. Dies vorausbemerkt, ist die folgende Theorie auf jede der oben erwähnten Classen von Kräften anwendbar. Wir beginnen mit einigen einfachen Fällen, die vollständig mit Hülfe der Elementar-Geometrie behandelt werden können.

462. Anziehung einer gleichförmig belegten Kugelfläche auf einen inneren Punkt. — Wenn die verschiedenen Punkte einer Kugelfläche auf gleiche Weise mit Kräften anziehen, welche umgekehrt wie die Quadrate der Abstände variiren, so wird ein innerhalb der Oberfläche befindlicher materieller Punkt nach keiner Richtung hin gezogen.

Es sei $HIKL$ die Kugelfläche und P der im Innern befindliche Massenpunkt. Ferner seien durch P zwei gerade Linien HK, IL gezogen, welche sehr kleine Bogen HI, KL zwischen sich enthalten. Dann sind die Dreiecke HPI, KPL ähnlich, folglich jene Bogen den Abständen HP, LP proportional, und zwei beliebige in HI und KL liegende Elemente der Kugelfläche, die ringsum von Geraden begrenzt werden, welche durch P gehen [und nur äusserst wenig von HK abweichen], verhalten sich zu einander wie die Quadrate jener Linien. Die von der Materie, welche sich in diesen Elementen befindet, auf den Massenpunkt P ausgeübten Kräfte sind somit einander gleich; denn sie sind den Quantitäten Materie direct und den Quadraten der Abstände umgekehrt proportional, und durch Vereinigung

Fig. 1.



dieser beiden Verhältnisse erhält man das Resultat, dass die Kräfte gleich sind. Die auf P von dem in HI liegenden Element ausgeübte Anziehung ist also der von dem in KL liegenden Element ausgeübten Anziehung gleich und entgegengesetzt, d. h. der Punkt P wird weder nach der einen, noch nach der anderen Seite hin angezogen. Auf dieselbe Weise erkennt man, dass die Kraft, mit welcher jedes andere Element der Kugelfläche den Punkt P anzieht, durch eine gleiche und entgegengesetzte Kraft aufgehoben wird. Der Punkt P wird also durch diese Anziehungskräfte nach keiner Richtung hin getrieben.

463. Excurs über die Theilung von Flächen in Elemente. — In den folgenden Untersuchungen wird uns die Eintheilung einer Kugelfläche in unendlich kleine Elemente noch öfters begegnen, und die im vorhergehenden Beweise beschriebene Methode Newton's, nach welcher die Theilung in einer solchen Weise ausgeführt wird, dass alle Theile in Paare von je zwei in Beziehung auf einen inneren Punkt entgegengesetzten Elementen zusammengefasst werden können, wird neben anderen aus ihr hergeleiteten und für besondere Probleme passenden Methoden wiederholt zur Anwendung kommen. Wir machen jetzt einen kleinen Excurs, um einige diesen Gegenstand betreffende Definitionen und elementar-geometrische Sätze zu geben, welche die nachfolgenden Beweise erheblich vereinfachen, indem sie uns einerseits in den Stand setzen, durch den Gebrauch geeigneter Ausdrücke Umschreibungen zu vermeiden, und uns andererseits die Mittel gewähren, uns auf elementare Principien zu beziehen, in Betreff derer sonst wiederholte Auseinandersetzungen erforderlich sein würden.

464. Kegelflächen. — Wenn eine beständig durch einen festen Punkt gehende gerade Linie sich auf irgend eine Weise bewegt, so sagt man, sie beschreibe oder erzeuge eine Kegelfläche, für welche der feste Punkt der Scheitel ist.

Wenn die erzeugende Linie aus einer gegebenen Lage sich stetig durch eine Reihe von Lagen bewegt, von denen keine mit einer anderen zusammenfällt, bis sie wieder in ihre erste Lage gelangt, so erzeugt sie zu beiden Seiten des festen Punktes eine vollständige Kegelfläche, die aus zwei Schalen besteht. Man nennt diese Schalen entgegengesetzte oder Scheitelkegel. Die im oben gegebenen Newton'schen Beweise beschriebenen Elemente HI und KL können als die von zwei entgegengesetzten Kegeln, die P zum gemeinschaftlichen Scheitel haben, gebildeten Ausschnitte aus der Kugelfläche angesehen werden.

465. Der körperliche Winkel (Kegelecke) eines Kegels oder einer vollständigen Kegelfläche. — Wenn vom Scheitel eines Kegels als Mittelpunkt aus beliebig viele Kugeln beschrieben werden, so werden die Ausschnitte aus den concentrischen Kugelflächen ähnlich sein, ihre Flächen sich also wie die Quadrate der Radien verhalten. Der Quotient, den man erhält, wenn man die Fläche eines dieser Segmente durch das Quadrat des Radius der zugehörigen Kugelfläche dividirt, wird zum Maass des körperlichen Winkels des Kegels oder der Kegelecke genommen. Die von dem entgegengesetzten Kegel gebildeten Segmente derselben Kugelfläche sind den ersteren beziehungsweise congruent. Die Kegelecken zweier entgegengesetzten oder Scheitelkegel sind folglich einander gleich, und jede von beiden kann als die der vollständigen Kegelfläche, deren Schalen die beiden entgegengesetzten Kegel sind, zugehörige Ecke genommen werden.

466. Summe aller um einen Punkt liegenden Kegelecken. — Da die Grösse einer Kugelfläche gleich dem Product aus dem Quadrat des Radius in 4π ist, so sehen wir, dass die Ecken aller verschiedenen Kegel, die man um einen gegebenen Punkt als Scheitel beschreiben kann, zur Summe 4π haben.

467. Summe der Kegelecken aller vollständigen Kegelflächen. — Da die Ecken entgegengesetzter oder Scheitelkegel einander gleich sind, so schliessen wir aus dem Vorhergehenden, dass die Summe der Ecken aller vollständigen Kegelflächen, welche, ohne sich zu schneiden, um einen gegebenen Punkt als Scheitel beschrieben werden können, gleich 2π ist.

468. Unter der in einem Punkte über einem Flächenstück stehenden Kegelecke verstehen wir die Ecke des Kegels, dessen Erzeugungslinie beständig durch den Punkt geht, und die Umgrenzung des Flächenstücks vollständig umschreibt.

469. Senkrechte und schiefe Schnitte eines kleinen Kegels. — Ein sehr kleiner Kegel, d. h. ein Kegel, bei welchen irgend zwei Lagen der erzeugenden Linie nur einen sehr kleinen Winkel enthalten, wird unter rechten Winkeln oder orthogonal von einer um den Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche oder von einer beliebigen anderen ebenen oder gekrümmten Fläche geschnitten, welche diese Kugelfläche da, wo sie den Kegel schneidet, berührt.

Ein sehr kleiner Kegel wird schräg geschnitten, wenn der Schnitt mit einem orthogonalen Schnitt einen Winkel von endlicher Grösse bildet; dieser Neigungswinkel heisst die Schrägheit des Schnittes.

Die Fläche eines orthogonalen Schnittes eines sehr kleinen Kegels ist gleich dem Product aus der Fläche eines in derselben Lage angebrachten schrägen Schnittes in den Cosinus der Schrägheit.

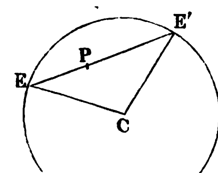
Die Fläche eines schrägen Schnittes eines sehr kleinen Kegels ist folglich gleich dem Quotienten, den man erhält, wenn man das Product aus dem Quadrate seines Abstandes vom Scheitel in die Grösse der Kegelecke durch den Cosinus der Schrägheit dividirt.

470. Fläche des durch einen kleinen Kegel auf einer Kugelfläche gebildeten Segments. — Es bezeichne E die Fläche eines sehr kleinen Elements einer Kugelfläche, welches im Punkte E liegt (d. h. dessen Theile sämmtlich dem Punkte E sehr nahe liegen); ferner bezeichne ω die über E in einem beliebigen Punkte P stehende Kegelecke, und es möge die Gerade PE oder ihre Verlängerung die Kugelfläche zum zweiten Male in E' treffen. Ist dann a der Radius der Kugelfläche, so erhalten wir

$$E = \frac{2a \cdot \omega \cdot \overline{PE}^2}{EE'}.$$

Denn wir können das Element E als einen Schnitt des Kegels ansehen, dessen Scheitel P ist und dessen erzeugende Linie die Umgrenzung von E durchläuft. Die Schrägheit dieses Schnittes ist der Winkel zwischen der gegebenen und einer zweiten Kugelfläche, die um P als Mittelpunkt mit dem Radius PE beschrieben ist; sie ist daher gleich dem Winkel zwischen den Radien EP und EC der beiden Kugeln. Betrachten wir also das gleichschenklige Dreieck ECE', so ergiebt sich, dass der Cosinus der Schrägheit gleich $\frac{\frac{1}{2}EE'}{EC}$ oder gleich $\frac{EE'}{2a}$ ist, und mit Rücksicht hierauf erhalten wir leicht den gegebenen Ausdruck für E.

Fig. 2.

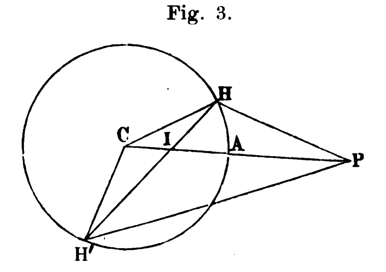


471. Anziehung einer gleichförmig belegten Kugelfläche auf einen äusseren Punkt. — Die Anziehung, welche eine gleichförmig belegte Kugelfläche auf einen äusseren

Punkt ausübt, ist dieselbe, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre*).

Es sei P der äussere Punkt, C der Mittelpunkt der Kugel und CAP eine Gerade, welche die Kugelfläche in A schneidet. Wir nehmen in CP den Punkt I so an, dass $CP : CA = CA : CI$ ist und theilen die ganze Kugelfläche in Beziehung auf den Punkt I in Paare entgegengesetzter Elemente.

Fig. 3.



Bezeichnen H und H' die Grössen eines Paares solcher Elemente, welche beziehungsweise in den Endpunkten einer Sehne HH' liegen, und ist ω die Grösse der über jedem dieser Elemente im Punkte I stehenden Kegelecke, so haben wir nach § 469

$$H = \frac{\omega \cdot \overline{IH}^2}{\cos CHI} \text{ und } H' = \frac{\omega \cdot \overline{IH'}^2}{\cos CH'I}.$$

Bezeichnet demnach ϱ die Dichtigkeit der Masse auf der Oberfläche, so ziehen die Elemente H und H' den Punkt P beziehungsweise mit den Kräften

$$\varrho \frac{\omega}{\cos CHI} \cdot \frac{\overline{IH}^2}{\overline{PH}^2} \text{ und } \varrho \frac{\omega}{\cos CH'I} \cdot \frac{\overline{IH'}^2}{\overline{PH'}^2}$$

an. Nun haben die beiden Dreiecke PCH, HCI den Winkel bei C gemeinschaftlich, und die diesen Winkel einschliessenden Seiten sind proportionirt, da $PC : CH = CH : CI$ ist. Die Dreiecke sind folglich ähnlich und die Winkel CPH und CHI einander gleich, also

$$\frac{IH}{HP} = \frac{CH}{CP} = \frac{a}{CP}.$$

*) Dieser Satz, welcher allgemeiner als der erste Satz Newtons über die Attraction auf einen äusseren Punkt ist (Prop. LXXI), wird vollständig bewiesen als Zusatz zu einem folgenden Satze (Prop. LXXIII. cor. 2). Wenn wir das Verhältniss der auf zwei in verschiedenen Abständen befindliche äussere Punkte ausgeübten Kräfte betrachtet hätten, statt, wie im Text geschehen ist, die auf einen Punkt wirkende absolute Kraft zu bestimmen, und wenn wir ausserdem alle Elementepaare zusammengefasst hätten, welche zwei schmale ringförmige Theile der Oberfläche bilden würden, deren Ebenen senkrecht zu PC sind, so würde der Satz und sein Beweis vollständig mit Prop. LXXI der Principia übereinstimmen.

Auf dieselbe Weise lässt sich durch Betrachtung der Dreiecke CPH' und $CH'I$ darthun, dass die Winkel CPH' und $CH'I$ gleich sind, und dass man

$$\frac{IH'}{H'P} = \frac{CH'}{CP} = \frac{a}{CP}$$

hat. Die Ausdrücke für die Grössen der von den Elementen H und H' auf P ausgeübten Anziehungen werden folglich

$$\varrho\,\frac{\omega}{\cos CHI} \cdot \frac{a^2}{\overline{CP}^2} \text{ und } \varrho\,\frac{\omega}{\cos CH'I} \cdot \frac{a^2}{\overline{CP}^2},$$

und diese sind gleich, da das Dreieck HCH' gleichschenklig ist. Aus demselben Grunde sind die Winkel CPH, CPH', die, wie wir gezeigt haben, beziehungsweise den Winkeln CHI, $CH'I$ gleich sind, einander gleich. Wir schliessen daraus, dass die Resultante der von den beiden Elementen H und H' ausgeübten Kräfte die Richtung PC hat und gleich

$$2\,\omega \cdot \varrho \cdot \frac{a^2}{\overline{CP}^2}$$

ist.

Um jetzt die Gesammtkraft zu erhalten, welche auf P wirkt, müssen wir die Summe aller längs PC wirkenden Kräfte nehmen, welche von den Paaren entgegengesetzter Elemente ausgeübt werden, und da der Multiplicator von ω für jedes Paar derselbe ist, so haben wir alle Werthe von ω zu addiren, erhalten also als Werth der gesuchten Resultante (§ 466)

$$\frac{4\,\pi\,\varrho\,a^2}{\overline{CP}^2}.$$

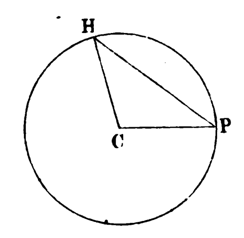
Der Zähler dieses Ausdrucks ist das Product aus der Dichtigkeit in die Grösse der Kugelfläche, also gleich der ganzen Masse, um die es sich handelt. Die auf P wirkende Kraft ist mithin dieselbe, als wenn diese ganze Masse in C vereinigt wäre.

Zusatz. — Die auf einen der Oberfläche unendlich naheliegenden äusseren Punkt ausgeübte Kraft ist gleich $4\,\pi\,\varrho$ und hat die Richtung der durch den Punkt gehenden Normalen der Kugelfläche. Die auf einen der Oberfläche auch noch so nahe liegenden inneren Punkt wirkende Kraft ist aber nach einem vorhergehenden Satze Null.

472. Anziehung auf ein Element der Oberfläche. — Es sei σ die Fläche eines in einem beliebigen Punkte P liegenden unendlich kleinen Elements der Kugelfläche, und es werde in

einem beliebigen zweiten Punkte H der Oberfläche ein kleines Element angenommen, über welchem in P eine Kegelecke ω steht.

Fig. 4.



Die Fläche dieses Elementes wird gleich

$$\frac{\omega . \overline{PH}^2}{\cos CHP}$$

sein; dasselbe wird daher das in P liegende Element σ mit einer Kraft anziehen, welche die Richtung HP und die Grösse

$$\frac{\varrho \omega . \varrho \sigma}{\cos CHP} \text{ oder } \frac{\omega}{\cos CHP} \varrho^2 \sigma$$

hat. Nun findet die Gesammtanziehung, welche das in P befindliche Element erleidet, in der Richtung CP statt. Die nach dieser Richtung genommene Componente der von dem Element H ausgeübten Anziehung ist

$$\omega . \varrho^2 \sigma,$$

und da die den verschiedenen Elementen der Kugelfläche entsprechenden Kegel sämmtlich auf derselben Seite der in P an die Kugel gelegten Tangentialebene liegen, so erhalten wir für die Gesammtanziehung, welcher das Element σ unterliegt,

$$2 \pi \varrho^2 \sigma.$$

Aus dem Zusatz zum vorhergehenden Satze ersehen wir, dass diese Anziehung halb so gross als die Kraft ist, welche auf einen der Kugelfläche unendlich nahe liegenden äusseren Punkt ausgeübt werden würde, der ebenso viel Masse wie das Element σ enthielte.

473. **Anziehung einer Kugelfläche, deren Dichtigkeit dem Cubus des Abstandes von einem gegebenen Punkte umgekehrt proportional ist.** — In einigen der wichtigsten elementaren Probleme der Elektricitätstheorie kommen Kugelflächen vor, deren Dichtigkeiten umgekehrt wie die Cuben der Abstände von excentrischen Punkten variiren, und es ist von Wichtigkeit, die Anziehung einer solchen Schale auf einen inneren oder äusseren Punkt zu ermitteln. Dies kann synthetisch auf folgende Weise geschehen. Die Untersuchung ist, wie sich unten zeigen wird, im Wesentlichen dieselbe wie die des § 462 oder § 471.

474. Wir wollen zuerst den Fall betrachten, in welchem der gegebene Punkt S und der angezogene Punkt P durch die Kugelfläche getrennt sind. Die beiden Figuren 5, 6 stellen die beiden hier möglichen Fälle dar; im ersteren Falle liegt S ausserhalb, P innerhalb, im zweiten P ausserhalb und S innerhalb der

Kugel. Man könnte für beide Fälle buchstäblich denselben Beweis geben; wir wollen jedoch, um die Betrachtung negativer Grössen zu vermeiden, einige der Ausdrücke so modificiren, dass sie besser für die zweite Figur passen. Zwei in dieser Weise zusammengehörende Ausdrücke werden wir unter einander stellen, und zwar wird der obere Ausdruck für die erstere, der untere für die zweite Figur gelten.

Es bezeichne a den Radius der Kugel, und es werde die Entfernung des Punktes S von dem (in den Figuren nicht angegebenen) Mittelpunkt C der Kugel mit f bezeichnet.

Wir verbinden S mit P und nehmen in dieser Geraden (oder in ihrer Verlängerung) einen Punkt T an, so dass

$$\text{(Fig. 5)}\ SP.ST = f^2 - a^2,$$
$$\text{(Fig. 6)}\ SP.TS = a^2 - f^2$$

ist. Durch T ziehen wir eine beliebige Gerade, welche die Kugelfläche in K und K' schneidet, verbinden darauf S mit K und K' und verlängern diese Geraden, bis sie die Kugelfläche nochmals in E und E' treffen.

Es werde nun die ganze Kugelfläche in Beziehung auf den Punkt T in Paare entgegengesetzter Elemente eingetheilt. K und K' seien ein Paar solcher Elemente, die an den Endpunkten der Sehne KK' liegen, und über denen im Punkte T die Kegelecke ω steht. Ausserdem nehmen wir die Elemente E und E' an, über denen in S beziehungsweise dieselben Kegelecken wie über den Elementen K und K' stehen. Dadurch können wir die ganze Kugelfläche in Paare conjugirter Elemente E, E' zerlegen; denn es ist leicht ersichtlich, dass wenn wir jedes Paar von Elementen K, K' genommen haben, die daraus hergeleiteten Ele-

Fig. 5.

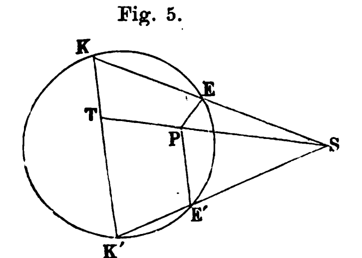
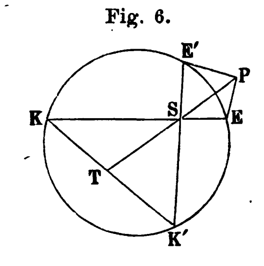


Fig. 6.



mente E, E' die ganze Kugelfläche ausmachen werden, ohne dass ein Theil derselben mehr als einmal genommen wäre. Die auf P ausgeübte Anziehung wird also die Resultante der von allen Elementenpaaren E, E' ausgeübten Anziehungen sein.

Ist nun ϱ die Dichtigkeit im Punkte E, und bezeichnet F die Anziehung, welche das Element E auf P ausübt, so haben wir

$$F = \frac{\varrho \,.\, E}{\overline{EP}^2}.$$

Nach dem gegebenen Dichtigkeitsgesetz soll aber

$$\varrho = \frac{\lambda}{\overline{SE}^3}$$

sein, wo λ eine Constante ist. Da ferner SEK gegen die Kugeloberfläche in den beiden Schnittpunkten gleich geneigt ist, so erhalten wir

$$E = \frac{\overline{SE}^2}{\overline{SK}^2} \cdot K = \frac{\overline{SE}^2}{\overline{SK}^2} \cdot \frac{2 a \omega \,.\, \overline{TK}^2}{KK'}$$

und folglich ist

$$F = \frac{\dfrac{\lambda}{\overline{SE}^3} \cdot \dfrac{\overline{SE}^2}{\overline{SK}^2} \cdot \dfrac{2 a \omega \,.\, \overline{TK}^2}{KK'}}{\overline{EP}^2} = \lambda \cdot \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\overline{TK}^2}{SE \,.\, \overline{SK}^2 \,.\, \overline{EP}^2} \cdot \omega.$$

Betrachten wir jetzt den grössten Kreis, in welchem eine durch die Gerade SK gelegte Ebene die Kugel schneidet, so finden wir

$$\text{(Fig. 5)} \quad SK \,.\, SE = f^2 - a^2,$$
$$\text{(Fig. 6)} \quad KS \,.\, SE = a^2 - f^2.$$

Es ist folglich $SK \,.\, SE = SP \,.\, ST$, und hieraus schliessen wir, dass die Dreiecke KST, PSE ähnlich sind, also

$$TK : SK = PE : SP$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{\overline{TK}^2}{\overline{SK}^2 \,.\, \overline{PE}^2} = \frac{1}{\overline{SP}^2},$$

und der Ausdruck für F geht über in

$$F = \lambda \cdot \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{1}{SE \,.\, \overline{SP}^2} \cdot \omega.$$

Bei Benutzung der vorhergehenden Ausdrücke erhält man hieraus

$$\text{(Fig. 5)} \quad F = \lambda \cdot \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(f^2 - a^2)\, \overline{SP}^2} \cdot SK,$$

$$\text{(Fig. 6)} \quad F = \lambda \cdot \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(a^2 - f^2)\, \overline{SP}^2} \cdot KS.$$

Ebenso ergibt sich, wenn F' die Anziehung bezeichnet, welche E' auf P ausübt,

$$\text{(Fig. 5)}\ F' = \lambda \cdot \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(f^2 - a^2)\,\overline{SP}^2} \cdot SK',$$

$$\text{(Fig. 6)}\ F' = \lambda \cdot \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(a^2 - f^2)\,\overline{SP}^2} \cdot K'S.$$

Nun sind in den Dreiecken, deren Aehnlichkeit wir nachgewiesen haben, die Winkel TKS, EPS einander gleich, und ebenso kann man die Gleichheit der Winkel $SK'T$, SPE' beweisen. Die Winkel, welche die beiden Seiten SK, SK' des Dreiecks KSK' mit der dritten Seite bilden, sind also gleich den Winkeln, welche die Linie PS mit den Richtungen PE, PE' der beiden auf den Punkt P wirkenden Kräfte bildet, und die Seiten SK, SK' verhalten sich zu einander wie die in den Richtungen PE, PE' genommenen Componenten der Kräfte F, F'. Es folgt daraus nach dem „Dreieck der Kräfte“, dass die Resultante von F und F' die Richtung PS hat und zu den Componenten in denselben Verhältnissen steht, wie die Seite KK' des Dreiecks zu den beiden anderen Seiten. Die Resultante der von den beiden Elementen E und E' auf den Punkt P ausgeübten Kräfte ist somit nach S zu gerichtet und gleich

$$\lambda \cdot \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega.}{(f^2 \backsim a^2)\,\overline{SP}^2} \cdot KK' \text{ oder } \frac{\lambda . 2a . \omega}{(f^2 \backsim a^2)\,\overline{SP}^2}. \text{*)}$$

Es ist also auch die Gesammtresultante nach S hin gerichtet, und durch Summation (§ 466) erhalten wir für ihre Grösse den Ausdruck

$$\frac{\lambda . 4\pi a}{(f^2 \backsim a^2)\,\overline{SP}^2}.$$

Wir schliessen daraus, dass die Resultante der auf einen beliebigen von S durch die Kugelfläche getrennten Punkt P wirkenden Kräfte gleich der Kraft ist, welche eine in S vereinigte Masse von der Grösse $\frac{\lambda . 4\pi a}{f^2 \backsim a^2}$ auf P ausüben würde.

475. Wir wollen jetzt die Attraction bestimmen, wenn die Punkte S und P entweder beide ausserhalb, oder beide innerhalb der Kugeloberfläche liegen.

Wird in der Linie CS oder in ihrer Verlängerung über S hinaus ein Punkt S_1 so angenommen, dass

$$CS . CS_1 = a^2$$

ist, so haben wir nach einem bekannten geometrischen Satze, wenn E ein beliebiger auf der Kugelfläche liegender Punkt ist,

---

*) $f^2 \backsim a^2$ bedeutet $f^2 - a^2$ oder $a^2 - f^2$, jenachdem $f > a$ oder $a > f$ ist.

$$\frac{SE}{S_1E} = \frac{f}{a}.$$

Es ist folglich

$$\frac{\lambda}{\overline{SE}^3} = \frac{\lambda a^3}{f^3 \cdot \overline{S_1E}^3}.$$

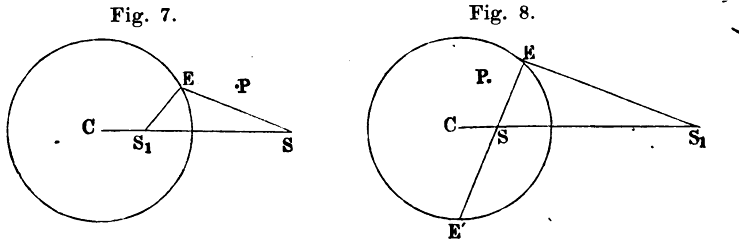
Ist also ϱ die Dichtigkeit der Elektricität in E, so hat man

$$\varrho = \frac{\frac{\lambda a^3}{f^3}}{\overline{S_1E}^3} = \frac{\lambda_1}{\overline{S_1E}^3},$$

wenn

$$\lambda_1 = \frac{\lambda a^3}{f^3}$$

ist. Nach der im vorigen Paragraphen angestellten Untersuchung findet somit die auf P ausgeübte Attraction in der Richtung nach S_1 zu statt, und ihre Grösse ist dieselbe, wie wenn eine Masse von der Grösse $\frac{\lambda_1 . 4\pi a}{f_1{}^2 \sim a^2}$ in diesem Punkte concentrirt wäre; darin bezeichnet f_1 die Linie CS_1. Substituiren wir die Werthe von f_1 und



λ_1, nämlich $\frac{a^2}{f}$ und $\frac{\lambda a^3}{f^3}$, so erhalten wir für die Grösse der Masse, die wir uns in S_1 vereinigt zu denken haben, den modificirten Ausdruck

$$\frac{\lambda \frac{a}{f} \cdot 4\pi a}{a^2 \sim f^2}.$$

476. Eine nicht isolirte Kugel unter der Einwirkung eines elektrischen Punktes. — Wenn eine Kugelfläche so elektrisirt wird, dass die Dichtigkeit der Elektricität dem Kubus des Abstandes von einem inneren Punkte S oder von dem entsprechenden äusseren Punkte S_1 umgekehrt proportional ist, so wird sie jeden äusseren Punkt ebenso anziehen, wie wenn die ganze Elektricität in S vereinigt wäre, und jeden inneren Punkt, wie wenn eine in dem Verhältniss a zu f grössere Elektricitätsmenge sich im Punkte S_1 befände.

Die Dichtigkeit im Punkte E werde wieder mit $\frac{\lambda}{\overline{SE}^3}$ bezeichnet. Betrachten wir jetzt zwei in E und E' befindliche entgegengesetzte Elemente, über denen in S eine Kegelecke ω steht. Da die Flächen dieser Elemente

$$\frac{\omega . 2a . \overline{SE}^2}{EE'} \text{ und } \frac{\omega . 2a . \overline{SE'}^2}{EE'}$$

sind, so ist die Elektricitätsmenge, die sie zusammen enthalten,

$$\frac{\lambda . 2a . \omega}{EE'}\left(\frac{1}{SE} + \frac{1}{SE'}\right) \text{ oder } \frac{\lambda . 2a . \omega}{SE . SE'}.$$

Nun ist bekanntlich $SE . SE'$ constant und gleich $a^2 - f^2$. Summiren wir daher die Elektricitätsmengen aller Elementenpaare, so erhalten wir für die ganze Elektricität, die sich auf der Kugel befindet, den Ausdruck

$$\frac{\lambda . 4\pi a}{a^2 - f^2}.$$

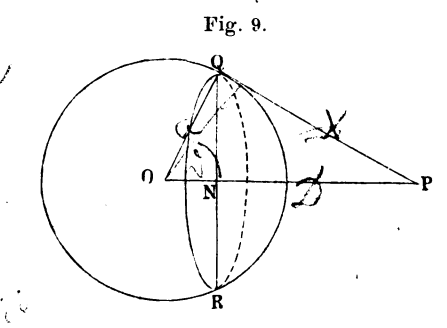
Wird dieser Ausdruck mit m bezeichnet, so verwandeln sich die in den vorigen Paragraphen hergeleiteten Ausdrücke für die Elektricitätsmengen, die wir uns im Punkte S oder S_1 concentrirt denken müssen, je nachdem P ausserhalb oder innerhalb der Kugelfläche liegt, beziehungsweise in

$$m \text{ und } \frac{a}{f} m.$$

477. Directe analytische Berechnung der Attractionen.— Die directe analytische Lösung der Probleme, wie sie uns hier beschäftigten, besteht darin, nach § 455 die drei Componenten der ganzen Attraction als Summe der von den einzelnen materiellen Punkten des anziehenden Körpers ausgeübten partiellen Attractionen auszudrücken, diese Summen nach den gewöhnlichen Methoden in bestimmte Integrale zu verwandeln, und die letzteren auszuwerthen. Eine solche Lösung ist im Allgemeinen nicht so elegant und einfach wie die weniger directe Lösungsmethode, welche darauf hinausläuft, die potentielle Energie des angezogenen materiellen Punktes in Beziehung auf die von dem anziehenden Körper auf ihn ausgeübten Kräfte zu bestimmen, eine Methode, die wir alsbald mit besonderer Sorgfalt entwickeln werden, da sie in den Theorien der Elektricität und des Magnetismus, wie auch in der Lehre von der Gravitation von unberechenbarem Werthe ist. Bevor wir aber dazu übergehen, wollen wir einige Beispiele mittels der directen Methode behandeln. Wir beginnen mit dem Fall einer Kugelschale.

(a.) **Gleichförmig belegte Kugelschale.** — Es sei P der angezogene Punkt, O der Mittelpunkt der Kugelschale. Eine beliebige zu OP senkrechte Ebene schneide OP in N und die Kugel in dem kleinen Kreise QR. Ferner setzen wir $\measuredangle QOP = \vartheta$, $OQ = a$, $OP = D$. Da dann die ganze Attraction offenbar längs PO stattfindet, so können wir von vornherein die Componenten ihrer Theile für diese Richtung nehmen. Der Streifen der Kugelfläche, welcher von den Kreisen begrenzt wird, welche beziehungsweise den Werthen ϑ, $\vartheta + d\vartheta$ des Winkels QOP entsprechen, hat die Fläche $2\pi a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$. Bezeichnet also M die Masse der Schale, so ist die längs PO genommene Componente der Attraction, welche der Streifen auf P ausübt,

Fig. 9.



$$\frac{M}{2} \sin\vartheta\, d\vartheta \cdot \frac{PN}{PQ^3}.$$

Es ist aber

$$\overline{PQ}^2 = x^2 = a^2 + D^2 - 2aD\cos\vartheta,$$

$$x\,dx = aD\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

$$PN = D - a\cos\vartheta = \frac{x^2 - a^2 + D^2}{2D},$$

folglich die Anziehung des Streifens

$$\frac{M}{4D^2} \frac{x^2 - a^2 + D^2}{a x^2} dx.$$

Bei der Integration haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

(1.) P ist ein äusserer Punkt, d. h. $D > a$. Die Grenzwerthe von x sind dann $D - a$ und $D + a$, und die Attraction ist

$$\frac{M}{4D^2}\left[\frac{x}{a} - \frac{D^2 - a^2}{ax}\right]_{D-a}^{D+a} = \frac{M}{D^2},$$

welches Resultat mit dem oben erhaltenen übereinstimmt.

(2.) P ist ein innerer Punkt, d. h. es ist $D < a$. Die Integrationsgrenzen sind dann $a - D$ und $a + D$, und die Attraction ist

$$\frac{M}{4D^2}\left[\frac{x}{a} + \frac{a^2 - D^2}{ax}\right]_{a-D}^{a+D} = 0.$$

(b.) **Attraction einer gleichförmig belegten Kreisscheibe auf einen Punkt ihrer Axe.** — Ein nützlicher Fall ist der der Attraction, welche eine kreisförmige Platte von gleichförmiger Dichtigkeit auf einen in einer Geraden liegenden Punkt ausübt, welche durch den Mittelpunkt der Platte geht und zur Ebene derselben senkrecht ist.

Ist a der Radius der Platte, h ihr Abstand vom angezogenen Punkte und M ihre Masse, so ergibt sich leicht für die Attraction (deren Richtung offenbar senkrecht zur Platte ist) der Ausdruck

$$\frac{M}{a^2}\int_0^a \frac{2\,h\,r\,dr}{(h^2+r^2)^{3/2}} = \frac{2\,M}{a^2}\left\{1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right\}.$$

Bezeichnet ϱ die Flächen-Dichtigkeit der Platte, so geht dieser Ausdruck über in

$$2\,\pi\,\varrho\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right),$$

und für eine unendlich grosse Platte erhält man hieraus als Werth der Attraction

$$2\,\pi\,\varrho.$$

Aus der vorhergehenden Formel lassen sich leicht viele nützliche Resultate herleiten, so z. B. das folgende: —

(c.) **Attraction eines Cylinders auf einen Punkt seiner Axe.** — Ein gleichförmig mit Masse gefüllter Cylinder, dessen Länge l und dessen Basis ein Kreis vom Radius a ist, zieht einen Punkt, der in seiner Axe liegt und von der ihm am nächsten liegenden Grundfläche des Cylinders den Abstand x hat, mit einer Kraft

$$2\pi\varrho\int_x^{x+l}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right)dh = 2\pi\varrho\left\{l - \sqrt{(x+l)^2+a^2} + \sqrt{x^2+a^2}\right\}$$

an. Danach ist die Anziehung, wenn der Cylinder nach einer Richtung hin von unbegrenzter Länge ist,

$$2\,\pi\,\varrho\,(\sqrt{x^2+a^2} - x),$$

und wenn der angezogene Punkt im Mittelpunkt der Grundfläche des unendlich grossen Cylinders liegt (d. h. $x = 0$ ist),

$$2\,\pi\,\varrho\,a.$$

(d.) **Attraction eines geraden Kegels auf einen Punkt am Scheitel.** — Ein gerader Kegel habe die Länge l und am Scheitel den Winkel $2\,\alpha$. Ein in seinem Scheitel befindlicher materieller Punkt wird dann, wie sich aus (b.) leicht ergibt, mit einer Kraft

$$2\,\pi\,\varrho\,l\,(1 - \cos\alpha)$$

angezogen, welcher Ausdruck der Länge der Axe einfach proportional ist.

Es ist leicht, nöthigenfalls den natürlich weniger einfachen Ausdruck für die Attraction zu finden, welche ein beliebiger Punkt der Axe erfährt.

(e.) **Positive und negative Scheiben.** — Ein für magnetische und elektro-magnetische Anwendungen sehr nützlicher Fall ist folgender: —

Es sind zwei gleiche kreisförmige Scheiben gegeben, die zur Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht stehen. Ihre Massen (§ 461) sind entgegengesetzter Art, d. h. die eine übt eine abstossende, die andere eine anziehende Kraft aus. Man soll ihre Wirkung auf einen beliebigen Punkt jener Verbindungslinie bestimmen.

Ist a der Radius jeder Scheibe, ϱ die Masse, welche sich in der Flächeneinheit befindet, c der Abstand der Scheiben und x die Entfernung des angezogenen Punktes von der ihm zunächst liegenden Scheibe, so ist die Gesammtwirkung offenbar



$$2\pi\varrho\left\{\frac{x+c}{\sqrt{(x+c)^2+a^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right\}.$$

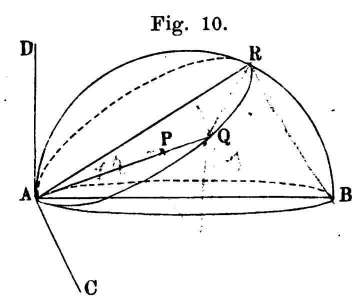
In dem besonderen Falle, in welchem c unbegrenzt abnimmt, geht dieser Ausdruck über in

$$2\pi\varrho c\,\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$$

478. Variation der Kraft beim Durchgang durch eine anziehende Oberfläche. — Es seien P und P' zwei zu beiden Seiten einer Oberfläche, über welche Materie vertheilt ist, einander unendlich nahe liegende Punkte. Die Dichtigkeit der Materie auf der Oberfläche in der Nähe dieser Punkte sei ϱ. Welches dann auch die resultirende Attraction R in P ist, die von der gesammten anziehenden Materie, mag dieselbe auf der Oberfläche oder sonst wo sich befinden, ausgeübt wird, die Resultante R' der auf P' wirkenden Kräfte ist die Resultante einer R gleichen und parallelen Kraft und einer Kraft, welche gleich $4\pi\varrho$ ist und in der Richtung der von P' an die Oberfläche gelegten Normale wirkt. Denn nehmen wir an, PP' sei senkrecht gegen die Oberfläche gerichtet, eine Voraussetzung, welche die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigt, und betrachten eine auf der Oberfläche liegende kreisförmige Scheibe, deren Mittelpunkt in PP' liegt und deren Radius unendlich klein im Vergleich zu den Krümmungsradien der Oberfläche, aber unendlich gross im Vergleich zu PP' ist, so wird diese Scheibe [§ 477, (b.)] P und P' mit entgegengesetzt gerichteten Kräften anziehen, deren jede gleich $2\pi\varrho$ ist und in der Linie PP' wirkt. Daraus ergibt sich die Richtigkeit des Satzes, der in der Theorie der Elektricität von grosser Bedeutung ist.

(a.) **Anziehung einer gleichförmig mit Masse gefüllten Halbkugel auf einen an ihrem Rande befindlichen materiellen Punkt.** Um ein weiteres Beispiel des directen analytischen Verfahrens zu geben, wollen wir die Componenten der Attraction bestimmen, welche eine gleichförmig mit Masse gefüllte Halbkugel auf einen an ihrem Rande befindlichen materiellen Punkt ausübt. Es sei A der materielle Punkt, AB ein Durchmesser der Basis, AC die in A an die Basis gelegte Tangente und AD senkrecht zu AC und AB. Ferner sei RQA ein von einer durch AC gehenden Ebene gebildeter Schnitt, AQ ein beliebiger Radius-Vector dieses Schnittes und P ein Punkt in AQ. Wird dann $AP = r$, $\measuredangle RAQ = \varphi$, $\measuredangle RAB = \vartheta$ gesetzt, so ist das Volumen eines in P liegenden Elementes offenbar

Fig. 10.



$$r\,d\varphi\,.\,r\cos\varphi\,d\vartheta\,.\,dr = r^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\vartheta\,dr.$$

Die Attraction, welche die in A befindliche Masseneinheit längs AC erfährt, ist offenbar Null. Längs AB ist dieselbe

$$\varrho \int\int\int \cos\varphi\,d\varphi\,d\vartheta\,dr\cos\varphi\cos\vartheta,$$

wenn dieses Integral zwischen den richtigen Grenzen genommen wird. Die Grenzen von r sind 0 und $2a\cos\vartheta\cos\varphi$, diejenigen von ϑ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$; endlich ist in Beziehung auf φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu integriren. Die Attraction längs AB ist daher gleich $\frac{2}{3}\pi\varrho a$.

Längs AD ist die Attraction

$$\varrho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\vartheta\cos\varphi}\cos\varphi\,d\varphi\,d\vartheta\,dr\cos\varphi\sin\vartheta = \frac{4}{3}\varrho a.$$

(b.) **Aenderung der geographischen Breite durch einen halbkugelförmigen Berg oder ein halbkugelförmiges Thal.** — Auf der Südseite der Basis eines halbkugelförmigen Berges vom Radius a und von der Dichtigkeit ϱ wird daher die wahre Breite (wie sie mittels der Bleischnur oder der Reflexion des Sternlichtes von einer Quecksilberfläche gemessen wird) durch die Attraction des Berges um den Winkel

$$\frac{\frac{2}{3}\pi\varrho a}{G - \frac{4}{3}\varrho a}$$

verringert, wo G die durch dieselben Einheiten ausgedrückte Anziehung der Erde ist. Ist also R der Radius und σ die mittlere Dichtigkeit der Erde, so ist dieser Winkel

$$\frac{\frac{2}{3}\pi\varrho a}{\frac{4}{3}\pi\sigma R - \frac{4}{3}\varrho a}, \text{ oder näherungsweise } \frac{1}{2}\,\frac{\varrho a}{\sigma R}.$$

Die Breiten zweier nördlich und südlich am Fusse des Berges liegenden Stationen sind mithin um $\frac{a}{R}\left(2 + \frac{\varrho}{\sigma}\right)$ verschieden, während ihr Unterschied $\frac{2a}{R}$ betragen würde, wenn der Berg entfernt würde.

Ebenso wird die Breite eines an der Südseite des Randes eines halbkugelförmigen Thals liegenden Ortes durch die Anwesenheit des Thals um $\frac{1}{2}\,\frac{\varrho a}{\sigma R}$ vergrössert, wo ϱ die Dichtigkeit der oberen Schichten des Thals ist.

479. Aenderung der Breite durch eine Schlucht. — Wir wollen noch ein merkwürdiges Beispiel der Classe von Fragen geben, die wir jetzt betrachtet haben. Eine sich von Osten nach

Westen hin erstreckende tiefe Schlucht vergrössert die Breite von Orten, die an ihrem Südrande liegen, (annähernd) um den Winkel $\frac{3}{4}\,\frac{\varrho\, a}{\sigma R}$, wo ϱ die Dichtigkeit der Erdkruste und a die Breite der Schlucht ist. So wird der Nordrand der Schlucht eine tiefere Breite als der Südrand haben, wenn $\frac{3}{2}\,\frac{\varrho}{\sigma} > 1$ ist, was der Fall sein könnte, da es Felsen giebt, deren Dichtigkeit $^2/_3 \times 5{,}5$ oder 3,67 mal so gross als die des Wassers ist. In einer beträchtlichen Tiefe in der Schlucht wird diese Aenderung der Breiten nahezu verdoppelt, und dann hat die Südseite die grössere Breite, wenn die Dichtigkeit der Kruste nicht weniger als 1,83 mal so gross als die des Wassers ist.

480. Anziehung einer aus concentrischen Schalen von gleichförmiger Dichtigkeit zusammengesetzten Kugel. — Es ist interessant und für spätere Anwendungen von Nutzen, als besonderen Fall die Anziehung einer aus concentrischen Schichten bestehenden Kugel zu betrachten, bei welcher jede Schicht von gleichförmiger Dichtigkeit ist.

Es sei R der Radius der Kugel und r der Radius einer beliebigen Schicht, welche die Dichtigkeit $\varrho = F(r)$ hat. Bezeichnet dann σ die mittlere Dichtigkeit, so ist

$$\frac{4}{3}\pi\sigma R^3 = 4\pi \int_0^R \varrho\, r^2\, dr,$$

und hieraus lässt sich σ bestimmen.

Für die Attraction G, welche die Kugel an ihrer Oberfläche auf einen in ihr liegenden Punkt P ausübt, erhält man

$$G = 2 \times \frac{2}{3}\pi\sigma R = \frac{4}{3}\pi\sigma R.$$

Ein Punkt, welcher den Abstand r vom Mittelpunkte hat, wird (§§ 462, 471) mit einer Kraft

$$\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r \varrho\, r^2\, dr$$

angezogen.

Wenn die Anziehung für alle Punkte innerhalb der Kugel dieselbe sein soll, so ist

$$\int_0^r \varrho\, r^2\, dr = \frac{G}{4\pi}\, r^2,$$

und hieraus ergibt sich als das erforderliche Dichtigkeitsgesetz

$$\varrho = F(r) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{G}{r} \cdot$$

Wenn die Dichtigkeit der oberen Schicht τ ist, so ist die Attraction in einer im Vergleich zum Radius kleinen Tiefe h

$$\frac{4}{3} \pi \sigma_1 (R - h) = G_1,$$

wo σ_1 die mittlere Dichtigkeit des Kerns ist, welcher übrig bleibt, wenn man eine Schicht von der Dicke h von der Kugel fortnimmt. Offenbar ist auch

$$\frac{4}{3} \pi \sigma_1 (R - h)^3 + 4\pi\tau (R - h)^2 h = \frac{4}{3} \pi \sigma R^3,$$

oder

$$G_1 (R - h)^2 + 4\pi\tau (R - h)^2 h = G R^2,$$

folglich

$$G_1 = G \left(1 + \frac{2h}{R}\right) - 4\pi\tau h.$$

Danach ist die Attraction in einer Tiefe h dieselbe wie an der Oberfläche, wenn

$$\frac{G}{R} = \frac{4}{3} \pi \sigma = 2\pi\tau$$

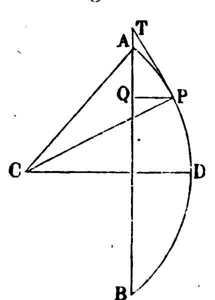
ist.

481. Wir fügen noch einige andere einfache Fälle hinzu, da ihre Resultate uns späterhin von Nutzen sein werden.

(a.) **Anziehung eines gleichförmig belegten Kreisbogens.** — Ein Kreisbogen AB von gleichförmiger Dichtigkeit zieht einen im Mittelpunkt C des Kreises liegenden materiellen Punkt mit einer Kraft an, deren Richtung offenbar mit der den Bogen halbirenden Geraden CD zusammenfällt. Auch ist die CD parallele Componente der Attraction, welche ein in P befindliches Element ausübt, gleich

$$\frac{\text{Masse des in } P \text{ liegenden Elementes}}{\overline{CD}^2} \cdot \cos PCD.$$

Fig. 11.



Nehmen wir nun an, die Sehne AB sei von derselben Dichtigkeit wie der Bogen, so können wir für das Product (Masse des in P liegenden Elementes $\times \cos PCD$) die Masse der Projection Q dieses Elementes auf AB setzen; denn wenn PT die in P an den Bogen gelegte Tangente ist, so ist $\measuredangle PTQ = \measuredangle PCD$.

Die längs CD wirkende Attraction ist daher

$$= \frac{\text{Summe der Projectionen der Elemente des Bogens}}{\overline{CD}^2}$$

$$= \frac{\varrho \,.\, AB}{\overline{CD}^2} \cdot$$

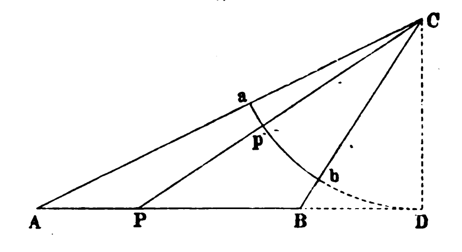
wenn ϱ die Dichtigkeit des gegebenen Bogens ist, oder endlich

$$= \frac{2\varrho \,.\, sin\ ACD}{CD}.$$

Die Attraction ist also gleich derjenigen einer im Punkte D concentrirten Masse, welche gleich der Masse ist, die die Sehne enthalten würde, wenn sie dieselbe Dichtigkeit wie der Bogen hätte.

(b.) **Anziehung einer geraden Linie.** — Weiter lässt sich zeigen, dass eine begrenzte gerade Linie von gleichförmiger Dichtigkeit einen beliebigen nicht in ihr liegenden Punkt in derselben Richtung und mit derselben Kraft anzieht, wie der entsprechende Bogen eines Kreises von gleicher Dichtigkeit, welcher den Punkt zum Mittelpunkt hat und die gerade Linie berührt.

Fig. 12.

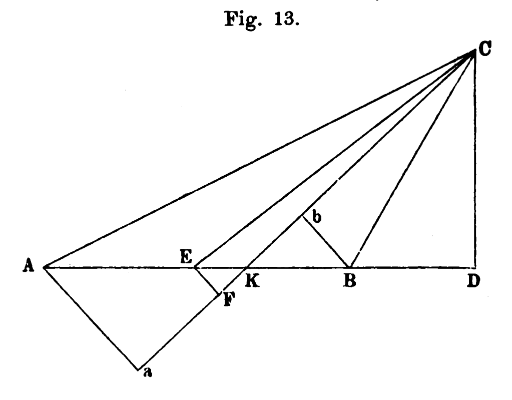


Ziehen wir nämlich die Gerade $Cp\,P$, welche den Kreis in p und die gegebene gerade Linie in P schneidet, so verhält sich das in p liegende Element zu dem in P befindlichen, wie Cp zu $CP \cdot \frac{CP}{CD}$, d. h. wie $\overline{Cp}^2$ zu $\overline{CP}^2$. Folglich ziehen diese Elemente den Punkt C mit gleicher Kraft und in derselben Richtung an, und die Attraction, welche die Gerade AB auf C ausübt, ist gleich der Attraction des Bogens ab auf denselben Punkt. Nach dem letzten Satze ist die Richtung, in welcher diese Attraction stattfindet, die Halbirungslinie des Winkels ACB und gleich

$$\frac{2\varrho}{CD} \cdot sin\ \frac{1}{2}\ ACB.$$

(c.) Man kann dies noch auf andere nützliche Formen bringen: — Es möge CKF den Winkel ACB halbiren und Aa, Bb, EF von den Enden und dem Mittelpunkte von AB auf CF senkrecht gezogen sein. Dann ist

Fig. 13.



$$sin\ KCB = \frac{KB}{CB}\ sin\ CKD = \frac{AB}{AC + CB}\ \frac{CD}{CK}.$$

Die Attraction, welche längs CK wirkt, ist folglich

$$(1) \qquad \frac{2\varrho AB}{(AC+CB)CK} = \frac{\varrho AB}{2(AC+CB)(\overline{AC+CB}^2-\overline{AB}^2)}\cdot CF.$$

Denn man hat offenbar

$$bK:Ka = BK:KA = BC:CA = bC:Ca,$$

d. h. ab ist aussen in C und innen in K in demselben Verhältniss getheilt. Daraus ergibt sich

$$KC.CF = aC.Cb = \frac{1}{4}\left\{\overline{AC+CB}^2 - \overline{AB}^2\right\},$$

und dies liefert die Formel (1).

(d.) CF ist offenbar die im Punkte C gezogene Tangente einer Hyperbel, welche durch C geht und A und B zu Brennpunkten hat. Wird also in einer beliebigen durch AB gehenden Ebene eine beliebige Hyperbel beschrieben, die A und B zu Brennpunkten hat, so wird sie in Beziehung auf die Attraction der Geraden AB eine Kraftlinie sein, d. h. eine Curve, welche in jedem Punkte die Richtung der Attraction anzeigt. Wir werden später auf diesen Begriff zurückkommen.

(e.) Wenn ebenso um A und B als Brennpunkte ein durch C gehendes verlängertes Sphäroid beschrieben wird, so ist CF offenbar die Normale in C; die auf den in C befindlichen materiellen Punkt wirkende Kraft ist also gegen das Sphäroid senkrecht gerichtet, und der Punkt würde somit auf der Oberfläche im Gleichgewicht bleiben, selbst wenn dieselbe glatt wäre. Es ist diese Oberfläche ein Beispiel der Flächen constanten Potentials, die auch Gleichgewichts- oder Niveauflächen genannt werden, und mit denen wir uns alsbald ausführlich beschäftigen werden.

(f.) Weiter können wir durch eine einfache Anwendung des vorhergehenden Satzes beweisen, dass die Kraftlinien für die Attraction zweier in den Verlängerungen von AB liegenden unendlich langen Stäbe, von denen der eine eine anziehende, der andere eine abstossende Wirkung ausübt, die Schaar der um die Enden A und B als Brennpunkte beschriebenen Ellipsen sind, während die Gleichgewichtsflächen durch die Rotation der confocalen Hyperbeln erzeugt werden.

482. Das Potential. — Da das Potential nicht nur in der Theorie der Gravitation, sondern auch in der Theorie der Elektricität, des Magnetismus, der Bewegung von Flüssigkeiten, der Wärmeleitung, u. s. w. von hervorragendster Bedeutung ist, so wollen wir seine wichtigsten Eigenschaften hier erforschen.

483. Laplace hat diese Function in die Theorie der Gravitation eingeführt. Den Namen Potential hat ihr aber zuerst Green gegeben, den man fast als den Schöpfer der Theorie, wie wir sie jetzt haben, ansehen kann. Green's Werk blieb bis 1846 unbeachtet, und so wurden die meisten der wichtigen Sätze, die es enthält, während dieser Zeit von Gauss, Chasles, Sturm und Thomson zum zweiten Male entdeckt.

Wir haben in § 273 die potentielle Energie eines conser-

vativen Systems für eine beliebige Configuration definirt. Wenn die in Frage stehenden Kräfte wirklich oder scheinbar fernwirkende sind, wie die Gravitation, die Anziehungen oder Abstossungen elektrischen oder magnetischen Ursprungs, so empfiehlt es sich im Allgemeinen, als die Configuration, in der man die potentielle Energie gleich Null rechnet, diejenige zu wählen, in welcher die betreffenden Körper sich in unendlichem Abstande von einander befinden. Wir gelangen dann zu folgender Definition: —

484. Die wechselseitige potentielle Energie zweier Körper, welche eine beliebige Lage relativ zu einander einnehmen, ist die Grösse der Arbeit, die man aus ihrer gegenseitigen Abstossung erlangen kann, wenn man ihnen gestattet, sich unendlich weit von einander zu entfernen. Wenn die Körper einander anziehen, wie es z. B. der Fall ist, wenn keine Kraft ausser der Gravitation wirkt, so ist nach der jetzt getroffenen Uebereinkunft hinsichtlich des Nullpunkts ihre wechselseitige potentielle Energie negativ, oder (§ 547) ihre Erschöpfung an potentieller Energie positiv.

485. Das Potential (in dieser Anwendung von Gauss die Potentialfunction genannt) eines beliebigen anziehenden oder abstossenden Körpers oder einer beliebig vertheilten Masse in einem Punkte ist die wechselseitige potentielle Energie dieser Masse und einer in diesem Punkte befindlichen Masseneinheit. Im Falle der Gravitation ist es zweckmässig, um das Potential nicht als eine negative Grösse definiren zu müssen, das Vorzeichen zu ändern. Das Gravitations-Potential einer Masse in einem Punkte ist danach die Grösse der Arbeit, die erfordert wird, um eine Masseneinheit aus jenem Punkte unendlich weit fortzubewegen.

486. Anwendung des Potentials zum Ausdruck einer Kraft. — Ist also V das Potential in einem beliebigen Punkte P und V_1 dasjenige in einem benachbarten Punkte Q, so folgt aus der obigen Definition unmittelbar, dass $V - V_1$ die Grösse der Arbeit ist, die erfordert wird, um eine unabhängige Masseneinheit von P nach Q zu bewegen. Es ist nützlich zu bemerken, dass $V - V_1$ von der Gestalt des zwischen diesen beiden Punkten gewählten Weges ganz und gar unabhängig ist; denn wir erhalten dadurch schon eine Vorstellung von der Herrschaft, welche uns diese Art der Darstellung über die betreffenden Begriffe verleiht.

Nehmen wir an, Q liege so nahe an P, dass die Kräfte, mit welcher eine in diesen Punkten, folglich auch in jedem Punkte der Linie PQ befindliche Masseneinheit angezogen wird, als gleich und parallel angesehen werden können. Stellt dann F die längs PQ

wirksame Componente der Attraction dar, so ist $F.PQ$ die Arbeit, die erfordert wird, um die Einheit der Masse von P nach Q zu bringen. Es ist also

$$V - V_1 = F.PQ,$$

oder

$$F = \frac{V - V_1}{PQ},$$

d. h. die nach irgend einer Richtung PQ genommene Componente der auf die in P befindliche Einheit der Masse ausgeübten Attraction ist die Zunahme des Potentials in P längs der Linie PQ, berechnet für die Längeneinheit.

487. **Oberflächen constanten Potentials.** — Eine Oberfläche, bei welcher das Potential in jedem Punkte denselben Werth hat, und die deshalb eine Oberfläche constanten Potentials genannt wird, hat die Eigenschaft, dass die Richtung der Attraction überall mit der Richtung der Normalen zusammenfällt. Denn längs der Oberfläche ändert sich der Werth des Potentials in keiner Richtung, und daher ist in keiner solchen Richtung eine Kraft thätig. Wenn also der angezogene Punkt auf eine solche Oberfläche gesetzt wird (die wir als glatt und starr voraussetzen), so wird er in jeder Lage in Ruhe bleiben; die Oberfläche wird daher auch wohl eine Gleichgewichtsoberfläche genannt. Wir werden später sehen, dass in einem Punkte der freien Oberfläche einer Flüssigkeit die Kraft immer die Richtung der Normalen hat; aus diesem Grunde gebraucht man statt der beiden angegebenen Ausdrücke oft auch den Ausdruck Niveau-Fläche.

488. **Intensität der Kraft in verschiedenen Punkten einer Oberfläche constanten Potentials.** — Wenn man für eine Reihe nahe aneinander liegender und gleich weit von einander entfernter Werthe des Potentials die zugehörige Schaar Gleichgewichtsflächen construirt, so erhellt aus § 486, dass die Attraction in jedem Punkte dem Normalabstande der beiden Oberflächen, zwischen denen der Punkt enthalten ist, umgekehrt proportional sein wird; denn der Zähler des Ausdrucks für F ist in diesem Falle constant.

489. **Kraftlinie.** — Eine von einem beliebigen Anfangspunkte aus gezogene Linie, deren Tangente in jedem Punkte dieselbe Richtung, wie die Attraction in diesem Punkte hat, wird eine Kraftlinie genannt; sie schneidet jede Oberfläche constanten Potentials, die sie trifft, offenbar unter rechten Winkeln.

Die Gültigkeit der drei letzten Paragraphen ist von dem Attractionsgesetz ganz unabhängig; im Folgenden dagegen beschränken

wir uns auf das Gesetz des umgekehrten Quadrates der Entfernung.

490. Variation der Intensität längs einer Kraftlinie. — Wenn durch jeden Punkt der Umgrenzung eines unendlich kleinen Theils einer Fläche constanten Potentials die entsprechenden Kraftlinien gezogen werden, so erhalten wir offenbar eine röhrenförmige Oberfläche von unendlich kleinem Schnitte. In jedem Punkte innerhalb einer solchen Röhre ist, so lange dieselbe durch keinen anziehende Masse enthaltenden Theil des Raumes führt, die nach einer beliebigen Richtung genommene Componente der Kraft umgekehrt proportional dem Durchschnitt der Röhre mit einer Ebene, welche durch den Punkt hindurchgeht und zu der gegebenen Richtung senkrecht ist. Oder einfacher, die ganze Kraft hat in jedem Punkte die Richtung der Tangente der Röhre und ist dem Querschnitt derselben umgekehrt proportional, und hieraus ergiebt sich, wie man leicht sieht, der obige allgemeinere Ausspruch.

Derselbe ist eine unmittelbare Folge eines wichtigen Satzes, den wir später (§ 492) beweisen werden. Das Flächenintegral der von einer beliebig vertheilten Materie in der Richtung der Normalen eines jeden Punktes irgend einer geschlossenen Fläche ausgeübten Attraction ist $4\pi M$; darin ist M die Grösse der innerhalb der Oberfläche befindlichen Masse, und die Attraction wird in jedem Punkte der Fläche als positiv oder als negativ angesehen, je nachdem sie daselbst nach innen oder nach aussen zu gerichtet ist.

Denn in dem vorliegenden Falle verschwindet die zu dem röhrenförmigen Theil der Oberfläche senkrechte Kraft, und wir brauchen nur die Enden zu betrachten. Wenn sich innerhalb des betrachteten Theils der Röhre keine der anziehenden Massen befindet, so erhalten wir leicht

$$F\varpi - F'\varpi' = 0,$$

wo F die Kraft in jedem Punkte des Schnittes bezeichnet, dessen Fläche ϖ ist. Diese Gleichung ist mit der berühmten Laplace'schen Gleichung [Anhang B (a) und unten § 491 (c)] äquivalent.

Wenn der anziehende Körper um einen Punkt herum symmetrisch ist, so sind die Kraftlinien offenbar von diesem Punkte ausgehende Geraden. Folglich ist die Röhre in diesem Falle ein Kegel und ϖ nach § 469 dem Quadrate des Abstandes vom Scheitel proportional. Für Punkte, welche ausserhalb der anziehenden Masse liegen, ist danach F dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional.

Wenn die Masse in unendlich langen cylindrischen Schichten symmetrisch um eine Axe vertheilt ist, so sind die Kraftlinien offenbar zur Axe senkrecht. Die Röhre wird also ein Keil, und da der Schnitt eines solchen dem Abstand von der Axe proportional ist, so ist die Attraction dem Abstand von der Axe umgekehrt proportional.

Wenn die Masse in unbegrenzte parallele Ebenen vertheilt ist, deren jede von gleichförmiger Dichtigkeit ist, so sind die Kraftlinien offenbar zu diesen Ebenen senkrecht; die Röhre wird also ein Cylinder, und da der Schnitt eines solchen von constanter Grösse ist, so ist die Kraft in allen Entfernungen dieselbe.

Wenn eine unendlich kleine Länge l des betrachteten Theils der Röhre durch eine Materie von der Dichtigkeit ϱ hindurchgeht, und ω die Fläche des Schnittes der Röhre in diesem Theile ist, so erhalten wir

$$F\varpi - F'\varpi' = 4\pi l \omega \varrho.$$

Dies ist der Poisson'schen Erweiterung der Laplace'schen Gleichung [§ 491 (c)] äquivalent.

491. Potential eines anziehenden Punktes. — Bei der Berechnung der Arbeit, welche gegen eine dem Quadrate des Abstandes von einem festen Punkte umgekehrt proportionale Kraft geleistet wird, hat man als die mittlere Kraft das geometrische Mittel der am Anfang und am Ende der Bahn wirkenden Kräfte anzusehen. Was den zweiten Factor des Ausdrucks für die Arbeit, die Grösse des Weges, betrifft, so ist dieselbe ganz unabhängig von der eingeschlagenen Bahn und einfach die Differenz der Abstände von dem anziehenden Punkte. Die auf irgend einer Bahn geleistete Arbeit ist danach gleich dem Product aus der Differenz der Abstände der Endpunkte von dem anziehenden Punkte in das geometrische Mittel der an den Endpunkten wirkenden Kräfte; oder wenn O der anziehende Punkt und m die Kraft ist, welche er auf eine in der Einheit der Entfernung befindliche Einheit der Masse ausübt, so ist die Arbeit, die er leistet, während er eine Masseneinheit aus einer beliebigen Lage P in eine beliebige andere Lage P' bewegt, gleich

$$(OP' - OP)\sqrt{\frac{m^2}{\overline{OP}^2 . \overline{OP'}^2}}, \text{ oder } \frac{m}{OP} - \frac{m}{OP'}.$$

Dies zu beweisen, hat man nur zu bemerken, dass für jeden unendlich kleinen Schritt der Bewegung der in Rede stehende Weg offenbar die Differenz der Abstände vom Mittelpunkt ist, und dass man für die arbeitende Kraft die Kraft an einem der beiden End-

punkte, oder auch einen beliebigen mittleren Werth, z. B. das geometrische Mittel nehmen kann. Der vorstehende Ausdruck ist also für jeden solchen Theil der Bewegung richtig, und wenn man, um die auf einer beliebigen Bahn von endlicher Grösse geleistete Gesammtarbeit zu bestimmen, alle den unendlich kleinen Theilen der Bewegung entsprechenden Ausdrücke der Arbeit summirt, so erkennt man die allgemeine Gültigkeit des gegebenen Ausdrucks.

Potential einer beliebigen Masse. — Mit Rücksicht hierauf folgt aus § 485, dass eine in O befindliche Masse m in P das Potential $\frac{m}{OP}$ hat, dass man also, um das Potential einer beliebigen Masse für den Punkt P zu erhalten, jedes Massentheilchen durch seinen Abstand von P zu dividiren und alle so erhaltenen Quotienten zu addiren hat.

Analytische Bestimmung des Werthes des Potentials. — (a.) Um diese Sätze analytisch zu beweisen, betrachten wir zuerst zwei materielle Punkte O und P, welche beziehungsweise die Massen m und Eins und die Coordinaten a, b, c; x, y, z haben. Ihr Abstand sei D, also

$$D^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Die Componenten ihrer wechselseitigen Anziehung sind

$$X = -m\frac{x-a}{D^3},\ Y = -m\frac{y-b}{D^3},\ Z = -m\frac{z-c}{D^3};$$

die Arbeit, die erfordert wird, um P ins Unendliche fortzurücken, ist daher

$$+ m\int\frac{(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz}{D^3}$$

$$= + m\int\frac{dD}{D^2},$$

oder, da die obere Grenze $D = \infty$ ist, gleich

$$+\frac{m}{D}.$$

In diesem Falle ist also die wechselseitige potentielle Energie das Product der Massen, dividirt durch ihre Entfernung von einander, und das Potential von m im Punkte x, y, z ist $\frac{m}{D}$.

Ist weiter mehr als ein fester materieller Punkt m vorhanden, so zeigt uns dieselbe Betrachtung, dass das Potential in x, y, z gleich

$$\Sigma\left(\frac{m}{D}\right)$$

ist; und wenn diese materiellen Punkte eine continuirliche Masse bilden, welche in a, b, c die Dichtigkeit ϱ hat, so erhalten wir für das Potential natürlich den Ausdruck

$$\iiint \varrho\,\frac{da\,db\,dc}{D};$$

die Grenzen dieses Integrals hängen von der Form der Masse ab.

Ausdruck der Kraftcomponenten. — Bezeichnet V das Potential in einem beliebigen Punkte P (x, y, z), so ergibt sich aus der Art, wie wir den Werth von V bestimmt haben, dass die Componenten der auf die Einheit der Materie in P ausgeübten Attraction folgende sind:

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz}.$$

Die längs einer beliebigen Curve, deren Bogen s ist, genommene Componente der Kraft ist demnach

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{dV}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}$$
$$= \frac{dV}{ds}.$$

Alle diese Ergebnisse sind offenbar ganz unabhängig von der Frage, ob P innerhalb der anziehenden Masse liegt oder nicht.

(b.) Wenn die anziehende Masse eine Kugel ist, welche den Mittelpunkt a, b, c und die Dichtigkeit ϱ hat, und wenn P innerhalb ihrer Oberfläche liegt, so erhalten wir, da die äussere Schale keine Wirkung ausübt,

$$X = \frac{dV}{dx} = -\frac{4}{3}\pi\varrho D^3 \cdot \frac{x-a}{D^3}$$
$$= -\frac{4}{3}\pi\varrho(x-a).$$

Hieraus folgt

$$\frac{dX}{dx} = \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{4}{3}\pi\varrho.$$

(c.) **Laplace's Gleichung. Poisson's Erweiterung derselben.** — Ist jetzt allgemein

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

so erhalten wir, wie oben [Anhang B (g), (14)] bewiesen wurde,

$$\nabla^2 \frac{1}{D} = 0.$$

Denn es ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{D}\right) = -\frac{x-a}{D^3}.$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{D}\right) = -\frac{1}{D^3} + \frac{3(x-a)^2}{D^5},$$

und hieraus und aus den ähnlichen Ausdrücken für die zweiten Differentialquotienten nach y und z folgt der Satz unmittelbar.

Da nun

$$V = \iiint \varrho \frac{da\,db\,dc}{D}$$

und ϱ von x, y, z unabhängig ist, so sehen wir, dass, so lange D nicht innerhalb der Integrationsgrenzen verschwindet, d. h. so lange P nicht ein Punkt der anziehenden Masse ist,

$$\nabla^2 V = 0,$$

oder, in Ausdrücken der Componenten der Kraft,

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

sein wird.

Wenn P innerhalb der anziehenden Masse liegt, so denken wir uns eine kleine Kugel so beschrieben, dass sie P in sich schliesst, und theilen das Potential in zwei Theile, dasjenige der Kugel, V_1, und dasjenige des übrigen Theils des Körpers, V_2. Dann zeigt uns der obige Ausdruck, dass

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

ist. Ferner liefern die Ausdrücke für $\frac{d^2 V}{dx^2}$, u. s. w., die wir im Falle einer Kugel (b) erhalten haben,

$$\nabla^2 V_1 = -4\pi\varrho,$$

wo ϱ die Dichtigkeit der Kugel ist.

Da nun

$$V = V_1 + V_2$$

ist, so ergibt sich

$$\nabla^2 V = -4\pi\varrho.$$

Dies ist die allgemeine Gleichung des Potentials; sie umfasst auch den Fall, in welchem P sich ganz ausserhalb der anziehenden Masse befindet, da dann $\varrho = 0$ ist. Führen wir in die Gleichung die Componenten der Kraft ein, so geht sie über in

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -4\pi\varrho.$$

(d.) Die vorhergehenden wichtigen Gleichungen liefern uns die Mittel, mehrere der früher erhaltenen Resultate zu bewahrheiten und einige neue hinzuzufügen.

Potential einer in concentrischen Kugelschalen von gleichförmiger Dichtigkeit vertheilten Masse. — Wir wollen z. B. die Attraction bestimmen, welche eine aus concentrischen Schichten, deren jede von gleichförmiger Dichtigkeit ist, bestehende Hohlkugel auf einen äusseren, d. h. der anziehenden Masse nicht angehörenden Punkt P ausübt. In diesem Falle muss V der Symmetrie wegen bloss von dem Abstande vom Mittelpunkt der Kugel abhängen. Dieser Mittelpunkt werde zum Coordinatenanfangspunkt genommen, und es sei

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Dann ist V nur eine Function von r, folglich

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}\frac{dV}{dr},$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{x^2}{r^3}\frac{dV}{dr} + \frac{x^2}{r^2}\frac{d^2 V}{dr^2},$$

und

$$\nabla^2 V = \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{d^2 V}{dr^2}.$$



Es ist also, wenn P ausserhalb der Kugel oder in der von ihr eingeschlossenen Höhlung liegt,

$$\frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{d^2 V}{dr^2} = 0.$$

Ein erstes Integral dieser Gleichung ist

$$r^2 \frac{dV}{dr} = C.$$

Für einen ausserhalb der Kugelschale liegenden Punkt hat C einen endlichen Werth und zwar, wie man leicht sieht, den Werth $-M$, wo M die Masse der Schale ist.

Für einen in der Höhlung liegenden Punkt ist $C = 0$; denn offenbar wird auf den Mittelpunkt keine Anziehung ausgeübt, d. h. im Mittelpunkt ist gleichzeitig $r = 0$ und $\frac{dV}{dr} = 0$; folglich ist für keinen Punkt der Höhlung Attraction vorhanden.

Die offenbare Discontinuität dieser Lösung darf uns nicht überraschen. Sie rührt aus der Discontinuität der gegebenen Massen-Vertheilung her. So geht aus § 491 (c) hervor, dass die richtige allgemeine Gleichung für das Potential nicht die oben genommene, sondern

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = -4\pi\varrho$$

ist; darin hat ϱ, die Dichtigkeit der Materie im Abstande r vom Mittelpunkt, den Werth Null, wenn r kleiner als der Radius a der Höhlung ist; einen endlichen Werth σ, den wir der Einfachheit wegen als constant ansehen wollen, wenn $r > a$ und zugleich $<$ als der Radius a' der äussersten Grenzfläche der Hohlkugel ist; endlich wieder den Werth Null für alle Werthe von r, die grösser als a' sind. Wir erhalten somit, wenn wir von $r = 0$ bis zu einem beliebigen Werthe $r = r$ integriren $\left(\text{da } r^2 \frac{dV}{dr} = 0, \text{ wenn } r = 0\right)$

$$r^2 \frac{dV}{dr} = -4\pi \int_0^r \varrho r^2 \, dr = -M_1,$$

wo M_1 die innerhalb der Kugelfläche vom Radius r befindliche Gesammtmasse bezeichnen möge. M_1 ist eine unstetige Function von r, und zwar ist

$$M_1 = 0 \qquad \text{von } r = 0 \text{ bis } r = a,$$

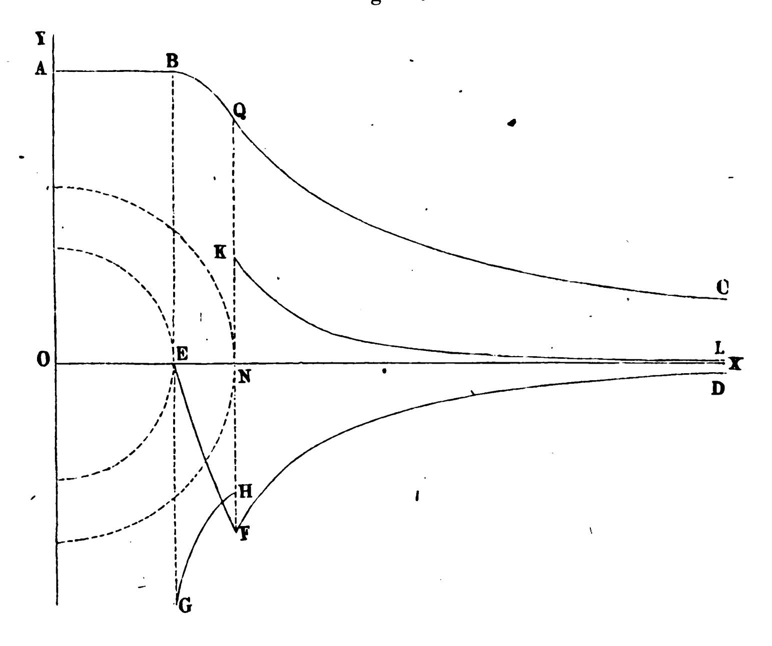
$$M_1 = \frac{4\pi\sigma}{3}(r^3 - a^3) \text{ von } r = a \text{ bis } r = a',$$

$$M_1 = \frac{4\pi\sigma}{3}(a'^3 - a^3) \text{ von } r = a' \text{ bis } r = \infty.$$

Wir haben diesen Fall so eingehend betrachtet, weil solche offenbare Anomalien in der analytischen Lösung physikalischer Fragen sehr gewöhnlich sind. Um die Sache noch deutlicher zu machen, fügen wir eine graphische Darstellung der Werthe von V, $\frac{dV}{dr}$, $\frac{d^2 V}{dr^2}$ für diesen Fall

bei. V wird durch die Curve $ABQC$ dargestellt, die von A bis B eine gerade Linie ist, in Q einen Inflexionspunkt hat, aber durchaus stetig ist und nie plötzlich die Richtung ändert. $\frac{dV}{dr}$ wird durch $OEFD$ dargestellt; es ist dies eine stetige Curve, die aber zweimal plötzlich ihre

Fig. 14.



Richtung ändert. Die Curve, welche $\frac{d^2V}{dr^2}$ darstellt, besteht aus drei nicht zusammenhängenden Theilen OE, GH, KL.

(e.) **Gerade Cylinder von gleichförmiger Dichtigkeit und unendlicher Länge, deren Axen zusammenfallen.** — Wenn eine Masse in unendlich lange concentrische Cylinderschichten vertheilt ist, deren jede eine gleichförmige Dichtigkeit hat, und wenn die Axe der Cylinder zur z-Axe genommen wird, so muss V offenbar nur eine Function von $x^2 + y^2$ sein.

Es ist daher $\frac{dV}{dz} = 0$, d. h. die Attraction ist ganz senkrecht zur Axe gerichtet.

Ferner ist auch $\frac{d^2V}{dz^2} = 0$, folglich nach (d)

$$\nabla^2 V = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = -4\pi\varrho.$$

Hieraus ergibt sich

$$r\frac{dV}{dr} = C - 4\pi\int \varrho r\,dr,$$

aus welcher Gleichung sich Schlüsse ziehen lassen, die den obigen ganz ähnlich sind.

(f.) **Unendlich grosse parallele Ebenen von gleichförmiger Dichtigkeit.** — Wenn endlich die Masse in unendliche parallele Ebenen vertheilt ist, deren jede von gleichförmiger Dichtigkeit und zur x-Axe senkrecht ist, so muss die resultirende Kraft dieser Richtung parallel, d. h. $Y = 0$, $Z = 0$, folglich

$$\frac{dX}{dx} = -4\pi\varrho$$

sein, welche Gleichung, wenn ϱ als Function von x gegeben ist, vollständig integrirt werden kann.

In einem Punkte, in welchem sich keine Masse befindet, ist $\varrho = 0$, folglich

$$X = C,$$

oder die Attraction ist in allen Abständen dieselbe, ein Resultat, das sich mittels der directen Methoden leicht bewahrheiten lässt.

Wenn die Masse aus einer unendlichen ebenen Schicht von der Dicke t und von der constanten Dichtigkeit ϱ besteht, so ist, vorausgesetzt dass der Anfangspunkt der Coordinaten in der Mitte zwischen den beiden Grenzflächen der Schicht angenommen wird,

$$X = C - 4\pi\varrho x,$$

so lange x zwischen $+\frac{t}{2}$ und $-\frac{t}{2}$ liegt. Für $x = 0$ muss aber offenbar $X = 0$ sein; folglich ist $C = 0$, also

$$X = -4\pi\varrho x.$$

Ausserhalb der Schicht ist $X = C_1$ (da dann $\varrho = 0$ ist). Auf der positiven Oberfläche und über dieselbe hinaus ist überall $C_1 = -2\pi\varrho t$, auf der negativen Fläche und über dieselbe hinaus $C_1 = +2\pi\varrho t$. Die Differenz dieser Werthe ist $-4\pi\varrho t$ (§ 478).

(g.) **Oberfläche constanten Potentials.** — Da in jedem Falle $\frac{dV}{ds}$ die nach der Richtung der Tangente des Bogens s genommene Componente der Attraction ist, so sehen wir, dass die Attraction ganz senkrecht zum Bogen ist, wenn man

$$\frac{dV}{ds} = 0$$

oder

$$V = C$$

hat. Es ist dies die Gleichung einer Fläche constanten Potentials.

Ist n die nach auswärts gemessene Normale einer solchen Fläche, so ist die in einem beliebigen Punkte wirkende Gesammtattraction offenbar

$$\frac{dV}{dn},$$

und ihre Richtung ist diejenige, in welcher V zunimmt.

492. Integral der Normalattraction über eine geschlossene Oberfläche. — Es sei S eine beliebige geschlossene Oberfläche und O ein innerer oder äusserer Punkt, in welchem sich eine Masse von der Grösse m befindet. Ferner sei N die Componente der Attraction von m, genommen für die Richtung der von einem beliebigen Punkte P von S nach innen zu gezogenen Normale. Bezeichnet dann $d\sigma$ ein Element von S und $\int\int$ eine sich über die ganze Oberfläche S erstreckende Integration, so ist

$$\int\int N d\sigma = 4\pi m, \text{ oder } = 0,$$

jenachdem der Punkt O innerhalb oder ausserhalb S liegt.

Fall 1. *O ist ein innerer Punkt.* Es sei $OP_1P_2P_3\ldots$ eine von O aus in irgend einer Richtung gezogene gerade Linie, welche S in P_1, P_2, P_3, u. s. w. schneidet, also aus S austritt in P_1, P_3, u. s. w. und in S eintritt in den Punkten P_2, P_4, u. s. w. Wir beschreiben eine Kegelfläche vermittels gerader Linien, die durch O gehen und sämmtlich $OP_1P_2\ldots$ unendlich nahe liegen; die Grösse der so gebildeten Kegelecke (§ 465) sei ω. Die Theile von $\int\int N d\sigma$, welche den durch den Kegel aus S herausgeschnittenen Elementen entsprechen, werden offenbar dieselbe absolute Grösse ωm haben, aber abwechselnd positiv und negativ sein. Da nun ihre Anzahl ungerade ist, so ist ihre Summe gleich $+\omega m$. Wird jetzt weiter für alle um O herumliegenden Kegelecken summirt (§ 466), so erhält man $4\pi m$, d. h. es ist

$$\int\int N d\sigma = 4\pi m.$$

Dieses Resultat ist der Poisson'schen Erweiterung der Laplace'schen Gleichung äquivalent.

Fall 2. *O ist ein äusserer Punkt.* Es werde von O aus eine gerade Linie $OP_1P_2P_3\ldots$ durch S gezogen, welche in P_1 in S eintritt, in P_2 wieder aus S austritt, u. s. w. Ziehen wir wieder eine Kegelfläche von einem unendlich kleinen körperlichen Winkel ω, so ist, wie im vorigen Falle, ωm der absolute Werth jedes Theils von $\int\int N d\sigma$, welcher einem der durch den Kegel aus S herausgeschnittenen Elemente entspricht. Diese Theile sind abwechselnd negativ und positiv, und da ihre Anzahl gerade ist, so ist ihre Summe Null. Es ist also in diesem Falle

$$\int\int N d\sigma = 0,$$

und dies ist wieder die Laplace'sche Gleichung.

Aus diesen Resultaten ergiebt sich unmittelbar, dass bei einer continuirlich vertheilten Masse, die zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb einer geschlossenen Oberfläche S liegt,

$$\int\int N d\sigma = 4\pi M$$

sein muss, wo M die Grösse der innerhalb S befindlichen Masse bezeichnet, während N und $d\sigma$ dieselbe Bedeutung wie oben haben.

Es ist dies nur ein besonderer Fall des in Cap. I. Anhang A (a) gegebenen analytischen Satzes. Für $\alpha = 1$ und $U' = 1$ lautet derselbe nämlich

$$0 = \int\int d\sigma\,\delta U - \int\int\int \nabla^2 U\,dx\,dy\,dz.$$

Ist nun U das Potential der in Rede stehenden Massenvertheilung im Punkte (x, y, z), so haben wir nach der Bedeutung von δ

$$\delta U = -N.$$

Ist ferner ϱ die Dichtigkeit der Materie in (x, y, z), so ist nach § 491 (c)

$$\nabla^2 U = -4\pi\varrho.$$

Die obige Gleichung liefert somit

$$\int\int N d\sigma = 4\pi \int\int\int \varrho\,dx\,dy\,dz = 4\pi M.$$

493. Der Werth des Potentials in einem freien Raum kann kein Maximum oder Minimum sein. — Daraus geht hervor, dass der Werth des Potentials in einem Punkte des freien Raumes nie ein Maximum oder Minimum sein kann. Denn wenn dies der Fall wäre, so könnte man um den Punkt und unendlich nahe demselben eine geschlossene Oberfläche beschreiben, und in jedem Punkte dieser Oberfläche müsste das Potential einen kleineren oder einen grösseren Werth als in jenem Punkte haben; N würde also für die Oberfläche überall negativ oder positiv sein, mithin $\int\int N d\sigma$ einen endlichen Werth haben, was unmöglich ist, da die Oberfläche keinen Theil der anziehenden Masse enthält.

494. Folgerungen. — Es leuchtet auch ein, dass N in einigen Theilen dieser Oberfläche positive, in anderen negative Werthe haben muss, ausser wenn es überall auf der Oberfläche Null ist. Wenn also das Potential im freien Raume um irgend einen Punkt herum nicht constant ist, so nimmt es in einigen Richtungen mit der Entfernung vom Punkte zu, in anderen ab; daher wird sich ein Massentheilchen, das an einen Punkt gebracht ist, in welchem die Kraft gleich Null, und das frei von jedem Zwange der Wirkung beliebiger anziehender Körper ausgesetzt ist, in instabilem Gleichgewichte befinden, ein Resultat, das wir Earnshaw*) verdanken.

*) Cambridge Phil. Trans., March 1839.

495. Wenn das Potential auf einer geschlossenen Oberfläche, die keinen Theil der anziehenden Masse enthält, überall constant ist, so hat es denselben constanten Werth überall im Innern der Fläche. Denn wenn dem nicht so wäre, so müsste es irgendwo im Innern einen grössten oder kleinsten Werth haben, was unmöglich ist.

496. Der Mittelwerth des Potentials über eine Kugelfläche ist gleich dem Potential im Centrum. — Das mittlere Potential über jede Kugelfläche, welches nur von ausserhalb derselben befindlichen Massen herrührt, ist gleich dem Potential in ihrem Mittelpunkt. Dieser Satz ist offenbar zuerst von Gauss gegeben. Siehe auch Cambridge Mathematical Journal, Feb. 1845 (vol. IV, p. 225). Er ist einer der elementarsten Sätze aus der Theorie der Anwendung der Kugelfunctionen auf das Potential, und zwar ergibt er sich dadurch, dass man die Formel (16) des Zusatzes B auf die Formeln des § 539 anwendet. Der Beweis, den wir jetzt folgen lassen, ist insofern von Interesse, als er von der Entwicklung nach harmonischen Functionen unabhängig ist.

In Cap. I, Zusatz B (a) sei S eine Kugelfläche vom Radius a und U das Potential im Punkte (x, y, z), welches aus der gesammten ausserhalb S befindlichen Masse herrührt. Ferner sei U' das Potential einer auf eine kleinere concentrische Kugelfläche gleichförmig vertheilten Masseneinheit, so dass ausserhalb der Fläche S und bis zu einem gewissen Abstande innerhalb derselben $U' = \frac{1}{r}$ ist. Endlich sei noch $a = 1$. Dann verwandelt sich das mittlere Glied der Formel (1) des Zusatzes A zum ersten Capitel in

$$\frac{1}{a}\int\int \delta U\, d\sigma - \int\int\int U' \nabla^2 U\, dx\, dy\, dz,$$

und dies ist gleich Null, da $\nabla^2 U$ für den ganzen inneren Raum Null ist und wir (§ 492) $\int\int \delta U\, d\sigma = 0$ haben. Wir müssen daher auch das dritte Glied gleich Null setzen und erhalten

$$\int\int d\sigma\, U \delta U' = \int\int\int U \nabla^2 U'\, dx\, dy\, dz.$$

An der Oberfläche S ist nun $\delta U' = -\frac{1}{a^2}$; für alle ausserhalb der Kugel S liegenden Punkte der Materie, aus welcher U' herrührt, ist $\nabla^2 U' = 0$; endlich ist, wenn ϱ' die Dichtigkeit der Materie bezeichnet, für alle inneren Punkte $\nabla^2 U' = -4\pi\varrho'$. Die vorhergehende Gleichung geht daher über in

$$\frac{1}{a^2}\int\int U\, d\sigma = 4\pi \int\int\int \varrho' U\, dx\, dy\, dz.$$

Wir lassen jetzt die Dichtigkeit ϱ' unbegrenzt zunehmen, folglich die Kugel, innerhalb welcher das dreifache Integral genommen werden muss,

unendlich klein werden. Bezeichnet U_0 den Werth von U im Mittelpunkt dieser Kugel, welcher auch der Mittelpunkt von S ist, so erhalten wir

$$\int\int\int \varrho' U\, dx\, dy\, dz = U_0 \int\int\int \varrho'\, dx\, dy\, dz = U_0.$$

Die Gleichung wird daher

$$\frac{\int\int U\, d\sigma}{4\pi a^2} = U_0,$$

was zu beweisen war.

497. Satz von Gauss. — Ein sehr bemerkenswerther von Gauss gefundener Satz ist folgender: — Wenn das Potential irgend welcher Massen durch das ganze Innere irgend eines begrenzten und keine Masse enthaltenden Raumes K einen constanten Werth V hat, so ist es auch gleich V in jedem anderen Theile des Raumes, zu dem man auf irgend einem Wege gelangen kann, ohne durch eine jener Massen zu gehen. Wäre nämlich das Potential in einem an K anstossenden Raume von V verschieden, so müsste es (§ 495) in einigen Theilen grösser, in anderen kleiner sein.

Wir könnten dann von einem innerhalb K und in der Nähe einer Stelle, in welcher das Potential grösser als V ist, liegenden Punkte C als Mittelpunkt eine Kugelfläche beschreiben, die nicht so gross ist, dass sie einen Theil einer der anziehenden Massen enthielte, noch dass sie von den ausserhalb K befindlichen Raumtheilen irgend einen umschlösse, in welchem das Potential nicht grösser als V wäre. Das ist aber unzulässig, da wir eben (§ 497) gesehen haben, dass der Mittelwerth des Potentials über die Kugelfläche hin V sein muss. Mithin ist die Voraussetzung, dass das Potential in einigen mit K in Verbindung stehenden und keine Masse enthaltenden Stellen grösser, in anderen kleiner als V sei, falsch.

498. Auf ähnliche Weise sehen wir, dass wenn das Potential in einem Falle der Symmetrie um eine Axe in einer gewissen endlichen, wenn auch noch so kurzen Strecke längs der Axe constant ist, es durch den ganzen Raum constant ist, zu dem man von diesem Theil der Axe aus gelangen kann, ohne eine der Massen zu treffen (s. § 546 unten).

499. Green's Problem. — Es sei S ein endlicher Theil einer Oberfläche, oder eine vollständige geschlossene oder eine unendlich ausgedehnte Oberfläche und E ein auf S beliebig angenommener Punkt. Dann ist es erstens möglich, Materie so über S hin zu vertheilen, dass das Potential überall auf S gleich einer willkürlichen Function $F(E)$ der Lage von E ist, und zwar giebt es zweitens nur eine Stoffmenge und nur eine Vertheilung derselben, welche dieser Bedingung genügen können.

In Cap. I, Zusatz A (b), (e), u. s. w. sei $\alpha = 1$. Aus (e) sehen wir, dass es für alle nicht zu S gehörenden Punkte eine und nur eine Lösung der Gleichung

$$\nabla^2 U = 0$$

giebt, welche der Bedingung genügt, dass U überall auf S einen willkürlich gegebenen Werth habe. Wir bezeichnen die Lösung dieses Problems wieder mit U und betrachten zunächst den Fall, in welchem S eine offene Schale, d. h. ein endlicher Theil einer gekrümmten Oberfläche ist (eine Ebene ist darin natürlich als ein besonderer Fall enthalten). In Cap. I. A (a) sei U' das Potential für den Punkt (x, y, z), welches aus einer Masse herrührt, die in jedem Punkte Q die Dichtigkeit $\varpi(Q)$ hat. Die dreifache Integration erstrecke sich durch den unendlichen Raum, mit Ausnahme der unendlich dünnen Schale S. In der in [A. (a)] angestellten Untersuchung war das dreifache Integral zwar nur innerhalb des von einer geschlossenen Oberfläche umgebenen endlichen Raumes zu nehmen; das dort angewandte Verfahren zeigt aber, dass wir jetzt, statt des zweiten und dritten Gliedes der Formel (1) der obigen Entwicklung, die folgenden gleichen Ausdrücke haben: —

$$\int\int d\sigma\, U' \{[\delta U] - (\delta U)\} - \int\int\int dx\, dy\, dz\, U' \nabla^2 U$$
$$= \int\int d\sigma\, U \{[\delta U'] - (\delta U')\} - \int\int\int dx\, dy\, dz\, U \nabla^2 U';$$

darin bezeichnet $[\delta U]$ die Grösse der Variation, welche U auf einer Seite von S, am Anfang einer vom Punkte E auslaufenden und zu S normalen Linie erfährt, genommen für die Längeneinheit; (δU) bezeichnet die Grösse der Variation, welche U auf der anderen Seite von S erfährt, am Ende einer normal zu S gegen E hin verlaufenden Linie, ebenfalls genommen für die Längeneinheit; entsprechende Bedeutungen haben $[\delta U']$, $(\delta U')$. Wir setzen jetzt voraus, die Masse, deren Potential U' ist, sei nicht in endlichen Mengen in irgend welchen endlichen Theilen von S verdichtet; dann wird

$$[\delta U'] = (\delta U')$$

sein, und die U und U' definirenden Bedingungen liefern für den ganzen Raum, innerhalb dessen das dreifache Integral zu nehmen ist,

$$\nabla^2 U = 0, \quad \nabla^2 U' = -4\pi\varpi;$$

ϖ bezeichnet den Werth von $\varpi(Q)$, wenn Q der Punkt (x, y, z) ist. Die vorhergehende Gleichung geht daher über in

$$\int\int d\sigma\, U' \{[\delta U] - (\delta U)\} = 4\pi \int\int\int dx\, dy\, dz\, \varpi\, U.$$

Es sei jetzt die Masse, deren Potential U' ist, gleich der Masseneinheit und auf einen unendlich kleinen Raum um einen Punkt Q herum beschränkt. Wir erhalten dann

$$U' = \frac{1}{EQ}$$

$$\int\int\int dx\, dy\, dz\, \varpi\, U = U(Q) \int\int\int \varpi\, dx\, dy\, dz = U(Q),$$

wenn $U(Q)$ den Werth bezeichnet, welchen die Function U im Punkte Q hat. Die Gleichung wird somit

$$(1)\qquad \int\int \frac{[\delta U]-(\delta U)}{EQ}\,d\sigma = 4\pi U(Q).$$

Folglich hat eine über S vertheilte Masse, deren Dichtigkeit im Punkte E

$$(2)\qquad \frac{1}{4\pi}\{[\delta U]-(\delta U)\}$$

ist, das Potential U für den Punkt (x, y, z). Wir schliessen daraus, dass es möglich ist, eine, aber auch nur eine Art der Vertheilung einer Masse über S zu finden, welche ein beliebig gegebenes Potential für die ganze Oberfläche S erzeugt, und wenn U bereits so bestimmt ist, dass die oben gestellten Bedingungen erfüllt werden, so stellt der Ausdruck (2) die Lösung dieses Problems dar.

Die Schlüsse, deren wir uns bedient haben, bleiben offenbar gültig, auch wenn S eine beliebige endliche geschlossene Oberfläche, oder eine beliebige Gruppe offener oder geschlossener Oberflächen, oder eine unendliche Oberfläche ist. Es muss dann die in der Untersuchung angewandte dreifache Integration einzeln für alle Raumtheile ausgeführt werden, welche durch S oder durch Theile von S von einander getrennt sind.

Wenn die Lösung ϱ des Problems für alle die Fälle gefunden worden ist, wo die willkürliche Function das Potential einer in irgend einem nicht zu S gehörenden Punkte P befindlichen Masseneinheit für die innerhalb S liegenden Punkte ist, d. h. für den Fall $F(E) = \frac{1}{EP}$, so lässt sich daraus, wie Green gezeigt hat, der Werth von U für den Punkt P bei willkürlicher Wahl der Function $F(E)$ durch die folgende Formel herleiten: —

$$(3)\qquad U = \int\int \varrho F(E)\,d\sigma.$$

Der Beweis ist leicht: Es bezeichne für einen Augenblick ${}_{,}\varrho$ die zur Erzeugung von U erforderte Flächendichtigkeit. Ist dann ${}_{,}\varrho'$ der Werth von ${}_{,}\varrho$ für irgend ein anderes Element E' von S, so erhalten wir

$$F(E) = \int\int \frac{{}_{,}\varrho'\,d\sigma'}{E'E}.$$

Das vorhergehende Doppelintegral verwandelt sich also in

$$\int\int d\sigma\,\varrho \int\int d\sigma'\,\frac{{}_{,}\varrho'}{E'E},$$

oder in

$$\int\int d\sigma'\,{}_{,}\varrho' \int\int d\sigma\,\frac{\varrho}{E'E}.$$

Nach der Definition von ϱ ist aber

$$\int\int d\sigma\,\frac{\varrho}{E'E} = \frac{1}{E'P};$$

der vorige Ausdruck, der mit Rücksicht hierauf in

$$\int\int d\sigma'\,\frac{{}_{,}\varrho'}{E'P}$$

übergeht, ist folglich, nach der Definition von ${}_{,}\varrho$, gleich U.

Der Ausdruck (46) des Zusatzes (B), aus welchem wir die Entwicklung einer willkürlichen Function in eine Reihe harmonischer Kugelfunc-

tionen herleiteten, ist ein besonderer Fall des jetzt bewiesenen allgemeinen Resultats (3).

500. Die Wirkungen innerhalb und ausserhalb eines geschlossenen Theils der Oberfläche sind von einander unabhängig. — Es verdient hervorgehoben zu werden, dass, wenn S zum Theil aus einer geschlossenen Oberfläche Q besteht, die Bestimmung von U innerhalb Q unabhängig ist von denjenigen Theilen von S, die etwa noch ausserhalb Q liegen sollten; umgekehrt ist die Bestimmung von U für den Raum ausserhalb Q unabhängig von den etwa noch vorhandenen Theilen von S, die innerhalb des Theils Q liegen. Oder wenn S zum Theil aus einer Oberfläche Q besteht, welche sich nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstreckt, so ist die Bestimmung von U für den ganzen auf einer Seite von Q liegenden Raum unabhängig von den etwa vorhandenen Theilen von S, welche auf der anderen Seite liegen. Dies ergibt sich aus der vorhergehenden Untersuchung, wenn man darin die dreifache Integration auf einen der beiden Raumtheile beschränkt, welche durch Q vollständig von einander getrennt werden.

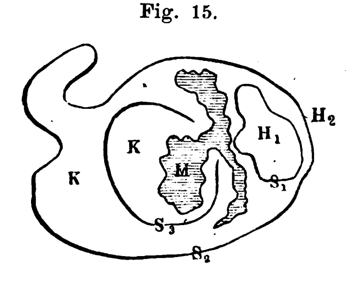
501. Anwendung des Green'schen Problems auf eine gegebene Elektricitätsmenge M, welche auf eine Gruppe S leitender Oberflächen einwirkt. — Eine andere Bemerkung von äusserster Wichtigkeit ist folgende: — Ist $F(E)$ das Potential einer beliebig vertheilten Masse M für den Punkt E und die Oberfläche S so beschaffen, dass sie irgend einen Raumtheil H, der seinerseits aus mehreren nicht zusammenhängenden Theilen bestehen kann, vollständig von dieser Masse trennt, dergestalt, dass es unmöglich ist, von irgend einem Theile von M nach H zu gelangen, ohne durch S hindurchzukommen, so ist der Werth von U in jedem Punkte von H das Potential von M.

Denn bezeichnet V dieses Potential, so ist in jedem Punkte von H $\nabla^2 V = 0$, und in jedem Punkte der Umgrenzung von H ist $V = F(E)$. Wenden wir also den Satz des I. Cap. Zusatz A. (c), statt auf S, auf H allein und auf die Umgrenzung dieses Raumes allein an, so sehen wir, dass V in diesem Raume den für U vorgeschriebenen Bedingungen genügt; in diesem Raume ist daher $U = V$.

502. Wenn z. B., wie in der Figur 15 S aus drei getrennten Oberflächen S_1, S_2, S_3 besteht, von denen zwei, S_1, S_2, geschlossen sind, während S_3 eine offene Schale ist, und wenn $F(E)$ das Potential der Masse M für irgend einen Punkt E einer dieser Theile von S ist, so ist in jedem Punkte des von S_1 umschlossenen Raumes H_1, sowie des ausserhalb S_2 liegenden Raumes, den wir mit H_2 be-

zeichnen wollen, der Werth von U einfach das Potential von M. Der Werth, welchen U in dem übrigen Raume K hat, hängt natürlich von der Natur der zusammengesetzten Oberfläche S ab und ist ein Fall des allgemeinen Problems, dessen Lösung im Cap. I. Zusatz A als möglich und eindeutig bestimmt erwiesen wurde.

Fig. 15.



503. Das allgemeine Problem der elektrischen Influenz ist möglich und bestimmt. — Aus § 500 folgt der herrliche Satz: — Es ist möglich, eine, aber auch nur eine Vertheilung einer Masse über eine Oberfläche S zu finden, welche für jeden Punkt von S und für jeden Punkt des Raumes H, der durch S von einer beliebig gegebenen Masse M getrennt wird, dasselbe Potential wie diese Masse M erzeugt.

So ist es in Fig. 15 möglich, eine, aber auch nur eine Vertheilung einer Masse über S_1, S_2, S_3 zu finden, welche für jeden Punkt von S_3 und für jeden Punkt der Raumtheile H_1 und H_2 dasselbe Potential wie M erzeugt.

Gewöhnlich wird dieser Satz in folgender Form angegeben: — Es ist möglich, über irgend eine Oberfläche S, welche eine Masse M vollständig umschliesst, eine Masse so zu vertheilen, dass letztere für jeden Punkt ausserhalb M dasselbe Potential wie M habe. Dieser Satz scheint weniger umfassend als der vorhergehende zu sein; wenn man ihn aber gehörig mathematisch interpretirt, so erkennt man, dass er demselben äquivalent ist.

504. Simultane elektrische Wirkungen in Räumen, die durch unendlich dünne leitende Flächen von einander getrennt sind. — Wenn S aus mehreren geschlossenen oder unendlichen Oberflächen S_1, S_2, S_3 besteht, welche beziehungsweise gewisse isolirte Raumtheile H_1, H_2, H_3 von dem ganzen übrigen Raume H trennen, und wenn $F(E)$ das Potential der in H_1, H_2, H_3 liegenden Massen m_1, m_2, m_3 ist, so sind die aus S_1, S_2, S_3 herrührenden Theile von U im ganzen Raume H einzeln beziehungsweise gleich den Potentialen von m_1, m_2, m_3. Denn, wie wir eben gesehen haben, ist es möglich, eine und nur eine Vertheilung einer Masse über S_1 zu finden, welche für den ganzen Raum H, H_2, H_3, u. s. w. das Potential von m_1 erzeugt; ebenso kann man eine und nur eine

Vertheilung über S_2 ermitteln, welche für H, H_1, H_3, u. s w. das Potential von m_2 erzeugt, u. s. w. Diese Vertheilungen auf S_1, S_2, u. s. w. machen aber vereint eine Vertheilung aus, welche über

Fig. 16.

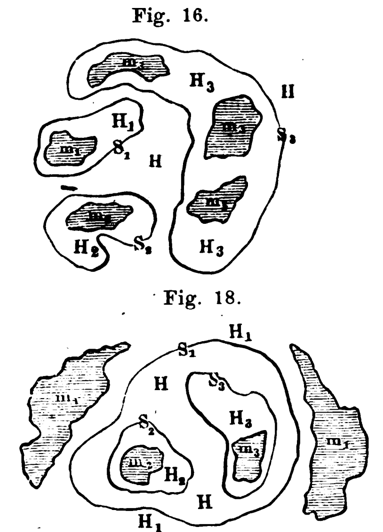


Fig. 17.

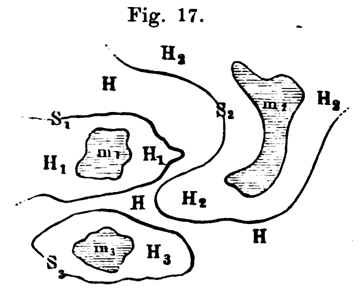


Fig. 18.

jeden Theil von S das Potential $F(E)$ erzeugt, und daher genügt die Summe der aus ihnen allen herrührenden Potentiale für jeden Punkt den für U gestellten Bedingungen. Dies ist daher eine, und zwar die einzige Lösung des Problems (§ 500).

505. Reducirbarer Fall des Green'schen Problems. — Indem wir immer noch den Fall betrachten, in welchem $F(E)$ das Potential einer gegebenen Masse M ist, nehmen wir an, S sei eine M umschliessende Oberfläche constanten Potentials oder eine Gruppe isolirter Oberflächen, welche alle Theile von M umschliessen, und deren jede für die ganze Masse M eine Fläche constanten Potentials ist. Das Potential der in der besprochenen Art über S vertheilten Masse wird für den ganzen äusseren Raum gleich demjenigen von M, und für jeden eingeschlossenen Raumtheil constant sein (§ 496). Die Resultante ihrer Attraction ist daher für alle äusseren Punkte gleich der Resultante der von M ausgeübten Attractionen und für alle inneren Punkte gleich Null. Daraus ist leicht zu ersehen, dass die Dichtigkeit der Masse, die über S vertheilt werden muss, damit $F(E)$ erzeugt werde, gleich $\frac{R}{4\pi}$ ist, wo R die Resultante der von M auf den Punkt E ausgeübten Kräfte bezeichnet.

Es ist $[\delta U] = -R$ und $(\delta U) = 0$. Hieraus ergibt sich nach § 500 (2) das Gesetz der Dichtigkeit.

506. Wenn M aus zwei Theilen m_1 und m' besteht, die durch eine Fläche S_1 constanten Potentials von einander getrennt sind,

und wenn S aus zwei Theilen S_1 und S' besteht, von denen der letztere den ersteren vollständig von m' trennt, so ersehen wir aus § 504, dass die über S_1 vertheilte Masse für den ganzen mit S' auf derselben Seite von S_1 liegenden Raum dasselbe Potential V_1 wie m_1 erzeugt, und dass die über S' vertheilte Masse für den ganzen mit S_1 auf derselben Seite von S' liegenden Raum dasselbe Potential V' wie m' erzeugt. Die Masse ist aber, wie wir voraussetzen, auf der ganzen Fläche S in einer solchen Weise vertheilt, dass auf S_1 und folglich auch in jedem Punkte innerhalb S_1 ein constantes Potential C_1 hervorgebracht wird. Das von S_1 allein herrührende innere Potential ist daher $C_1 - V'$.

Gehen wir also von den Potentialen zu den Attractionen über, so erkennen wir, dass die Resultante der Kräfte, mit welchen S_1 allein jeden auf der einen Seite liegenden Punkt anzieht, dieselbe ist, wie die Resultante der Attraction von m_1; auf der anderen Seite ist dieselbe gleich und entgegengesetzt derjenigen des übrigen Theils m' der ganzen Masse. Der directeste und einfachste vollständige Ausspruch dieses Resultats ist folgender: —

Wenn man weiss, dass in zwei Raumtheilen H, H', welche von einander durch eine geschlossene oder eine unendliche continuirliche Oberfläche S vollständig getrennt sind, sich zwei Massen m, m' befinden, welche in jedem Punkte von S gleiche und gleichgerichtete Tangentialkräfte erzeugen, so wird eine und dieselbe Vertheilung einer Masse über S die Kraft von m für jeden Punkt von H' und die Kraft von m' für jeden Punkt von H erzeugen. Die Dichtigkeit dieser Vertheilung ist gleich $\frac{R}{4\pi}$, wenn R die Resultante der von der einen Masse herrührenden Kraft und der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Kraft der anderen Masse bezeichnet. Die Richtung dieser Resultante ist in jedem Punkte E von S senkrecht zu S, da das Potential der einen Masse und der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen zweiten Masse über die ganze Oberfläche S constant ist.

507. Beispiele. — Als Green zuerst das in § 505 angegebene Resultat veröffentlichte, bemerkte er zugleich, dass dasselbe einen Weg zeigt, eine unendliche Menge geschlossener Oberflächen zu finden, für deren jede wir die Aufgabe lösen können, eine Massenvertheilung über dieselbe zu bestimmen, welche in jedem Punkte der Oberfläche und folglich auch in jedem Punkte des von derselben eingeschlossenen Raumes ein gegebenes gleichförmiges Potential erzeugt. So sei, um ein von Green selbst gegebenes Beispiel

anzuführen, M die Masse eines gleichförmigen Stabes AA'. Die Oberflächen constanten Potentials sind für diesen Körper, wie wir oben in § 481 gesehen haben, gestreckte Rotationsellipsoide, deren jedes die Punkte A und A' zu Brennpunkten hat, und die Resultante der auf C wirkenden Kräfte ist gleich

$$\frac{m}{l(l^2-a^2)} \cdot CF,$$

wenn die ganze Masse des Stabes mit m, die Länge desselben mit $2a$ und $A'C + AC$ mit $2l$ bezeichnet wird. Wir schliessen daraus, dass eine über die Oberfläche des Ellipsoides vertheilte Masse, welche im Punkte C die Dichtigkeit

$$\frac{1}{4\pi} \frac{m.CF}{l(l^2-a^2)}$$

hat, auf jeden äusseren Punkt mit derselben resultirenden Kraft, wie der Stab wirkt, und dass die Resultante der auf jeden beliebigen inneren Punkt wirkenden Kräfte Null, d. h. dass das Potential für jeden inneren Punkt constant ist. Es ist dies ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes über die Attraction ellipsoidischer Schichten, den wir unten in §§ 520, 521 beweisen werden.

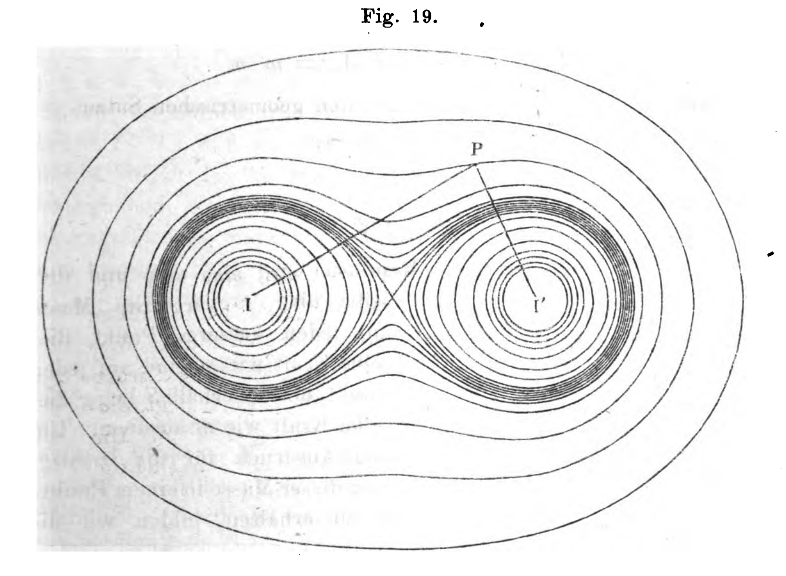
508. Wir wollen noch ein zweites Beispiel geben: M bestehe aus zwei gleichen Massenpunkten, die sich in den Punkten I, I' befinden. Wird die Masse jedes Punktes als Einheit angenommen, so ist das Potential im Punkte P gleich $\frac{1}{IP} + \frac{1}{I'P}$, folglich

$$\frac{1}{IP} + \frac{1}{I'P} = C$$

die Gleichung einer Oberfläche constanten Potentials; dabei wird vorausgesetzt, dass IP und $I'P$ keine negativen Werthe haben können, und dass man C einen beliebigen constanten positiven Werth beilegt. Nach dieser Gleichung sind die nebenstehenden Curven für die Werthe 10; 9; 8; 7; 6; 5; 4·5; 4·3; 4·2; 4·1; 4; 3·9; 3·8; 3·7; 3·5; 3; 2·5; 2 von C gezeichnet; II' ist dabei als Längeneinheit angenommen. Die entsprechenden Flächen constanten Potentials sind die Oberflächen, welche von diesen Curven gebildet werden, wenn man die ganze Figur um II' als Axe rotiren lässt. Wir sehen daraus, dass, wenn $C < 4$ ist, die Oberfläche constanten Potentials eine geschlossene Fläche ist. Fassen wir eine Fläche dieser Art ins Auge und bezeichnen die Resultante der beziehungs-

weise in den Richtungen PI und PI' wirkenden Kräfte $\frac{1}{\overline{IP}^2}$ und $\frac{1}{\overline{I'P}^2}$ mit R, so ist die Anziehung einer über die Fläche vertheilten

Fig. 19.



Masse, die im Punkte P die Dichtigkeit $\frac{R}{4\pi}$ hat, für jeden inneren Punkt Null und für jeden äusseren Punkt gleich der Anziehung, welche I und I' auf denselben Punkt ausüben.

509. Für jeden Werth von C, der grösser als 4 ist, besteht die Fläche constanten Potentials aus zwei getrennten Ovalen, die bei wachsendem C sich immer mehr der Form von Kugelflächen nähern (in der Figur sind die letzten drei oder vier Flächen nur noch sehr wenig von Kugelflächen verschieden); ihre Mittelpunkte liegen zwischen I und I' und kommen für grössere und grössere Werthe von C immer näher an diese Punkte zu liegen.

Betrachten wir eins dieser Ovale allein, etwa eine der I' umgebenden Oberflächen, und vertheilen über dieselbe eine Masse, welche im Punkte P wieder die Dichtigkeit $\frac{R}{4\pi}$ hat, so erhalten wir eine Schicht, welche (§ 507) auf jeden äusseren Punkt dieselbe Kraft wie I' und auf jeden inneren Punkt eine Kraft ausübt, welche derjenigen von I gleich und entgegengesetzt ist.

510. Elektrische Bilder. — Wir wollen noch ein Beispiel geben, welches in der Theorie der Elektricität von ausserordentlicher Bedeutung ist. Es bestehe M aus einer in einem Punkte I concentrirten positiven Masse m und einer in I' befindlichen negativen Masse $-m'$. Ferner sei S eine Kugelfläche, welche die Gerade II' und deren Verlängerung in Punkten A, A_1 schneidet, für welche

$$IA : AI' = IA_1 : I'A_1 = m : m'$$

ist. Dann hat man nach einem bekannten geometrischen Satze

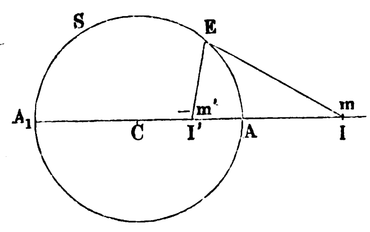
$$IE : I'E = m : m',$$

folglich

$$\frac{m}{IE} = \frac{m'}{I'E}.$$

Nach dem eben erhaltenen Resultate wird also eine und dieselbe über S vertheilte Masse auf jeden äusseren Punkt dieselbe Kraft wie m' und auf jeden Punkt, der innerhalb S liegt, dieselbe Kraft wie m ausüben. Um den Ausdruck für die Dichtigkeit dieser Masse in einem Punkte E zu erhalten, bilden wir die

Fig. 20.



Resultante der in der Richtung EI wirkenden Kraft $\frac{m}{\overline{IE}^2}$ und der in der Verlängerung von $I'E$ wirkenden Kraft $\frac{m'}{\overline{I'E}^2}$. Da diese Kräfte sich umgekehrt wie $IE : I'E$ verhalten (§ 256), so ist die Resultante gleich

$$\frac{m}{\overline{IE}^2 . I'E} II' \quad \text{oder} \quad \frac{m^2 . II'}{m'} \frac{1}{\overline{IE}^3};$$

wir schliessen daraus, dass die Schicht im Punkte E die Dichtigkeit

$$\frac{m^2 . II'}{4\pi m'} \frac{1}{\overline{IE}^3}$$

hat. Dass eine Schicht von dieser Beschaffenheit äussere Punkte ganz so anzieht, wie wenn ihre Masse in I' concentrirt wäre, und innere Punkte ganz wie eine gewisse in I concentrirte Masse, ist bereits oben im § 474 geometrisch bewiesen.

511. Wenn die Kugelfläche und einer der beiden Punkte I, I', etwa I, gegeben ist, so erhält man den anderen Punkt, indem man

$CI' = \frac{\overline{CA^2}}{CI}$ nimmt; für die in diesen Punkt zu setzende Masse ergibt sich

$$m' = m \frac{I'A}{AI} = m \frac{CA}{CI} = m \frac{CI'}{CA}.$$

Haben wir also eine beliebige Anzahl materieller Punkte m_1, m_2, u. s. w., welche sich ausserhalb S in den Punkten I_1, I_2, u. s. w. befinden, so können wir nach dem Vorigen entsprechende innere Punkte I'_1, I'_2, u. s. w. und Massen m'_1, m'_2, u. s. w. finden, und durch Addition der Ausdrücke für die Dichtigkeit in E, welche die vorhergehende Formel für jedes Punktepaar liefert, erhalten wir eine kugelförmige materielle Schicht, welche die Eigenschaft hat, auf jeden äusseren Punkt mit derselben Kraft wie $-m'_1$, $-m'_2$, u. s. w. und auf jeden inneren Punkt mit einer Kraft zu wirken, die derjenigen von m_1, m_2, u. s. w. gleich und entgegengesetzt ist.

512. Es möge eine unendliche Anzahl solcher Partikeln gegeben sein, welche eine continuirliche Masse M ausmachen; dann werden die entsprechenden inneren Partikeln natürlich eine continuirliche Masse $-M'$ von der entgegengesetzten Art Materie bilden, und der frühere Schluss wird seine Gültigkeit nicht verlieren. Wenn S die Oberfläche einer massiven oder hohlen Metallkugel ist, die mit der Erde durch einen dünnen Drath in Verbindung steht, und wenn M ein auf die Kugel einwirkender elektrisirter äusserer Körper ist, so ist die materielle Schicht, die wir bestimmt haben, eben die durch den Einfluss von M erregte und auf S vertheilte Elektricität; die in der oben angegebenen Art bestimmte Masse $-M'$ heisst das elektrische Bild von M in der Kugel, da die elektrische Wirkung in dem ganzen ausserhalb der Kugel befindlichen Raume unverändert bleiben würde, wenn man die Kugel entfernte und im Innern des von ihr eingenommenen Raumes die in angegebener Weise bestimmte Masse $-M'$ anbrächte. In der Elektricitätslehre werden wir auf diesen Gegenstand zurückkommen.

513. Transformation durch reciproke Radii Vectores. — Abgesehen von dieser besonderen Anwendung auf die Elektricitätslehre liefert diese Methode der Bilder eine bemerkenswerthe Art der Transformation, die oft von Nutzen ist. Sie führt nämlich zu der sogenannten Transformation durch reciproke Radii Vectores. Diese Transformation besteht darin, dass man für eine beliebige Anzahl von Punkten oder für eine beliebige Anzahl von Linien oder Flächen andere substituirt, die erhalten werden, wenn man von

einem gewissen festen Punkte oder Centrum aus Radien zu den gegebenen Punkten zieht, und auf diesen Radien Strecken abmisst, welche den Längen der Radien umgekehrt proportional sind. Aus der Elementargeometrie erkennen wir sofort, dass jede so erhaltene Linie den durch irgend einen ihrer Punkte gezogenen Radius Vector unter demselben Winkel und in derselben Ebene wie die Linie schneidet, von der sie hergeleitet wird. Folglich liefern zwei einander schneidende Linien oder Oberflächen zwei transformirte Linien oder Oberflächen, die einander unter dem nämlichen Winkel schneiden, und unendlich kleine Längen, Flächen und Volumina verwandeln sich in andere, deren Grössen sich beziehungsweise im Verhältniss der ersten, zweiten und dritten Potenz der Abstände der letzteren von dem festen Centrum zu denselben Potenzen der Abstände der ersteren von dem festen Centrum geändert haben. Die Längen, Flächen und Volumina in der transformirten Figur, welche einer Anzahl in verschiedenen Abständen vom Centrum beliebig gelegener gleicher unendlich kleiner Längen, Flächen und Volumina entsprechen, verhalten sich daher umgekehrt wie die Quadrate, die vierten Potenzen und die sechsten Potenzen dieser Abstände. Weiter lässt sich leicht darthun, dass sich eine gerade Linie und eine Ebene in einen Kreis und eine Kugelfläche transformiren, die beide durch das Centrum gehen, und dass allgemein Kreise und Kugeln sich in Kreise und Kugeln transformiren.

514. In der Theorie der Attraction ist auch die Transformation von Massen, Dichtigkeiten und Potentialen zu betrachten. Aus der Begründung der Methode (512) geht hervor, dass sich gleiche Massen von unendlich kleinen Dimensionen, die in verschiedenen Abständen vom Centrum liegen, in Massen transformiren, die sich umgekehrt wie diese Abstände oder direct wie die entsprechenden Abstände nach der Transformation verhalten. Folglich transformiren sich gleiche Dichtigkeiten von Linien, Flächen und Körpern, die in beliebigen Abständen vom festen Punkte gegeben sind, in Dichtigkeiten, die sich direct wie die erste, dritte und fünfte Potenz dieser Abstände oder umgekehrt wie dieselben Potenzen der Abstände der entsprechenden Punkte des transformirten Systems vom Centrum verhalten.

515. Zusammenfassung der erhaltenen Resultate. — Die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen lassen sich, soweit nur die Proportionen in Betracht kommen, passend folgendermaassen ausdrücken: —

Es sei P ein beliebiger Punkt einer geometrischen Figur oder

einer Massen-Vertheilung, O ein besonderer Punkt („das Centrum") und a eine besondere Länge (der Radius der „reflectirenden Kugel"). In OP nehmen wir einen P entsprechenden Punkt P' an, und für jeden unendlich kleinen Theil m der gegebenen Masse setzen wir eine Masse m'; dabei sollen P' und m' den Bedingungen

$$OP' = \frac{a^2}{OP}, \quad m' = \frac{a}{OP}\, m = \frac{OP'}{a}\, m$$

genügen. Bezeichnen dann

$$L,\ A,\ V,\ \varrho(L),\ \varrho(A),\ \varrho(V)$$

eine unendlich kleine Länge, Fläche, Volumen, lineare Dichtigkeit, Flächendichtigkeit, Volumendichtigkeit in der gegebenen Masse unendlich nahe an P oder in sonst einem Punkte, der von O denselben Abstand r wie P hat, und werden die entsprechenden Elemente in der transformirten Figur oder Massenvertheilung durch dieselben Symbole mit hinzugefügten Accenten bezeichnet, so ist

$$L' = \frac{a^2}{r^2} L = \frac{r'^2}{a^2} L;\ A' = \frac{a^4}{r^4} A = \frac{r'^4}{a^4} A;\ V' = \frac{a^6}{r^6}\, V = \frac{r'^6}{a^6}\, V.$$

$$\varrho'(L) = \frac{r}{a}\, \varrho(L) = \frac{a}{r'}\, \varrho(L);\ \varrho'(A) = \frac{r^3}{a^3}\, \varrho(A) = \frac{a^3}{r'^3}\, \varrho(A);$$

$$\varrho'(V) = \frac{r^5}{a^5}\, \varrho(V) = \frac{a^5}{r'^5}\, \varrho(V).$$

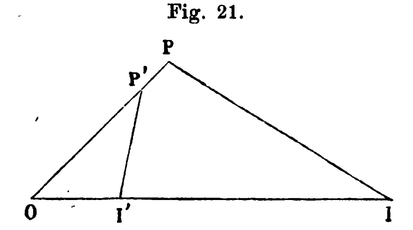
Der Nutzen dieser Transformation in der Theorie der Elektricität und der Attraction überhaupt beruht ganz und gar auf dem folgenden Satze: —

516. Anwendung auf das Potential. — Satz. — Bezeichnet φ das Potential der gegebenen Masse für den Punkt P und φ' das Potential der transformirten Masse für den Punkt P', so ist

$$\varphi' = \frac{r}{a}\, \varphi = \frac{a}{r'}\, \varphi.$$

In einem beliebigen Punkte I befinde sich ein beliebiger Theil m der gegebenen Masse, in dem entsprechenden Punkte I' der m entsprechende Theil m' der transformirten Masse. Dann hat man

Fig. 21.



$$a^2 = OI'.OI = OP'.OP,$$

folglich

$$OI : OP = OP' : OI'.$$

Diese Proportion zeigt, dass die Dreiecke IPO, $P'I'O$ ähnlich sind, dass also

$$IP : P'I' = \sqrt{OI.OP} : \sqrt{OP'.OI'} = OI.OP : a^2$$

ist. Ausserdem haben wir

$$m : m' = OI : a,$$

mithin

$$\frac{m}{IP} : \frac{m'}{I'P'} = a : OP.$$

Danach steht jeder Theil von φ zu dem entsprechenden Theile von φ' in dem constanten Verhältniss $a : r$; es muss also auch die Summe φ sich zur Summe φ' wie $a : r$ verhalten, und das hatten wir zu beweisen.

517. Anwendung auf eine über eine Kugelfläche vertheilte Masse. — Um ein Beispiel zu geben, wollen wir annehmen, die gegebene Masse sei auf eine Kugelfläche vertheilt, die O zum Mittelpunkt und a zum Radius hat. Die transformirte Masse ist dann dieselbe wie die gegebene; aber der von der Kugelfläche eingeschlossene Raum transformirt sich in den äusseren Raum. Ist also φ das Potential irgend einer Kugelschicht für einen innerhalb gelegenen Punkt P, so ist das Potential derselben Schicht für den in der Richtung von OP liegenden Punkt P', für welchen $OP' = \frac{a^2}{OP}$ ist, gleich $\frac{a}{OP'}\varphi$. (Wie wir alsbald sehen werden, ist dies ein elementarer Satz aus der Behandlung der Potentiale mittels harmonischer Kugelfunctionen.) So z. B. sei die Vertheilung der Masse eine gleichförmige. Da wir dann wissen, dass auf einen inneren Punkt keine Kraft wirkt, so muss φ constant sein; folglich ist das Potential für jeden äusseren Punkt P' dem Abstande dieses Punktes vom Centrum umgekehrt proportional.

Oder es sei die gegebene Masse eine gleichförmige Schale S und O irgend ein excentrischer oder irgend ein äusserer Punkt. Die transformirte Masse wird (§§ 513, 514) eine kugelförmige Schale S', deren Dichtigkeit umgekehrt wie der Kubus des Abstandes von O variirt. Liegt der Punkt O innerhalb S, so wird er auch von S' umschlossen, und der ganze Raum innerhalb S transformirt sich in den ganzen Raum ausserhalb S'. Folglich ist (§ 516) das Potential von S' für jeden ausserhalb S' liegenden Punkt dem Ab-

stand von O umgekehrt proportional; es ist daher gleich dem Potential einer gewissen in O concentrirten Quantität Materie. Wenn aber O ausserhalb S und folglich auch ausserhalb S' liegt, so transformirt sich der Raum innerhalb S in den Raum innerhalb S'. Das Potential von S' für einen inneren Punkt ist also dasselbe, wie das Potential einer gewissen in dem Punkte O, der jetzt ein äusserer Punkt ist, concentrirten Quantität Materie. Wir gelangen auf diese Weise, ohne uns der in §§ 499, 506 bewiesenen allgemeinen Sätze zu bedienen, wieder zu den Resultaten, die wir in § 510 aus diesen allgemeinen Sätzen folgerten, und die wir schon vorher (§§ 471, 474, 475) synthetisch bewiesen haben. Wir bemerken, dass jene synthetischen Beweise bloss aus Transformationen des Beweises bestehen, den Newton für den Satz gab, dass die auf einen Punkt innerhalb einer gleichförmigen Kugelschale ausgeübten Attractionen einander das Gleichgewicht halten. So ist der erste derselben (§ 471) das Bild dieses Newton'schen Satzes in einer concentrischen Kugelfläche; der zweite ist das Bild einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt ausserhalb der Schale oder innerhalb derselben (dann aber nicht in dem Mittelpunkt der Schale) liegt, jenachdem die Fig. 7 oder die Fig. 8 benutzt wird.

518. Bild einer gleichförmig dichten Vollkugel, entworfen von einer excentrischen Kugel. — Wir wollen jetzt nur noch eine Anwendung des Satzes des § 516 geben, werden denselben aber später in der Theorie der Elektricität vielfach zu benutzen haben.

Die gegebene Masse bilde eine gleichförmig dichte Vollkugel B, und der Punkt O liege ausserhalb derselben. Dann wird das transformirte System eine volle Kugel B' sein, deren Dichtigkeit sich umgekehrt wie die fünfte Potenz des Abstandes von dem ausserhalb B' liegenden Punkte O ändert. Das Potential von S für den ganzen äusseren Raum ist dasselbe, wie das Potential der im Mittelpunkte C von S concentrirten Masse m von S. Folglich ist das Potential von S' für den ganzen äusseren Raum dasselbe, wie das Potential der entsprechenden Masse, wenn diese in C', der transformirten Lage von C, concentrirt ist. Diese Masse ist natürlich gleich der Masse von B', und man kann leicht beweisen, dass C' die Lage des Bildes von O in der Kugelfläche von B' ist. Wir schliessen daraus, dass eine volle Kugel, deren Dichtigkeit sich umgekehrt wie die fünfte Potenz des Abstandes von einem äusseren Punkte O ändert, jeden äusseren Punkt ebenso anzieht, wie wenn ihre Masse in dem Bilde von O, was ihre Oberfläche entwirft, vereinigt wäre. Es ist leicht, dies durch directe Integration für Punkte der Axe zu

bewahrheiten; die allgemeine Wahrheit des Satzes folgt dann nach § 490.

519. Attraction eines Ellipsoides. — Die Bestimmung der Attraction eines Ellipsoides oder einer ellipsoidischen Schicht ist ein sehr interessantes Problem, und ihre Ergebnisse werden uns später, namentlich in der Theorie des Magnetismus, von grossem Nutzen sein. Wir haben mit der Behandlung dieses Gegenstandes bis jetzt gewartet, um die Eigenschaften des Potentials dabei benutzen zu können, die eine äusserst elegante Darstellung ermöglichen. Zunächst lassen wir einige wenige Definitionen und Hülfssätze folgen, die im Folgenden benutzt werden.

Correspondirende Punkte auf zwei confocalen Ellipsoiden sind solche, welche zusammenfallen, wenn eines der Ellipsoide durch eine reine Deformation mit dem anderen zur Deckung gebracht wird.

Es lässt sich leicht zeigen, dass, wenn P, Q zwei auf einer ellipsoidischen Schicht liegende Punkte und p, q die ihnen correspondirenden Punkte der zweiten Schicht sind, $Pq = Qp$ sein wird. Der Beweis ist folgender: —

Wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

und

$$\frac{x^2}{a^2+h} + \frac{y^2}{b^2+h} + \frac{z^2}{c^2+h} = 1 \tag{2}$$

die Gleichungen zweier beliebigen confocalen Ellipsoide sind, und $P\,[\xi, \eta, \zeta]$ ein Punkt von (1) ist, so ist

$$p\left[\frac{\sqrt{a^2+h}}{a}\,\xi,\ \frac{\sqrt{b^2+h}}{b}\,\eta,\ \frac{\sqrt{c^2+h}}{c}\,\zeta\right]$$

offenbar ein Punkt von (2) und zwar der P correspondirende Punkt. Sind ferner $Q\,[\xi', \eta', \zeta']$ und q zwei andere correspondirende Punkte, so ist

$$Pq^2 = \left(\xi - \frac{\sqrt{a^2+h}}{a}\,\xi'\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{b^2+h}}{b}\,\eta'\right)^2 + \left(\zeta - \frac{\sqrt{c^2+h}}{c}\,\zeta'\right)^2$$

$$Qp^2 = \left(\xi' - \frac{\sqrt{a^2+h}}{a}\,\xi\right)^2 + \left(\eta' - \frac{\sqrt{b^2+h}}{b}\,\eta\right)^2 + \left(\zeta' - \frac{\sqrt{c^2+h}}{c}\,\zeta\right)^2.$$

Es ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} Pq^2 - Qp^2 &= \left(\frac{a^2+h}{a^2} - 1\right)(\xi^2 - \xi'^2) + \cdots \\ &= h\left\{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{\xi'^2}{a^2} - \frac{\eta'^2}{b^2} - \frac{\zeta'^2}{c^2}\right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Eine Schale von der Art, wie wir sie am zweckmässigsten als Element eines homogenen Ellipsoides anwenden, wird von ähnlichen, ähnlich gelegenen und concentrischen ellipsoidischen Schichten begrenzt, und aus den Eigenschaften der reinen Deformation (§ 182) erhellt, dass eine solche Schale aus einer Kugelschale von gleichförmiger Dicke durch einfache Ausdehnungen und Zusammenziehungen in drei zu einander rechtwinkligen Richtungen erzeugt werden kann. Im Folgenden wird das Wort „Schale", wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich gesagt ist, immer eine unendlich dünne Schale dieser Art bezeichnen.

520. Da eine homogene Kugelschale nach § 462 keine Anziehung auf einen inneren Punkt ausübt, so übt auch eine von ähnlichen, ähnlich gelegenen und concentrischen Ellipsoiden begrenzte homogene Schale (die nicht unendlich dünn zu sein braucht) keine Anziehung auf einen inneren Punkt aus.

Denn nehmen wir an, die Kugelschale des § 462 werde durch einfache Ausdehnungen und Zusammenziehungen in drei zu einander senkrechten Richtungen in eine ellipsoidische Schicht transformirt. In diesem deformirten Zustande sind die Massen aller Theile im Verhältniss der Masse des Ellipsoides zu derjenigen der Kugel verringert oder vergrössert. Auch ist das Verhältniss der Linien HP, PK nach § 158 unverändert geblieben. Folglich ziehen die Elemente IH, KL den Punkt P noch mit gleicher Kraft an, und hieraus ergibt sich der Satz wie in § 462.

Danach ist das Potential im Innern der Schale constant.

521. **Vergleich der Potentiale zweier Schalen.** — Wenn zwei confocale Schalen (§ 519) gegeben sind, so verhält sich das Potential der ersteren für irgend einen Punkt P der Oberfläche der zweiten zu dem Potential der zweiten für den correspondirenden Punkt p der Oberfläche der ersteren, wie die Masse der ersteren zur Masse der zweiten Schale. Dieser schöne Satz ist von Chasles entdeckt worden.

Jedem Massenelement der äusseren Schale in Q entspricht ein Massenelement der inneren Schale in q. Das Verhältniss eines solchen Elements zur Gesammtmasse der entsprechenden Schale ist für beide Schalen dasselbe, und zwar gleich dem Verhältniss des correspondirenden Elements der Kugelschicht, aus welcher jede der beiden Schalen gebildet werden kann, zur ganzen Masse dieser Kugelschicht. Da nun $Pq = Qp$ ist, so gilt der Satz für die in Q und q liegenden correspondirenden Elemente, folglich auch für die ganzen Schalen.

Da das Potential einer Schale für einen inneren Punkt constant ist, und da von zwei confocalen Ellipsoiden das eine gänzlich innerhalb des anderen liegt, so ergibt sich auch, dass für jede solche Schale die äusseren Oberflächen constanten Potentials confocale Ellipsoide sind, und dass folglich die Attraction der Schale auf einen äusseren Punkt normal zu einem durch diesen Punkt gehenden confocalen Ellipsoide ist.

522. Attraction eines homogenen Ellipsoides. — Nun ist in § 478 gezeigt worden, dass die Attraction einer Schale auf einen ihrer Oberfläche nahe liegenden äusseren Punkt grösser ist, als die Attraction auf einen unendlich nahe liegenden inneren Punkt und zwar um die Grösse $4\pi\varrho$, wo ϱ die Flächendichtigkeit der Schale in jenem Punkte ist. Da nun (§ 520) ein innerer Punkt keine Attraction erleidet, so ist die Attraction einer Schale auf einen Punkt ihrer äusseren Oberfläche gleich $4\pi\varrho$ oder gleich $4\pi\varrho t$, wenn ϱ jetzt die Volumendichtigkeit und t die (unendlich kleine) Dicke der Schale bezeichnet, § 491 (f). Hieraus können wir unmittelbar die gesammte Attraction bestimmen, welche ein homogenes Ellipsoid auf einen äusseren materiellen Punkt ausübt.

Es seien a_0, b_0, c_0 die Axen des anziehenden Ellipsoides und $a = a_0\vartheta$, $b = b_0\vartheta$, $c = c_0\vartheta$ die Axen einer beliebigen ähnlichen, ähnlich gelegenen und concentrischen Oberfläche, welche innerhalb des Ellipsoides sich befindet, so dass ϑ ein echter Bruch ist. Wir betrachten eine Schale, welche von Oberflächen begrenzt wird, die beziehungsweise den Werthen ϑ und $\vartheta - d\vartheta$ entsprechen. Ihre Anziehung auf einen äusseren Punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$ verhält sich zu derjenigen einer Schale, deren Oberflächen mit den ersteren confocal sind, und deren äussere Oberfläche durch P geht, wie die Masse der ersteren Schale zu derjenigen der zweiten. Wenn A, B, C die Axen dieser ersteren Oberfläche sind, so haben wir

$$(1)\qquad \begin{cases} A^2 = a^2 + h = a_0^2\vartheta^2 + \vartheta^2\varphi^2 \\ B^2 = b^2 + h = b_0^2\vartheta^2 + \vartheta^2\varphi^2 \\ C^2 = c^2 + h = c_0^2\vartheta^2 + \vartheta^2\varphi^2, \end{cases}$$

wo φ eine neue Veränderliche ist, welche mit ϑ durch die Gleichung

$$(2)\qquad \frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} = 1,$$

oder

$$(3)\qquad \frac{\xi^2}{a_0^2 + \varphi^2} + \frac{\eta^2}{b_0^2 + \varphi^2} + \frac{\zeta^2}{c_0^2 + \varphi^2} = \vartheta^2$$

verbunden ist. Nun ist klar, dass, wenn $A - dA$, $B - dB$, $C - dC$ die Axen der inneren Oberfläche der neuen Schale sind,

$$\frac{dA}{A} = \frac{dB}{B} = \frac{dC}{C} = \frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c} = \frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

ist, und dass man, wenn ϖ die vom Mittelpunkt auf die durch P gehende Tangentialebene gezogene Senkrechte und t die Dicke der Schale in diesem Punkte P ist,

$$\frac{t}{\varpi} = \frac{dA}{A} = \frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

hat. Auch ist nach einem geometrischen Satze

$$\frac{1}{\varpi^2} = \frac{\xi^2}{A^4} + \frac{\eta^2}{B^4} + \frac{\zeta^2}{C^4}, \tag{4}$$

und die Richtungscosinus von ϖ sind

$$\frac{\varpi\xi}{A^2}, \ \frac{\varpi\eta}{B^2}, \ \frac{\varpi\zeta}{C^2}.$$

Die der x-Axe parallele Componente der Attraction der Schale $[\vartheta, \vartheta - d\vartheta]$ ist daher

$$4\pi\varrho \frac{a_0 b_0 c_0 \vartheta^3}{ABC} \varpi \frac{d\vartheta}{\vartheta} \frac{\varpi\xi}{A^2} = 4\pi\varrho a_0 b_0 c_0 \xi \frac{\varpi^2 \vartheta^2 d\vartheta}{A^3 BC}.$$

Um die ganze Attraction in dieser Richtung zu erhalten, haben wir nur diesen Ausdruck nach ϑ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 1$ zu integriren.

Die Integration lässt sich leichter ausführen, wenn wir φ zur unabhängig Veränderlichen machen. Durch Differentiation von (3) ergibt sich

$$-\frac{1}{\varpi^2}\varphi\, d\varphi = \frac{d\vartheta}{\vartheta^3},$$

und folglich ist die ganze Attraction

$$-4\pi\varrho a_0 b_0 c_0 \xi \int \frac{\vartheta^5 \varphi\, d\varphi}{A^3 BC}$$

$$= -2\pi\varrho a_0 b_0 c_0 \xi \int \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_0^2+\varphi^2)^3 (b_0^2+\varphi^2)(c_0^2+\varphi^2)}}.$$

Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus (3), wenn wir bedenken, dass nach ϑ zwischen 0 und 1 hätte integrirt werden müssen. Die neuen Grenzen sind offenbar ∞ und die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a_0^2+\varphi^2} + \frac{\eta^2}{b_0^2+\varphi^2} + \frac{\zeta^2}{c_0^2+\varphi^2} = 1.$$

Wird diese Wurzel α^2 genannt, so ist

$$\tfrac{3}{2} M\xi \int_{\alpha^2}^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_0^2+\varphi^2)^3 (b_0^2+\varphi^2)(c_0^2+\varphi^2)}} \tag{5}$$

die x-Componente der Attraction; darin bezeichnet M die Masse des Ellipsoides.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die drei Componenten der Attraction von dem e i n e n elliptischen Integrale

$$\Phi = \int_{\alpha^2}^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_0^2+\varphi^2)(b_0^2+\varphi^2)(c_0^2+\varphi^2)}}$$

abhängen, und zwar ist

$$X = -\, {}^3\!/_2\, M \xi \frac{d\Phi}{d(a_0^2)},$$

und in ähnlicher Weise werden Y und Z durch die beziehungsweise nach b_0^2 und c_0^2 genommenen partiellen Differentialquotienten von Φ ausgedrückt; α wird dabei als eine Constante behandelt. Wenn der angezogene Punkt auf der Oberfläche des Ellipsoides liegt, so hat man weiter keine Aenderung vorzunehmen, als $\alpha = 0$ zu setzen.

Attraction eines Rotationsellipsoides. — Wird $c_0 = b_0$ gesetzt, so verwandelt sich das Ellipsoid in ein Rotationsellipsoid, und man erhält für die der Axe parallele Componente der Attraction

$${}^3\!/_2\, M \xi \int_{\alpha^2}^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{(a_0^2 + \varphi^2)^{3/2}(b_0^2 + \varphi^2)},$$

wo α^2 die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a_0^2 + \alpha^2} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{b_0^2 + \alpha^2} = 1$$

ist.

Dies Integral lässt sich natürlich leicht in endlichen Ausdrücken angeben. Es genügt aber, wie wir alsbald sehen werden, seinen Werth für einen auf der Oberfläche liegenden Punkt zu bestimmen. Für einen solchen Punkt ist

$$X = {}^3\!/_2\, M \xi \int_0^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{(a_0^2 + \varphi^2)^{3/2}(b_0^2 + \varphi^2)}. \tag{6}$$

Um diesen Ausdruck für ein abgeplattetes Sphäroid in reellen endlichen Gliedern darzustellen, nehmen wir

$$b_0^2 = a_0^2 + b_0^2 e^2$$

an; dann geht das bestimmte Integral über in

$$\int_0^{\infty} \frac{d(\varphi^2 + a_0^2)}{(a_0^2 + \varphi^2)^{3/2}(a_0^2 + b_0^2 e^2 + \varphi^2)} = \int_{a_0^2}^{\infty} \frac{d(\omega^2)}{\omega^3 (b_0^2 e^2 + \omega^2)}$$

$$= \frac{2}{b_0^3 e^3}\left(\frac{b_0 e}{a_0} - arctan\, \frac{b_0 e}{a_0}\right).$$

Nun ist

$$M = {}^4\!/_3\, \pi \varrho\, b_0^3 \sqrt{1 - e^2},$$

folglich erhält man leicht

$$X = 4 \pi \varrho \xi \left(\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3}\, arcsin\, e\right). \tag{7}$$

Für eine der zur Axe senkrechten Componenten erhalten wir

$${}^3\!/_2\, M \eta \int_{\alpha^2}^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{(b_0^2 + \varphi^2)^2 \sqrt{a_0^2 + \varphi^2}},$$

und dieser Ausdruck verwandelt sich, wenn der Punkt auf der Oberfläche liegt, in

$$(8) \qquad Y = \tfrac{3}{2} M \eta \int_0^\infty \frac{d(\varphi^2)}{(b_0^2 + \varphi^2)^2 \sqrt{a_0^2 + \varphi^2}}.$$

Das bestimmte Integral lässt sich leicht auf

$$2 \int_{a_0}^\infty \frac{dz}{(b_0^2 e^2 + z^2)^2} = \frac{1}{b_0^3 e^3} \left(arctan \frac{b_0 e}{a_0} - \frac{a_0 e}{b_0} \right)$$

reduciren; folglich ist

$$(9) \qquad Y = 2 \pi \varrho \eta \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1 - e^2}{e^2} \right).$$

523. Der Maclaurin'sche Satz. — Aus den Ergebnissen der letzten Untersuchung können wir leicht den folgenden schönen Satz herleiten, der nach seinem Entdecker der Maclaurin'sche Satz genannt wird: —

Zwei homogene und confocale Ellipsoide üben auf irgend einen und denselben Punkt, der entweder ausserhalb beider oder ausserhalb des einen und auf der Oberfläche des zweiten Ellipsoides liegt, Anziehungen aus, welche die nämliche Richtung haben und sich wie die Massen der anziehenden Körper verhalten.

Die x-Componente ist, wie oben,

$$\tfrac{3}{2} M \xi \int_{\alpha^2}^\infty \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_0^2 + \varphi^2)^3 (b_0^2 + \varphi^2)(c_0^2 + \varphi^2)}},$$

wo α^2 die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a_0^2 + \varphi^2} + \frac{\eta^2}{b_0^2 + \varphi^2} + \frac{\zeta^2}{c_0^2 + \varphi^2} = 1$$

ist. Für ein confocales Ellipsoid sind die Axen

$$a_1^2 = a_0^2 + h, \quad b_1^2 = b_0^2 + h, \quad c_1^2 = c_0^2 + h,$$

und die x-Componente ist

$$\tfrac{3}{2} M_1 \xi \int_{\alpha_1^2}^\infty \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_1^2 + \varphi^2)^3 (b_1^2 + \varphi^2)(c_1^2 + \varphi^2)}},$$

wo α_1^2 die positive Wurzel von

$$\frac{\xi^2}{a_1^2 + \varphi^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2 + \varphi^2} + \frac{\zeta^2}{c_1^2 + \varphi^2} = 1$$

ist. Setzen wir in das erstere Integral und in die Gleichung, welche dessen Grenzen bestimmt, $h + \varphi^2$ statt φ^2 ein, so gelangen wir zum zweiten Integral und zur Gleichung für die Grenzen desselben. Folglich sind die Integrale einander gleich, und die entsprechenden Componenten der Attraction verhalten sich wie M zu M_1.

524. Der Ivory'sche Satz. — Auf ähnliche Weise können wir leicht den Ivory'schen Satz beweisen: —

Werden auf den Oberflächen zweier homogenen confocalen Ellipsoide E, e zwei correspondirende Punkte P, p angenommen, so verhält sich die x-Componente der von E auf p ausgeübten Attraction zu der x-Componente der Attraction von e auf P, wie die Fläche des Schnittes von E durch die Ebene der yz zu der Fläche des Schnittes von e durch dieselbe Ebene.

Die x-Componente der Anziehung der Masse M auf den Punkt ξ, η, ζ ist schon gegeben [§ 522 (5)]. Diejenige von M_1 auf $\frac{a_0}{a_1}\xi$, $\frac{b_0}{b_1}\eta$, $\frac{c_0}{c_1}\zeta$ ist

$$^3/_2\, M_1 \frac{a_0}{a_1} \xi \int_{\alpha_1^2}^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_1^2+\varphi^2)^3 (b_1^2+\varphi^2)(c_1^2+\varphi^2)}},$$

wo α_1^2 die positive Wurzel von

$$\frac{\xi^2}{a_1^2+\varphi^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2+\varphi^2} + \frac{\zeta^2}{c_1^2+\varphi^2} = 1$$

oder von

$$\frac{\xi^2}{a_0^2+h+\varphi^2} + \frac{\eta^2}{b_0^2+h+\varphi^2} + \frac{\zeta^2}{c_0^2+h+\varphi^2} = 1$$

ist. Nun sind die Integrale offenbar einander gleich, und die ganzen Ausdrücke verhalten sich wie M zu $M_1 \frac{a_0}{a_1}$, d. h. wie $b_0 c_0$ zu $b_1 c_1$.

Poisson hat gezeigt, dass dieser Satz für jedes beliebige Gesetz der Anziehung gilt. Man kann dies leicht dadurch beweisen, dass man in den allgemeinen Ausdrücken für die Componenten der Attraction irgend eines Körpers nach einer Integration die Eigenschaften der correspondirenden Punkte confocaler Ellipsoide (§ 519) benutzt.

525. Attractionsgesetz im Falle einer gleichförmig belegten Kugelschale, die keine Wirkung auf einen inneren Punkt ausübt. — Wir wollen eine von Duhamel herrührende geistreiche Anwendung des Ivory'schen Satzes nicht unerwähnt lassen. Concentrische Kugeln sind ein besonderer Fall confocaler Ellipsoide. Folglich verhält sich die Anziehung irgend einer Kugel auf einen Punkt der Oberfläche einer innerhalb der ersteren liegenden concentrischen Kugel zu der Anziehung, welche die zweite Kugel auf einen Punkt der Oberfläche der ersteren ausübt, wie das Quadrat des Radius der ersteren zum Quadrate des Radius der zweiten Kugel. Wenn nun das Attractionsgesetz ein solches sein

soll, dass eine homogene Kugelschale auf einen Punkt in ihrem Innern keine Anziehung ausübe, so kann man die Wirkung der grösseren Kugel auf den inneren Punkt durch diejenige der kleineren Kugel auf denselben Punkt ersetzen, und daraus ergibt sich leicht, dass die Wirkung einer Kugel auf äussere Punkte, die in beliebigen Entfernungen von ihrem Mittelpunkte liegen, im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate dieser Entfernungen steht. Da man nun die Kugel beliebig klein annehmen kann, so gilt dasselbe Gesetz auch für die Wirkung eines materiellen Punktes auf irgend welche Punkte. Wir erhalten also den zuerst von Cavendish ausgesprochenen Satz: —

Das einzige Anziehungsgesetz, für welches eine homogene Kugelschicht keine Wirkung auf die Punkte ihres Innern ausübt, ist das des umgekehrten Quadrates der Entfernung.

526. Attractionscentrum. (Definition.) — Wenn die Wirkung der terrestrischen oder einer anderen Schwerkraft auf einen starren Körper sich auf eine einzige Kraft reduciren lässt, deren Richtung immer durch einen in Beziehung auf den Körper festen Punkt geht, welche relative Lage der Körper auch zur Erde oder zu der anderen anziehenden Masse haben möge, so nennt man diesen Punkt das Attractionscentrum*) und den Körper selbst einen centrobarischen Körper.

527. Eins der überraschendsten Ergebnisse der wundervollen Green'schen Theorie des Potentials ist der Nachweis der Existenz centrobarischer Körper, und die Entdeckung der Eigenschaften derselben ist gewiss eine der merkwürdigsten und interessantesten von den verschiedenen Anwendungen dieser Theorie.

528. Eigenschaften der centrobarischen Körper. — Wenn ein Körper (B) in Beziehung auf irgend eine anziehende Masse (A) centrobarisch ist, so ist er auch in Beziehung auf jede andere Masse centrobarisch und zieht jede äussere Masse ganz so an, wie wenn seine eigene Masse in seinem Attractionscentrum vereinigt wäre**).

Es sei O irgend ein Punkt, der so weit von B entfernt ist, dass eine um ihn als Mittelpunkt beschriebene Kugel, die keinen Theil von B enthält, gross genug ist, die ganze Masse A zu um-

*) Die Verfasser brauchen hierfür den Namen „centre of gravity“, was nach bisherigem englischen Sprachgebrauche dem im Deutschen mit „Schwerpunkt“ bezeichneten Begriffe entsprach. Die Uebersetzer haben geglaubt, besser einen neuen Namen dafür einführen zu müssen, um nicht durch Umdeutung eines viel gebrauchten älteren Namens Verwirrung zu erregen.

**) Thomson, Proc. R. S. E., Feb. 1864.

schliessen. Wir denken uns, A sei in irgend eine solche Kugel gesetzt und rotire um eine beliebige durch O gehende Axe OK. Die Richtung der Anziehung, die A auf B ausübt, wird immer durch das Attractionscentrum G von B gehen. Wenn also jedes Massentheilchen von A gleichförmig über die Peripherie des Kreises vertheilt wird, den es bei dieser Rotation beschreibt, so wird die so erhaltene Masse den Körper B in einer gleichfalls durch G gehenden Richtung anziehen. Dies wird der Fall sein, wie auch immer diese Masse um O rotirt; denn bevor wir dieselbe erhielten, hätten wir A und OK in irgend einer Weise um O rotiren lassen können, ohne dabei die relative Lage von A und OK zu ändern. Wir haben also einen um eine Axe OK symmetrischen Körper A' gefunden, in Beziehung auf welchen B nothwendig centrobarisch ist. Es möge jetzt, während O fest bleibt, OK und der damit verbundene Körper A' successive in eine unendliche Anzahl n Lagen versetzt werden, welche gleichförmig um O vertheilt sind, d. h. welche so gewählt werden, dass in allen um O liegenden gleichen Kegelecken gleichviel Lagen von OK vorhanden sind. In jeder der Lagen, in welche der mit OK fest verbundene Körper A' auf diese Weise gelangt, möge $\frac{1}{n}$ seiner Masse zurückgelassen werden. Von der so vertheilten Masse A erleidet B immer noch eine Einwirkung, deren Richtung durch G geht. Da die Vertheilung jetzt aber um O herum nach allen Seiten hin symmetrisch ist, so besteht sie aus gleichförmigen concentrischen Schichten, und nach § 471 kann die Masse jeder Schicht in O concentrirt werden, ohne dass die Anziehung auf irgend ein Theilchen von B, also auch die ganze auf B ausgeübte Anziehung eine Aenderung erlitte. B ist danach in Beziehung auf eine in O befindliche Masse centrobarisch; es ist dies ein beliebiger Punkt, der (nach der oben gegebenen Bedingung) über eine gewisse Grenze hinaus sich B nicht nähern darf. Jeder Punkt, der diese Anforderung erfüllt, wird also von B in einer durch G gehenden Richtung angezogen, und somit sind über den Grenzabstand hinaus die Oberflächen constanten Potentials von B Kugelflächen, die zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt G haben. B zieht daher Punkte, welche über diese Entfernung hinausliegen, ganz so an, wie wenn seine Masse in G concentrirt wäre, und daraus folgt (§ 497), dass auch alle ausserhalb B liegenden Punkte in dieser Weise von B angezogen werden. Es wird also auch jede Punktgruppe oder jede beliebige ausserhalb B liegende Masse von B so angezogen, wie wenn die gesammte Masse von B sich im Punkte G befände.

529. Mit Rücksicht hierauf zeigen die §§ 497, 492 Folgendes: —

(a) Das Attractionscentrum eines centrobarischen Körpers liegt nothwendig in dessen Innern, oder, mit anderen Worten, kann von einem äusseren Punkte aus nur auf einem die Masse durchschneidenden Wege erreicht werden.

(b) Kein centrobarischer Körper kann aus Theilen bestehen, die so von einander getrennt sind, dass der Raum, welchen jeder einnimmt, für die anderen ein äusserer sei; mit anderen Worten: Die äussere Umgrenzung jedes centrobarischen Körpers ist eine einzige geschlossene Oberfläche.

Aus (a) erkennen wir, dass kein symmetrischer Ring oder hohler Cylinder mit offenen Enden ein Attractionscentrum haben kann; denn wenn ein solcher vorhanden wäre, so müsste er in der Axe, also ausserhalb der Masse des Körpers liegen.

530. Wenn eine beliebige Masse M und eine einzige sie vollständig umschliessende geschlossene Oberfläche S gegeben ist, so kann eine beliebig gegebene Masse M' so über S vertheilt werden, dass M und M' zusammen einen centrobarischen Körper ausmachen, dessen Attractionscentrum eine innerhalb der Oberfläche beliebig gegebene Lage G einnimmt.

Die Bedingung, die hier erfüllt werden muss, besteht darin, M' so über S zu vertheilen, dass dadurch für irgend einen Punkt E von S das Potential

$$\frac{M + M'}{EG} - V$$

erzeugt werde; V bezeichnet das Potential von M für diesen Punkt. Dass diese Aufgabe eine und nur eine Lösung hat, wurde schon oben (§ 499) bewiesen. Es ist aber zu bemerken, dass, wenn die gegebene Masse M' nicht gross genug ist, eine durch eine gleiche Menge negativer Masse neutralisirte zusätzliche Masse genommen werden muss, um die geforderte Vertheilung auf S auszuführen.

Der Fall, in welchem innerhalb S kein Körper M gegeben ist, verdient besonders hervorgehoben zu werden. Er liefert das folgende Resultat: —

531. Centrobarische Schichten. — Eine gegebene Stoffmenge lässt sich in einer, aber auch nur einer Weise so über eine beliebig gegebene geschlossene Oberfläche vertheilen, dass sie einen centrobarischen Körper bildet,

dessen Attractionscentrum ein innerhalb der Oberfläche beliebig gegebener Punkt ist.

So haben wir schon gesehen, dass, wenn die Oberfläche sphärisch ist, die Bedingung dadurch erfüllt wird, dass man die Dichtigkeit der dritten Potenz des Abstandes von dem gegebenen Punkte umgekehrt proportional macht. Aus dem, was oben in §§ 501, 506 bewiesen wurde, erhellt auch, dass aus jeder der beiden Hälften der Lemniskate in der Figur 19 des § 508 oder aus jedem der darin enthaltenen Ovale eine centrobarische Schicht hergestellt werden kann, wenn man darüber eine Masse ausbreitet, deren Dichtigkeit der Resultante der von m auf I und von m' auf I' ausgeübten Kräfte proportional ist; der eine dieser Punkte, der innerhalb der Schicht liegt, ist das Attractionscentrum derselben. Allgemein, wenn man die Flächen constanten Potentials für eine in einem Punkte I concentrirte Masse m und für eine beliebige andere Masse zieht, die den Punkt I nicht umgiebt, und sodann eine dieser Oberflächen nimmt, welche I, aber keinen anderen Theil der Masse umschliesst, so lehren uns Green's allgemeines Theorem und der specielle Satz des § 506, wie man über dieselbe eine Masse zu vertheilen hat, damit sie eine centrobarische Schicht mit dem Attractionscentrum I werde.

532. In der Hydrokinetik wird dasselbe Problem mittels convergirender Reihen für einen Würfel oder allgemein für ein rechtwinkliges Parallelepipedon gelöst werden. In der Lehre von der Elektricität (in einem späteren Bande) werden wir eine Lösung desselben in endlichen algebraischen Ausdrücken für die Oberfläche einer Linse finden, welche von zwei Kugelflächen begrenzt wird, die einander unter einem beliebigen Submultiplum von zwei rechten Winkeln schneiden, und für jeden Theil, den man erhält, wenn man diese Oberfläche durch eine dritte jede ihrer Seiten rechtwinklig schneidende Kugelfläche in zwei Theile theilt.

533. **Centrobarische Körper.** — Eine Masse kann auf unendlich viele Arten so durch einen gegebenen geschlossenen Raum vertheilt werden, dass sie einen centrobarischen Körper bildet, der einen im Innern dieses Raumes beliebig gegebenen Punkt als Attractionscentrum hat.

Denn der ganze Raum zwischen dem gegebenen Punkte und der gegebenen geschlossenen Oberfläche kann durch eine unendliche Anzahl von Oberflächen, deren jede diesen Punkt umgibt, in unendlich dünne Schichten zertheilt werden, und über jede dieser Schichten kann man in der Weise eine Masse vertheilen, dass sie centrobarisch wird und den gegebenen Punkt zum Centrum hat. Sowohl

die Formen dieser Schichten, als auch die darüber vertheilten Stoffmengen können nach Willkür auf unendlich viele Weisen variirt werden.

Wenn z. B. die gegebene geschlossene Oberfläche das zugespitzte Oval ist, welches eine Hälfte der Lemniskate der Figur 19 (§ 508) bildet, und wenn der gegebene Punkt der im Inneren dieser Oberfläche liegende Punkt *I* ist, so kann man einen centrobarischen Körper dadurch erhalten, dass man über die inneren Ovale in der Art Materie vertheilt, dass sie centrobarische Schichten werden (§ 531). Aus dem Ergebnisse des § 518 ersehen wir, dass eine Kugel, bei welcher die Dichtigkeit der fünften Potenz des Abstandes von einem äusseren Punkte umgekehrt proportional ist, einen centrobarischen Körper bildet, dessen Attractionscentrum das Bild (§ 512) dieses Punktes in Beziehung auf die Oberfläche der Kugel ist.

534. Das Attractionscentrum eines centrobarischen Körpers fällt mit dem Trägheitsmittelpunkt zusammen. — Das Centrum eines centrobarischen Körpers, dessen Masse der Schwerkraft unterworfen ist, ist der Trägheitsmittelpunkt (Schwerpunkt) desselben. Denn wenn ein centrobarischer Körper nur von einem unendlich weit entfernten anderen Körper, oder von einer Masse angezogen wird, die so um ihn herum vertheilt ist, dass sie (§ 499) gleichförmige Kräfte von parallelen Richtungen in dem ganzen von ihr eingenommenen Raume erzeugt, so geht die Resultante der Kräfte, die auf den Körper wirken, beständig durch sein Attractionscentrum. In diesem Falle ist diese Kraft aber die Resultante der auf alle Theilchen des Körpers wirkenden parallelen Kräfte, und diese sind (siehe unten das Capitel über die Eigenschaften der Materie) den Massen der Theilchen in aller Strenge proportional. Die Resultante eines solchen Systems paralleler Kräfte geht, wie wir in § 561 zeigen werden, durch den in § 230 als Trägheitsmittelpunkt definirten Punkt.

535. Kinetische Symmetrie eines Körpers in Beziehung auf sein Attractionscentrum. — Die Trägheitsmomente eines centrobarischen Körpers sind für alle durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehenden Axen einander gleich. Mit anderen Worten (§ 285): alle diese Axen sind Hauptaxen, und der Körper besitzt in Beziehung auf seinen Schwerpunkt kinetische Symmetrie.

Der Körper werde in eine geschlossene Oberfläche gesetzt, so dass sein Trägheitsmittelpunkt in den Anfangspunkt der Coordinaten O fällt. Ueber diese Fläche sei (§ 499) eine Masse so vertheilt, dass sie für jeden inneren Punkt (x, y, z) das Potential $x y z$ habe (welches der Bedingung $\nabla^2 (x y z) = 0$ genügt). Die Resultante der auf den Körper ausgeübten Wirkungen ist (§ 528) dieselbe, wie wenn seine Masse in O concentrirt

wäre, d. h. sie ist Null; mit anderen Worten: die auf die verschiedenen Theile des Körpers wirkenden Kräfte müssen einander das Gleichgewicht halten. Bezeichnet daher ϱ die Dichtigkeit des Körpers im Punkte (x, y, z), so ist (§ 551, 1, unten)

$$\int\int\int y z \, . \, \varrho \, dx \, dy \, dz = 0, \quad \int\int\int z x \, . \, \varrho \, dx \, dy \, dz = 0,$$
$$\int\int\int x y \, . \, \varrho \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Folglich sind OX, OY, OZ Hauptaxen, wie auch immer der Körper gedreht werde, wenn nur sein Schwerpunkt unverrückt in O bleibt.

Dies auf eine andere Weise darzuthun, nehmen wir an, es sei V das Potential des gegebenen Körpers im Punkte (x, y, z), u irgend eine Function von x, y, z und ϖ das dreifache Integral

$$\int\int\int\left(\frac{du}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dV}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dV}{dz}\right) dx \, dy \, dz,$$

das innerhalb einer Kugelfläche S zu nehmen ist, welche den ganzen gegebenen Körper umgibt und dessen Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat. Dann hat man, wie in Cap. I, Zusatz A,

$$\varpi = \int\int \delta u \, V d\sigma - \int\int\int V \nabla^2 u \, dx \, dy \, dz$$
$$= \int\int \delta V u \, d\sigma - \int\int\int u \nabla^2 V \, dx \, dy \, dz.$$

Wenn aber m die ganze Masse des gegebenen Körpers und a der Radius von S ist, so hat man für die ganze Oberfläche von S

$$V = \frac{m}{a} \text{ und } \delta V = -\frac{m}{a^2}.$$

Auch ist [§ 491 (c)]

$$\nabla^2 V = -4\pi\varrho,$$

und für alle der Masse des gegebenen Körpers nicht angehörenden Punkte $\nabla^2 V = 0$. Mithin ergibt sich aus dem Vorhergehenden

$$4\pi \int\int\int u \varrho \, dx \, dy \, dz$$
$$= \frac{m}{a^2}\int\int (a \delta u + u) \, d\sigma - \int\int\int V \nabla^2 u \, dx \, dy \, dz.$$

Es möge nun u irgend eine Function sein, welche im Innern von S überall der Bedingung $\nabla^2 u = 0$ genügt, so dass nach § 492 $\int\int \delta u \, d\sigma = 0$ und nach § 496 $\int\int u \, \delta\sigma = 4\pi a^2 u_0$ ist, wo u_0 den Werth bezeichnet, den u im Mittelpunkt von S hat. Es ist dann

$$\int\int\int u \varrho \, dx \, dy \, dz = m u_0.$$

Ist z. B. $u = yz$, also $u_0 = 0$, so erhalten wir, wie wir schon oben fanden,

$$\int\int\int y z \varrho \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Oder es sei

$$u = (x^2 + y^2) - (x^2 + z^2),$$

also wieder $u_0 = 0$. Dann folgt



$$\iiint (x^2 + z^2) \varrho \, dx \, dy \, dz = \iiint (x^2 + y^2) \varrho \, dx \, dy \, dz,$$

d. h. das Trägheitsmoment in Beziehung auf OY ist gleich demjenigen in Beziehung auf OX, was den aus dem anderen Resultate gezogenen Schluss bewahrheitet.

536. Ursprung der Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen. — Die Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen, welche den Gegenstand eines Zusatzes zum I. Capitel bildet, hatte ihren Ursprung in der mit besonderer Rücksicht auf die Gestalt der Erde behandelten Theorie der Attraction, indem sie zunächst zu dem Zwecke erfunden wurde, die Attraction eines Körpers von nahezu sphärischer Form in convergenten Reihen auszudrücken. Sie ist auch vollkommen dazu geeignet, das Potential oder die Attraction einer unendlich dünnen sphärischen Schicht auszudrücken, über welche nach einem ganz willkürlichen Gesetze Materie verbreitet ist. Da die letztere Anwendung die einfachere ist, so wollen wir sie zuerst vornehmen.

Anwendung der Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen. — Es seien x, y, z die von dem Centrum O als Anfangspunkt aus gerechneten Coordinaten des in Rede stehenden Punktes P; ϱ und ϱ' die Werthe der Dichtigkeit der Kugelfläche in den Punkten E und E', von denen der erstere der Durchschnittspunkt der Oberfläche mit OP oder der Verlängerung von OP ist; $d\sigma'$ ein in E' liegendes Element der Oberfläche, und a der Radius derselben. Dann haben wir, wenn V das Potential in P ist,

$$V = \iint \frac{\varrho' \, d\sigma'}{E'P}. \tag{1}$$

Nach B (48) ist aber

$$\begin{cases} \dfrac{1}{E'P} = \dfrac{1}{a}\left\{1 + \sum\limits_1^\infty Q_n \left(\dfrac{r}{a}\right)^n\right\}, & \text{wenn } P \text{ ein innerer Punkt ist,} \\ \phantom{\dfrac{1}{E'P}} = \dfrac{1}{r}\left\{1 + \sum\limits_1^\infty Q_n \left(\dfrac{a}{r}\right)^n\right\}, & \text{wenn } P \text{ ein äusserer Punkt ist,} \end{cases} \tag{2}$$

wo Q_n die zweiaxige harmonische Flächenfunction von (E, E') ist. Wenn also

$$\varrho' = S_0 + S_1 + S_2 + \text{u. s. w.} \tag{3}$$

die harmonische Entwicklung von ϱ ist, so erhalten wir nach B (52)

$$\begin{cases} V = 4\pi a \left\{\sum\limits_0^\infty \dfrac{S_n}{2n+1} \left(\dfrac{r}{a}\right)^n\right\}, & \text{wenn } P \text{ ein innerer Punkt ist,} \\ = \dfrac{4\pi a^2}{r}\left\{\sum\limits_0^\infty \dfrac{S_n}{2n+1} \left(\dfrac{a}{r}\right)^n\right\}, & \text{wenn } P \text{ ein äusserer Punkt ist.} \end{cases} \tag{4}$$

Ist z. B. $\varrho = S_n$, so ergibt sich

$$V = \frac{4\pi r^n}{a^{n-1}} \frac{S_n}{2n+1} \text{ für ein inneres } P$$

und

$$V = \frac{4\pi a^{n+2}}{r^{n+1}} \frac{S_n}{2n+1} \text{ für ein äusseres } P.$$

Wir entnehmen daraus Folgendes: —

537. Wenn der Ausdruck für die Dichtigkeit einer Masse auf einer Kugelfläche eine harmonische Kugelfunction ist, so ist das Potential für jede innerhalb oder ausserhalb gelegene concentrische Kugelfläche eine ähnliche und ähnlich gelegene Kugelfunction; ebenso ist es mit der in der Richtung des Radius genommenen Componente der Kraft. Die Grösse der letzteren ist aber (§ 478) für zwei einander zu beiden Seiten der Oberfläche unendlich naheliegende Punkte nicht dieselbe, sondern, wenn ϱ die Flächendichtigkeit zwischen beiden Punkten bezeichnet, um $4\pi\varrho$ verschieden.

Bezeichnet R die in der Richtung des Radius genommene Componente der Kraft, so ist

$$(5) \left\{ \begin{aligned} R &= -\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi r^{n-1}}{a^{n-1}} \frac{n S_n}{2n+1} \text{ für einen inneren Punkt} \\ &\text{und} \\ &= \frac{4\pi a^{n+2}}{r^{n+2}} \frac{(n+1) S_n}{2n+1} \text{ für einen äusseren Punkt.} \end{aligned} \right.$$

Für $r = a$ ergibt sich also

$$R \text{ (aussen)} - R \text{ (innen)} = 4\pi S_n = 4\pi\varrho.$$

538. Das Potential ist sowohl in dem inneren als auch in dem äussern Raume eine räumliche harmonische Kugelfunction, die im Innern der Kugel von einem positiven, ausserhalb derselben von einem negativen Grade ist. Die auf jeden Raumtheil bezüglichen Ausdrücke für die in der Richtung des Radius genommene Componente der Kraft werden auf dieselbe Form gebracht, wenn man sie mit dem Abstande vom Mittelpunkt multiplicirt.

539. Die harmonische Entwicklung liefert für das Potential einer durch einen Raum irgendwie vertheilten Masse einen Ausdruck in convergirenden Reihen, der in einigen Anwendungen von Nutzen ist.

Es seien x, y, z die Coordinaten des angezogenen Punktes P und x', y', z' diejenigen irgend eines Punktes P' der gegebenen Masse. Ist dann ϱ' die Dichtigkeit der Masse in P' und V das Potential im Punkte P, so haben wir

$$(6) \qquad V = \iiint \frac{\varrho' \, dx' \, dy' \, dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}}.$$

Was den Raum betrifft, innerhalb dessen das Integral zu nehmen ist, so stellen wir uns denselben am zweckmässigsten als nach allen Seiten

hin unbegrenzt vor, und nehmen ϱ' als eine discontinuirliche Function von x', y', z' an, die in dem ganzen Raume, der keine Masse enthält, verschwindet.

Nun haben wir nach B (u)

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} \\ \qquad = \dfrac{1}{r'}\left\{1+\sum_1^\infty Q_n\left(\dfrac{r}{r'}\right)^n\right\}, \text{ wenn } r'>r \\ \text{und } = \dfrac{1}{r}\left\{1+\sum_1^\infty Q_n\left(\dfrac{r'}{r}\right)^n\right\}, \text{ wenn } r'<r. \end{cases}$$

Wird dies in (6) substituirt, so folgt

$$(8)\quad \begin{cases} V = \left(\int\int\int\right)\dfrac{\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'}{r'} + \dfrac{1}{r}\left[\int\int\int\right]\varrho'\,dx'\,dy'\,dz' \\ + \sum_1^\infty \left\{r^n\left(\int\int\int\right)Q_n\dfrac{\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'}{r'^{n+1}} + \dfrac{1}{r^{n+1}}\left[\int\int\int\right]Q^n\,r'^n\,\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'\right\}, \end{cases}$$

wo $\left(\int\int\int\right)$ eine Integration durch den ganzen ausserhalb der Kugel vom Radius r liegenden Raum und $\left[\int\int\int\right]$ eine Integration durch den von dieser Kugel eingenommenen Raum bezeichnet.

Potential eines entfernten Körpers. — Diese Formel setzt uns in den Stand, die Attraction, welche eine Masse von irgend einer Gestalt auf einen entfernten Punkt ausübt, durch eine einzige convergirende Reihe auszudrücken. So verschwindet die erste Reihe, wenn OP grösser ist, als der grösste Abstand irgend eines Theils des Körpers von O; der Ausdruck wird dann eine einzige nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{r}$ fortschreitende convergente Reihe: —

$$(9)\quad V = \frac{1}{r}\left\{\int\int\int\varrho'\,dx'\,dy'\,dz' + \sum\frac{1}{r^n}\int\int\int Q_n\,r'^n\,\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'\right\}.$$

Wenn wir uns der Bezeichnung von B (u) (52) bedienen, so geht dieser Ausdruck über in

$$(10)\quad \begin{cases} V = \dfrac{1}{r}\left\{\int\int\int\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'\right. \\ \qquad \left. + \sum_1^\infty r^{-2n}\int\int\int\varrho'\,H_n\,[(x,y,z),\ (x',y',z')]\,dx'\,dy'\,dz'\right\}, \end{cases}$$

und wir haben nach B (v') und (w)

$$(11)\quad \begin{cases} H_n\,[(x,y,z),\ (x',y',z')] = \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left[\cos^n\vartheta\right. \\ \left.-\dfrac{n(n-1)}{2.(2n-1)}\cos^{n-2}\vartheta + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4}\vartheta - \text{u.s.w.}\right]r^n\,r'^n, \end{cases}$$

wo

$$\cos\vartheta = \frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}$$

ist. Hieraus erhalten wir

$$H_1 = xx' + yy' + zz'; \; H_2 = 3/2\,[(xx' + yy' + zz')^2 - 1/3\,(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)]; \text{ u. s. w.}$$

Es bezeichne nun M die Masse des Körpers, und es sei O der Schwerpunkt desselben. Dann ergibt sich

$$\iiint \varrho'\, dx'\, dy'\, dz' = M \text{ und } \iiint \varrho'\, H_1\, dx'\, dy'\, dz' = 0.$$

Ferner mögen OX, OY, OZ als Hauptaxen (§§ 281, 282) angenommen werden, so dass

$$\iiint \varrho'\, y'\, z'\, dx'\, dy'\, dz' = 0, \text{ u. s. w.}$$

ist, und es seien A, B, C die Trägheitsmomente in Beziehung auf diese Axen. Dies liefert

$$\begin{aligned}\iiint H_2\, \varrho'\, dx'\, dy'\, dz' &= 1/2\,\{(3x^2 - r^2)\iiint \varrho'\, x'^2 dx' dy' dz' + \text{u. s. w.}\}\\ &= 1/2\,\{(3x^2 - r^2)[1/2\,(A + B + C) - A] + \text{ u. s. w.}\}\\ &= 1/2\,\{A(r^2 - 3x^2) + B(r^2 - 3y^2) + C(r^2 - 3z^2)\}\\ &= 1/2\,\{(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2\}.\end{aligned}$$

Werden also die Glieder mit unendlich kleinen Grössen dritter und höherer Ordnung $\left(\text{Potenzen von } \frac{r'}{r}\right)$ vernachlässigt, so erhalten wir den folgenden approximativen Ausdruck für das Potential: —

$$(12)\quad V = \frac{M}{r} + \frac{1}{2r^5}\{(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2\}.$$

Als ein Beispiel für die Nützlichkeit dieses Resultates erwähnen wir die Bestimmung der Störung in der Bewegung des Mondes, welche die Abweichung der Erdoberfläche von der Form einer Kugelfläche erzeugt, und die Untersuchung der von derselben störenden Ursache auf die Erde hervorgerufenen Reaction, welche die **lunare Nutation und Präcession** erzeugt, die später erklärt werden wird.

Wenn wir die Formel (12) differentiiren und nur die Glieder ersten und zweiten Grades beibehalten, so erhalten wir für die Componenten der zwischen dem Körper und einer im Punkte (x, y, z) befindlichen Masseneinheit wirkenden Kraft die Näherungsausdrücke

$$(13)\quad \begin{cases} X = \dfrac{Mx}{r^3} - \dfrac{(B + C - 2A)x}{r^5} \\ \qquad + 5/2\, \dfrac{x}{r^7}[(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2] \\ \qquad\qquad Y = \text{u. s. w.}, \quad Z = \text{u. s. w.}, \end{cases}$$

und daraus folgt

$$(14)\quad \begin{cases} Zy - Yz = 3\,\dfrac{(C - B)yz}{r^5}, \\ Xz - Zx = 3\,\dfrac{(A - C)zx}{r^5}, \\ Yx - Xy = 3\,\dfrac{(B - A)xy}{r^5}. \end{cases}$$

Der Vergleich dieser Formeln mit dem Ergebnisse des Cap. IX (unten) lehrt Folgendes: —

540. Attraction eines Massenpunktes auf einen entfernten Körper. — Wenn die Attraction eines entfernten Punktes *P* auf einen starren Körper auf den Trägheitsmittelpunkt *I* dieses Körpers (nach Poinsot's Methode, die unten in § 555 erläutert wird) übertragen wird, so erhält man ein Kräftepaar, das näherungsweise gleich und entgegengesetzt demjenigen ist, welches die resultirende Wirkung der Centrifugalkraft ausmacht, wenn der Körper mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit um *IP* rotirt. Das Quadrat dieser Winkelgeschwindigkeit ist, abgesehen von der Richtung, der dritten Potenz des Abstandes von *P* umgekehrt proportional; es ist nämlich numerisch gleich dem Dreifachen des reciproken Werthes der dritten Potenz dieses Abstandes, wenn die Masseneinheit so gewählt wird, dass sie auf eine andere in der Einheit der Entfernung befindliche gleiche Masse die kinetische Krafteinheit (§ 225) ausübt. Das allgemeine Streben des Gravitations-Kräftepaars besteht darin, die Hauptaxe, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum ist, mit dem anziehenden Punkte in eine Richtung zu bringen. Die Ausdrücke der für die Hauptaxen genommenen Componenten des Kräftepaars werden später (Cap. IX) dazu benutzt werden, die Erscheinungen der Präcession und der Nutation zu untersuchen, welche die Anziehungen der Sonne und des Mondes in Folge der Abweichung der Erde von der kugelförmigen Gestalt erzeugen, und die Verzögerung zu bestimmen (Cap. IX), welche die Rotation der Erde dem oben (§ 276) dargelegten Princip gemäss durch die Fluthreibung erleidet.

541. Aus der vorstehenden Betrachtung geht hervor, dass das Gravitations-Kräftepaar dem Cubus des Abstandes des äusseren anziehenden Punktes von dem Trägheitsmittelpunkte des Körpers umgekehrt proportional ist, dass folglich der kürzeste Abstand der Richtung der resultirenden Kraft von dem Trägheitsmittelpunkte umgekehrt wie der Abstand des anziehenden Punktes variirt. Wir sehen so, wie jeder starre Körper, wenn man sich mit einer ersten Annäherung begnügt, in Beziehung auf einen entfernten anziehenden Punkt centrobarisch ist.

542. Die wahre Bedeutung und der Werth, den die Methode der harmonischen Kugelfunctionen für eine feste Masse hat, wird durch die Betrachtung der folgenden Anwendung am besten verstanden werden: —

Es sei

(15) $$\varrho = F(r)\, S_n,$$

wo $F(r)$ eine beliebige Function von r und S_n eine harmonische Kugelflächenfunction $n$ter Ordnung bezeichnet, deren Coefficienten von r unabhängig sind. Wird der entsprechende Werth für ϱ' in (8) substituirt, so erhält man mit Rücksicht auf B (52) und (16)

(16) $$V = \frac{4\pi S_n}{2n+1}\left\{r^n \int_r^\infty r'^{-n+1} F(r')\, dr' + r^{-n-1} \int_0^r r'^{n+2} F(r')\, dr'\right\}.$$

543. Potential einer festen Kugel, deren Dichtigkeitsausdruck eine harmonische Function ist. — Um ein Beispiel zu geben, wollen wir das Potential einer festen Kugel vom Radius a bestimmen, deren Masse so vertheilt ist, dass der Ausdruck der Dichtigkeit eine räumliche harmonische Kugelfunction V_n ist.

Es soll also

$$\varrho = V_n = r^n S_n \text{ für } r < a$$

und

$$\varrho' = 0 \qquad \text{für } r > a$$

sein. In der vorhergehenden Formel ist somit $F(r) = r^n$ von $r = 0$ bis $r = a$ und $F(r) = 0$, wenn $r > a$ ist. Diese Formel geht daher über in

(17) $$\begin{cases} V = 4\pi V_n \left\{\dfrac{a^2}{2(2n+1)} - \dfrac{r^2}{2(2n+3)}\right\}, & \text{wenn } P \text{ ein innerer Punkt ist,} \\ \text{und} & \\ \quad = \dfrac{4\pi}{(2n+1)(2n+3)} \dfrac{a^{2n+3} V_n}{r^{2n+1}}, & \text{wenn } P \text{ ein äusserer Punkt ist.} \end{cases}$$

Dies Resultat kann man auch mittels der algebraischen Formel B (12) erhalten, nach demselben Princip, nach welchem in § 491 (d) das Potential einer gleichförmigen Kugelschicht bestimmt wurde. Es ist nämlich nach § 491 (c)

(18) $$\begin{cases} \nabla^2 V = -4\pi V_n, & \text{wenn } r < a \\ \quad\;\; = 0 & \text{, wenn } r > a. \end{cases}$$

Setzt man aber $m = 2$ in B (12), so folgt

$$\nabla^2 (r^2 V_n) = 2(2n+3)\, V_n,$$

und folglich hat die Gleichung

$$\nabla^2 V = -4\pi V_n$$

die Lösung

(19) $$V = -4\pi \frac{r^2 V_n}{2(2n+3)} + U,$$

wo U eine beliebige Function ist, die in jedem Punkte des Innern der Kugel der Gleichung

$$\nabla^2 U = 0$$

genügt. Werden U und die Werthe von V ausserhalb der Kugel so gewählt, dass die Werthe von V für Punkte, die zu beiden Seiten der

Kugelfläche einander unendlich nahe liegen, gleich sind, dass ferner die Function $\frac{dV}{dr}$ dieselbe Bedingung erfüllt, und dass V für $r = \infty$, sowie für $r = 0$ verschwindet, so findet man

$$U = 4\pi V_n \frac{a^2}{2(2n+1)},$$

und erhält den Ausdruck (17) für das äussere V. Denn erstens muss offenbar das äussere V von der Form $A \frac{V_n}{r^{n+1}}$ und U von der Form $B V_n$ sein, wo A und B Constanten sind; dann bestimmen die genannten beiden Bedingungen diese Constanten.

544. **Entwicklung des Potentials einer beliebigen Masse in eine harmonische Reihe.** — Aus dem Zusatz B (51) folgt unmittelbar, dass jede beliebige Function von x, y, z für den ganzen Raum durch eine Reihe harmonischer Kugelflächenfunctionen ausgedrückt werden kann, deren jede Functionen des Abstandes r vom Coordinatenanfangspunkte zu Coefficienten hat. Folglich liefert (16), wenn man S_n unter das Integrationszeichen statt r' setzt, die harmonische Entwicklung des Potentials einer beliebigen Masse. Es ist dies das Resultat der in § 539 (8) angezeigten dreifachen Integration, vorausgesetzt dass die Dichtigkeit der Masse durch eine harmonische Reihe ausgedrückt ist.

545. **Anwendung auf die Gestalt der Erde.** — Die wichtigste Anwendung, die man bisher von der harmonischen Entwicklung auf feste Kugeln gemacht hat, ist die in der Theorie der Gestalt der Erde nöthige Bestimmung der Attraction einer endlichen Masse, welche in nahezu kugelförmige Schichten vertheilt ist, deren jede überall gleich dicht ist, deren Dichtigkeit aber von Schicht zu Schicht eine andere wird. Wenn man nach der oben erläuterten allgemeinen analytischen Methode diesen Fall detaillirt ausarbeitet, so erhält man das Potential, dargestellt als die Summe zweier Theile, von denen der erstere und wichtigere das Potential einer festen Kugel A und der zweite das einer Kugelflächenschicht B ist. Die Kugel A wird dadurch aus dem gegebenen Sphäroid erhalten, dass man die ganze Masse wegschneidet, welche ausserhalb einer passenden mittleren Kugelfläche liegt, und, ohne irgendwo die Dichtigkeit zu ändern, die etwa noch leeren Raumtheile im Innern dieser Oberfläche ausfüllt. Die Schicht B ist eine mit gleichen Quantitäten positiver und negativer Materie in der Weise versehene Kugelfläche, dass dadurch die Massenversetzung, durch welche das gegebene Sphäroid in A verwandelt wurde, compensirt wird. Der analytische Ausdruck all dieser Umstände könnte mittels der vorhergehenden For-

meln (§§ 536, 537) ohne Weiteres niedergeschrieben werden; wir wollen ihn aber erst später in der Hydrostatik und Hydrokinetik betrachten, wenn wir uns mit der Theorie der Gestalt der Erde und mit den Vibrationen flüssiger Kugeln beschäftigen werden.

546. Fall eines um eine Axe symmetrischen Potentials. — Die analytische Methode der harmonischen Kugelfunctionen ist für mehrere praktische Probleme aus dem Gebiete der Elektricität, des Magnetismus und des Elektromagnetismus sehr nützlich, in denen Kräfte symmetrisch um eine Axe vertheilt sind. Namentlich setzt sie uns in den Stand, wenn die Kraft (oder das Potential) in jedem Punkte eines endlichen Theils der Axe gegeben ist, unmittelbar convergirende Reihen zur Berechnung der Kraft für Punkte herzuleiten, welche in irgend einem endlichen Raumtheile ausserhalb der Axe liegen (s. § 498).

Wir nehmen zum Coordinatenanfangspunkt einen beliebigen Punkt der Axe, in Beziehung auf welche Symmetrie stattfindet, und es sei für einen Theil AB der Axe

$$\text{(a)} \qquad U = a_0 + \frac{b_0}{r} + a_1 r + \frac{b_1}{r^2} + a_2 r^2 + \frac{b_2}{r^3} + \text{u. s. w.},$$

wo U das Potential für einen durch die Bedingung $OQ = r$ bestimmten Punkt Q der Axe und das zweite Glied eine convergirende Reihe ist. Bezeichnet dann V das Potential für einen beliebigen Punkt P, welcher durch die Coordinaten $OP = r$ und $QOP = \vartheta$ bestimmt ist, und sind, wie im Zusatz B (47), Q_1, $Q_2, \ldots$ die zweiaxigen harmonischen Flächenfunctionen 1ter, 2ter, ... Ordnung von ϑ, so muss für alle Werthe von r, für welche die Reihe convergirt,

$$\text{(b)} \qquad V = a_0 + \frac{b_0}{r} + \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2}\right) Q_1 + \left(a_2 r^2 + \frac{b_2}{r^3}\right) Q_2 + \text{u. s. w.}$$

sein, vorausgesetzt dass P von Q und von allen Punkten von AB, die innerhalb einer endlichen, wenn auch noch so kleinen Entfernung von ihm liegen, erreicht werden kann, ohne dass man die Masse, welche die in Rede stehende Kraft ausübt, oder einen Raum, für welchen die Reihe nicht convergirt, zu durchschreiten hätte. Denn in diesem ganzen Raume (§ 498) muss, wenn V' der Werth der Summe der Reihe ist, $V - V'$ verschwinden, da [Zusatz B (g)] $V - V'$ eine Potentialfunction ist und für einen endlichen Theil der Axe, die Q enthält, verschwindet.

Die Reihe (b) convergirt natürlich für alle Werthe von r, welche (a) convergent machen, da, wie jeder der im Zusatz B für die Functionen Q_1, $Q_2, \ldots$ gegebenen Ausdrücke zeigt, das Verhältniss $Q_{n+1} : Q_n$ für unendlich grosse Werthe von n den Grenzwerth Eins hat.

Im Allgemeinen, d. h. wenn nicht O ein singulärer Punkt ist, besteht die Reihe für U nach dem Maclaurin'schen Satze nur aus steigenden ganzen Potenzen von r, vorausgesetzt dass r eine gewisse Grenze nicht überschreitet. In Fällen gewisser Art gibt es solche singulären Punkte, dass, wenn einer derselben zum Anfangspunkt O genommen

wird, der Ausdruck für U eine Reihe von Potenzen gebrochener Grade von r ist, die wenigstens für alle eine gewisse Grenze nicht überschreitenden endlichen positiven Werthe von r convergent und reell ist. Drückt man in einem solchen Falle das Potential in der Nähe von O mittels räumlicher harmonischer Kugelfunctionen, in Beziehung auf O als Mittelpunkt, aus, so enthält das Resultat harmonische Functionen gebrochener Grade [Zusatz B (a)].

Beispiele. — (I.) Das Potential eines kreisförmigen Ringes vom Radius a und der linearen Dichtigkeit ϱ ist in einem Punkte der Axe, welcher vom Mittelpunkt den Abstand r hat, gleich

$$\frac{2\pi a \varrho}{(a^2 + r^2)^{1/2}}.$$

Folglich ist

$$U = 2\pi\varrho\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{a^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{r^4}{a^4} - \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r < a,$$

und

$$U = \frac{2\pi a \varrho}{r}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{a^4}{r^4} - \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r > a.$$

Hieraus ergibt sich

$$V = 2\pi\varrho\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}\,Q_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{r^4}{a^4}\,Q_4 - \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r < a$$

und

$$V = 2\pi\varrho\left(\frac{a}{r} - \tfrac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\,Q_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{a^5}{r^5}\,Q_4 - \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r > a.$$

(II.) Wir multipliciren den vorhergehenden unentwickelten Ausdruck für U mit da und integriren nach a von $a = 0$ als der unteren Grenze an. Wird jetzt unter U das Potential einer Scheibe von kreisförmiger Basis, die eine gleichförmige Oberflächendichtigkeit ϱ und den Radius a hat, für einen Punkt ihrer Axe verstanden, so erhalten wir

$$U = 2\pi\varrho\,\{(a^2 + r^2)^{1/2} - r\},$$

wo r positiv ist.

Entwickeln wir diesen Ausdruck erstens nach steigenden und zweitens nach fallenden Potenzen von r (für die Fälle $r < a$ und $r > a$), so ergibt sich

$$V = 2\pi\varrho\left\{- r\,Q_1 + a + \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{a}\,Q_2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\frac{r^4}{a^3}\,Q_4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{r^6}{a^5}\,Q_6 - \text{u. s. w.}\right\}, \text{ wenn } r < a,$$

und

$$V = 2\pi\varrho\left\{\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\frac{a^4}{r^3}\,Q_2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{a^6}{r^5}\,Q_4 - \text{u. s. w.}\right\}, \text{ wenn } r > a.$$

Es ist zu bemerken, dass der erstere dieser Ausdrücke nur von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi$ continuirlich ist, und dass man von $\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi$ bis $\vartheta = \pi$ den ersten Theil des zweiten Gliedes, nämlich

$$- 2\pi\varrho r\,Q_1 \text{ durch } + 2\pi\varrho r\,Q_1$$

ersetzen muss.

(III.) Wird weiter an dem Ausdruck für U in (II.) die durch $\frac{-d}{dr}$ bezeichnete Operation vollzogen und jetzt unter U das Potential einer Scheibe von unendlich kleiner Dicke c verstanden, welche auf ihren beiden Seiten positive und negative Masse von der Flächendichtigkeit $\frac{\varrho}{c}$ enthält, so erhält man

$$U = 2\pi\varrho\left\{1 - \frac{r}{(a^2+r^2)^{1/2}}\right\}.$$

[Diese Formel ergibt sich auch aus § 479 (e), wenn man nach x integrirt, r für x und ϱ für ϱc setzt.] Für diesen Fall ist also

$$V = 2\pi\varrho\left(1 - \frac{r}{a}\,Q_1 + 1/2\,\frac{r^3}{a^3}\,Q_3 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{r^5}{a^5}\,Q_5 + \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r < a,$$

und

$$V = 2\pi\varrho\left(1/2\,\frac{a^2}{r^2}\,Q_1 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{a^4}{r^4}\,Q_3 + \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r > a.$$

Der erstere Ausdruck ist gleichfalls discontinuirlich, und wenn $\vartheta > 1/2\,\pi$ und $< \pi$ ist, so muss sein erster Theil, nämlich $2\pi\varrho$, durch $-2\pi\varrho$ ersetzt werden.

547. Verlust an potentieller Energie. — Wenn man zwei Systemen oder Massen-Vertheilungen M und M', deren jede einen endlichen gegebenen Raum einnimmt, die aber unendlich weit von einander entfernt sind, gestattet, sich einander zu nähern, so wird eine gewisse Menge Arbeit durch die wechselseitig zwischen ihnen wirkende Gravitation gewonnen, und ihre wechselseitige potentielle Energie erfährt einen ebenso grossen Verlust, oder erleidet, wie wir sagen können, eine Erschöpfung. Die Grösse dieses Verlustes wird (§ 486) stets dieselbe sein, auf welchen Wegen auch die Aenderungen der Lage des Systems vor sich gehen, sobald die relativen anfänglichen und die relativen Endlagen aller Massenpunkte gegeben sind. Wenn also m_1, m_2, ... die Massenpunkte von M; m_1', m_2', ... diejenigen von M'; v_1', v_2', ... die Potentiale von M' in den von m_1, m_2, ... eingenommenen Punkten; v_1, v_2, ... die Potentiale von M in den von m_1', m_2', ... eingenommenen Punkten sind, und E der Verlust an wechselseitiger potentieller Energie zwischen den beiden Systemen in irgend welchen wirklichen Configurationen ist, so hat man

$$E = \sum m v' = \sum m' v.$$

Es lässt sich dies noch in anderer Weise schreiben, wenn ϱ eine discontinuirliche Function bezeichnet, welche die Dichtigkeit in irgend einem Punkte (x, y, z) der Masse M ausdrückt und in allen Punkten verschwindet, in denen sich kein Theil dieser Masse M befindet, und

wenn ϱ' in ähnlicher Weise die andere Masse M' bestimmt. Wir erhalten dann

$$E = \iiint \varrho\, v'\, dx\, dy\, dz = \iiint \varrho'\, v\, dx\, dy\, dz,$$

wo die Integrale sich durch den unendlichen Raum zu erstrecken haben. Die Gleichheit des zweiten und dritten Ausdrucks erkennt man, wenn man beachtet, dass

$$v = \iiint \frac{{}_{\prime}\varrho\, d_{\prime}x\, d_{\prime}y\, d_{\prime}z}{D}$$

ist, wenn $({}_{\prime}x, {}_{\prime}y, {}_{\prime}z)$ irgend ein Punkt des Raumes, ${}_{\prime}\varrho$ der Werth von ϱ in diesem Punkte und D der Abstand zwischen (x, y, z) und $({}_{\prime}x, {}_{\prime}y, {}_{\prime}z)$ ist. Ein entsprechender Ausdruck liefert natürlich v', und wir erhalten auf diese Weise das zweite und dritte Glied, oder den Werth von E, identisch durch ein sechsfaches Integral ausgedrückt, nämlich durch

$$E = \iiiiii \frac{{}_{\prime}\varrho\varrho'\, d_{\prime}x\, d_{\prime}y\, d_{\prime}z\, dx\, dy\, dz}{D}.$$

548. Green's Methode. — Es ist bemerkenswerth, dass Green sein ganzes System allgemeiner Sätze über die Attraction auf die Betrachtung einer analytischen Formel basirte, welche, wenn man sie auf zwei Massen bezieht und gehörig interpretirt, genau dieselbe Bedeutung wie die vorhergehenden Ausdrücke für E hat.

Im Zusatz A (a) sei α constant und U, U' die Potentiale zweier endlichen, in endlicher Entfernung von einander befindlichen Massen M, M' im Punkte (x, y, z), so dass wir, wenn ϱ und ϱ' beziehungsweise die Dichtigkeiten von M und M' in (x, y, z) bezeichnen, nach § 491 (c)

$$\nabla^2 U = -4\pi\varrho,\ \nabla^2 U' = -4\pi\varrho'$$

haben. Dabei ist zu bemerken, dass ϱ in jedem Punkte, welcher keinen Theil der Masse M enthält, und ϱ' in jedem ausserhalb M' liegenden Punkte verschwindet. In der vorliegenden rein abstracten Untersuchung mögen die beiden Massen theilweise oder ganz vereint denselben Raum einnehmen: oder sie mögen bloss gedachte Theile einer reellen Masse sein. Setzen wir dann voraus, dass S nach allen Richtungen hin unendlich entfernt ist, und beachten, dass $U \delta U'$ und $U' \delta U$ unendlich kleine Grössen von derselben Ordnung, wie der reciproke Werth des Cubus des Abstandes irgend eines Punktes von S von M und M' sind, während die gesammte Fläche von S, über welche die Flächenintegrale des Zusatzes A. (a) (1) genommen werden, zwar unendlich gross, aber nur von der Ordnung des Quadrates dieses Abstandes ist, so erhalten wir

$$\iint dS\, U' \delta U = 0 \quad \text{und} \quad \iint dS\, U \delta U' = 0.$$

Folglich geht (a) (1) über in

$$\iiint \left(\frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dU'}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dU'}{dz}\right) dx\, dy\, dz$$
$$= 4\pi \iiint \varrho\, U'\, dx\, dy\, dz = 4\pi \iiint \varrho'\, U\, dx\, dy\, dz.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass das erste Glied, dividirt durch 4π, gleich dem Verlust an potentieller Energie ist, von welchem die Annäherung der beiden Massen begleitet ist, wenn sie aus unendlicher gegenseitiger Entfernung sich in die relative Lage bewegen, die sie wirklich einnehmen.

Ohne S als unendlich gross vorauszusetzen, sehen wir, dass das zweite Glied von (a) (1), durch 4π dividirt, der directe Ausdruck für den Verlust an wechselseitiger Energie zwischen M' und einer Masse ist, welche aus dem innerhalb S liegenden Theile von M und einer auf S mit der Dichtigkeit $\frac{1'}{4\pi}\,\delta\,U'$ vertheilten Masse besteht; das dritte Glied ist der entsprechende Ausdruck für M und für die in ähnlicher Weise bestimmten Theile von M'.

549. Verlust an potentieller Energie bei der Condensation einer Masse. — Wenn statt der beiden in irgend einer Weise vertheilten Massen M und M' nur zwei Massenpunkte m_1, m_2 gegeben sind, so ist der Verlust an wechselseitiger potentieller Energie, der eintritt, wenn man den unendlich weit von einander entfernten Punkten gestattet, einander bis auf die Entfernung $D(1, 2)$ zu nähern, gleich

$$\frac{m_1 m_2}{D(1,2)}.$$

Wird jetzt einem dritten Massenpunkte gestattet, in die Nähe der beiden ersteren zu kommen, so geht aufs neue potentielle Energie im Betrage

$$\frac{m_1 m_3}{D(1,3)} + \frac{m_2 m_3}{D(2,3)}$$

verloren. Betrachten wir eine beliebige Anzahl Massenpunkte, die auf diese Weise in eine gewisse Lage zu einander gelangen, so erhalten wir für den ganzen Verlust an potentieller Energie

$$E = \Sigma\Sigma\,\frac{m m'}{D},$$

wo m, m' die Massen irgend zweier der Punkte, D den Abstand derselben bezeichnen, und wo die Summation $\Sigma\Sigma$ sich auf alle Paare von je zwei Punkten, jedes Paar nur einmal genommen, bezieht. Bezeichnet v das Potential aller Massen, mit Ausschluss von m, in dem von m eingenommenen Punkte, so wird der Ausdruck eine einfache Summe von so viel Gliedern, als Massen vorhanden sind. Wir können dieselbe in folgender Weise schreiben: —

$$E = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, m v;$$

der Factor $\tfrac{1}{2}$ muss hinzugefügt werden, weil $\Sigma\, m v$ jedes Glied wie

$\frac{m_1 m_2}{D(1,2)}$ zweimal enthalten würde. Wenn die Punkte im Grenzfall eine continuirliche Masse bilden, welche in einem Punkte (x, y, z) die Dichtigkeit ϱ hat, so haben wir nur die Summe als ein Integral zu schreiben und erhalten

$$E = {}^1/_2 \int\int\int \varrho\, v\, dx\, dy\, dz;$$

dies ist der Verlust an potentieller Energie, welcher erfolgt, wenn eine Quantität schweren Stoffs sich aus einem Zustande unendlich dünner Vertheilung (d. h. aus einem Zustande, in welchem die Dichtigkeit überall unendlich klein ist) in den Zustand verdichtet, in dem sie sich in irgend einem Körper von endlicher Ausdehnung befindet.

Zu einer wichtigen analytischen Transformation dieses Ausdrucks wird man durch die vorhergehende Interpretation des Zusatzes A (a) geführt; man erhält mittels derselben*)

$$E = \frac{1}{8\pi}\int\int\int\left(\frac{dv^2}{dx^2} + \frac{dv^2}{dy^2} + \frac{dv^2}{dz^2}\right) dx\, dy\, dz,$$

oder

$$E = \frac{1}{8\pi}\int\int\int R^2\, dx\, dy\, dz,$$

wenn R die Resultante der Kraft im Punkte (x, y, z) bezeichnet und die Integration sich durch den ganzen Raum erstreckt.

Eingehende Interpretationen des übrigen Theils des Zusatzes A für den Fall eines constanten α und der allgemeinen Sätze und Formeln desselben, welche diese Beschränkung nicht enthalten, namentlich auch der dort aufgestellten der Minimum-Probleme sind für die Dynamik unzusammendrückbarer Flüssigkeiten und für die physikalische Theorie der Verbreitung elektrischer und magnetischer Kräfte durch einen von homogener oder heterogener Masse erfüllten Raum von Wichtigkeit. Wir werden hierauf zurückkommen, wenn wir uns mit diesen Gegenständen speciell beschäftigen werden.

550. Methode von Gauss. — Die Art, in welcher Gauss Green's Sätze unabhängig bewies, lässt sich unmittelbarer und leichter in Ausdrücke der Energie übertragen, wenn man die gewöhnlich angenommene Vorstellung von Kräften festhält, welche einfach zwischen zwei von einander entfernten Massenpunkten wirken, ohne dass eine dazwischen liegende Masse irgend einen Beistand oder Einfluss ausübte. Um z. B. zu beweisen, dass eine gegebene Quantität Materie Q in einer, aber auch nur einer Weise sich so über eine gegebene endliche Oberfläche S (die geschlossen

*) Nichol's Cyclopaedia, 2d Ed. 1860. Magnetism, Dynamical Relations of.

oder offen sein kann) vertheilen lässt, dass das Potential auf dieser ganzen Oberfläche überall denselben Werth habe, zeigt er (1), dass das Integral

$$\int\int\int\int\frac{\varrho\varrho' \, d\sigma \, d\sigma'}{PP'}$$

einen der Bedingung

$$\int\int\varrho \, d\sigma = Q$$

unterworfenen Minimum-Werth hat (ϱ ist eine Function der Lage eines Punktes P auf S; ϱ' ist der Werth, den diese Function in P' hat; $d\sigma$ und $d\sigma'$ sind die Elemente von S in diesen Punkten), und (2) dass dieses Minimum nur durch eine bestimmte Vertheilung der Werthe von ϱ erzeugt wird. Nach dem, was wir soeben (§ 549) gesehen haben, ist das erstere dieser Integrale doppelt so gross, als die potentielle Energie einer unendlich grossen Anzahl auf S vertheilter unendlich kleiner Massentheilchen, die einander abstossen: dies Minimum-Problem ist also (§ 292) bloss die analytische Fassung des Problems, zu bestimmen, wie diese Massentheilchen vertheilt werden müssen, um sich in stabilem Gleichgewichte zu befinden.

Ebenso ist Gauss' zweites Minimum-Problem, welches das erstere als einen besonderen Fall in sich schliesst, nämlich das Problem, ϱ so zu bestimmen, dass

$$\int\int(\tfrac{1}{2} v - \Omega)\varrho \, d\sigma$$

ein der Bedingung

$$\int\int\varrho \, d\sigma = Q$$

unterworfenes Minimum werde, wo Ω eine willkürlich gegebene Function der Lage von P und

$$v = \int\int\frac{\varrho' \, d\sigma'}{PP'}$$

ist, bloss eine analytische Fassung der Frage: Wie muss eine gegebene Quantität abstossender Massentheilchen, die auf eine Oberfläche S beschränkt sind, vertheilt werden, damit die gesammte potentielle Energie, welche aus den zwischen den Massenpunkten wechselseitig wirkenden Kräften, wie auch aus den Kräften herrührt, die ein fest gegebener anziehender oder abstossender Körper (dessen Potential in P gleich Ω ist) auf sie ausübt, ein Minimum werde; mit anderen Worten (§ 292): wie werden die beweglichen Massenpunkte sich unter dem Einfluss all dieser Kräfte gruppiren?



Siebentes Capitel.

Statik fester und flüssiger Körper.

551. Gleichgewicht eines starren Körpers. — Wie wir schon in § 454 dargelegt haben, sind für die vorliegende Untersuchung das dritte Bewegungsgesetz und die Folgerungen, die sich aus demselben ziehen lassen, erforderlich. Diese letzteren sind für unser jetziges Vorhaben ausführlich genug in dem allgemeinen Ausspruch Lagrange's (§ 293) und in der Ausdehnung desselben auf die Frictionskräfte (§ 452) vereinigt. Wir beginnen mit dem Fall eines starren Körpers oder Systems, worunter wir eine Gruppe materieller Punkte verstehen, welche durch die wechselseitig zwischen ihnen wirkenden Kräfte nicht in Beziehung auf äussere Körper, wohl aber in Beziehung auf einander in bestimmten Lagen festgehalten werden. Es ist diese Voraussetzung näherungsweise bei allen festen Körpern erfüllt, so lange die einwirkenden Kräfte nicht stark genug sind, die inneren molecularen Reactionen bis zu einem wahrnehmbaren Betrage zu überwinden. Wir lassen zunächst eine allgemeine Untersuchung folgen; einfachere Methoden für specielle Fälle werden später behandelt werden.

I. Nehmen wir an, es finde bloss eine Translation des Körpers nach irgend einer Richtung hin statt. Wenn dann alle Kräfte parallel dieser Richtung zerlegt werden, so wird jede Componente denselben Weg hindurch gearbeitet haben. Da aber Gleichgewicht bestehen soll, so wird keine Arbeit geleistet, und somit ist die Summe der Componenten Null.

Damit also ein starrer Körper sich im Gleichgewicht befinde, ist erforderlich, dass die (algebraische) Summe der nach jeder beliebigen Richtung genommenen Componenten aller auf ihn wirkenden Kräfte Null sei.

Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn jene Summe für drei beliebig angenommene Richtungen, die nicht einer Ebene angehören, verschwindet; denn jede Translation lässt sich in Componenten zerlegen, die drei solchen Linien parallel sind. In praktischen Fällen wählt man gewöhnlich drei zu einander senkrechte Richtungen.

II. Wir wollen weiter annehmen, es finde bloss eine Rotation des Körpers durch einen unendlich kleinen Winkel um irgend eine Axe statt. Dann ist (§ 240) die von den Kräften geleistete Gesammtarbeit das Product aus dem Rotationswinkel in die (algebraische) Summe der in Beziehung auf die Axe genommenen Momente der Kräfte. Des Gleichgewichts wegen muss dieses Product Null sein.

Damit also ein starrer Körper sich im Gleichgewicht befinde, ist erforderlich, dass die Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf jede beliebige Axe Null sei.

Da eine Rotation um eine beliebige Axe ersetzt werden kann durch Translationen parallel irgend dreien (nicht in einer Ebene liegenden) durch einen Punkt gehenden Axen und Rotationen um diese Axen, so ist für das Gleichgewicht, ausser der in (I) angegebenen Bedingung, nur noch erforderlich, dass die Summen der Momente der Kräfte in Beziehung auf drei durch einen Punkt gehende zu einander senkrechte Axen verschwinden.

III. Wenn die Kräfte sämmtlich in einer Ebene liegen, so reduciren sich die obigen sechs Bedingungen auf drei, nämlich auf: —

Die Summen der in irgend zwei (zu einander senkrechten) Richtungen genommenen Componenten der Kräfte müssen einzeln verschwinden.

Die Summe der Momente in Beziehung auf irgend eine zur Ebene der Kräfte senkrechte Axe muss verschwinden.

(a) **Analytischer Ausdruck des Gleichgewichts eines starren Körpers.** — Sind X, Y, Z die rechtwinkligen Componenten der auf den Punkt P (x, y, z) des starren Körpers wirkenden Kraft, und erfährt der Körper bloss eine Translation, welche parallel den Axen die Componenten ξ, η, ζ hat, so ist offenbar

$$\xi \Sigma(X) + \eta \Sigma(Y) + \zeta \Sigma(Z)$$

der Ausdruck der geleisteten Arbeit. Nach Lagrange's Form des Newton'schen Princips muss dieser Ausdruck verschwinden, wenn sich

der Körper unter der Einwirkung der Kräfte im Gleichgewicht befinden soll. Nun sind aber die Grössen ξ, η, ζ von einander unabhängig und können ganz beliebige Werthe haben. Es muss folglich

$$\Sigma(X) = 0, \quad \Sigma(Y) = 0, \quad \Sigma(Z) = 0$$

sein. Dies sind in der That dieselben Bedingungen wie die, welche wir schon (§ 455) für das Gleichgewicht eines materiellen Punktes erhalten haben.

(b) Weiter wollen wir voraussetzen, der Körper erfahre eine Rotation um eine beliebige Axe. Da der Anfangspunkt ein beliebiger Punkt ist, so können wir annehmen, die Axe ginge durch ihn hindurch. Die Rotation sei unendlich kleinen simultanen Rotationen ω_x, ω_y, ω_z um die Axen der x, y, z äquivalent (§ 96). Dann ersehen wir aus § 95 leicht, dass die den Axen parallelen Componenten der Verschiebung, welche der Punkt P (x, y, z) erfährt, die Grössen

$$\omega_y z - \omega_z y, \quad \omega_z x - \omega_x z, \quad \omega_x y - \omega_y x$$

sind. Die von den einwirkenden Kräften geleistete Gesammtarbeit ist folglich

$$\Sigma\{X(\omega_y z - \omega_z y) + Y(\omega_z x - \omega_x z) + Z(\omega_x y - \omega_y x)\}$$

oder

$$\omega_x \Sigma(Zy - Yz) + \omega_y \Sigma(Xz - Zx) + \omega_z \Sigma(Yx - Xy).$$

Da dieser Ausdruck verschwinden muss, und da die Grössen ω_x, ω_y, ω_z nothwendig von einander unabhängig sind, so erhalten wir die drei weiteren Bedingungen

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

(c) Wenn kein Gleichgewicht stattfindet, so erhalten wir als Resultante der Kräfte offenbar

I. Die Kräfte $\Sigma(X)$, $\Sigma(Y)$, $\Sigma(Z)$, welche im Anfangspunkt (der jeder beliebige Punkt sein kann) angreifen, und deren Richtungen den Axen parallel sind. Ihre Resultante sei R und habe die Richtungscosinus l, m, n.

II. Die Momente oder Kräftepaare

$$\Sigma(Zy - Yz), \quad \Sigma(Xz - Zx), \quad \Sigma(Yx - Xy),$$

die beziehungsweise um die Axen drehen.

Diese Kräftepaare können durch $G\lambda$, $G\mu$, $G\nu$ dargestellt werden, wo $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ist. Die physikalische Bedeutung dieser Grössen wird alsbald zu Tage treten.

(d) Wenn die Kräfte in einer Ebene liegen, etwa in der xy Ebene, so erhalten wir nur drei Bedingungen, nämlich

$$\Sigma(X) = 0, \quad \Sigma(Y) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

552. Resultante beliebiger Kräfte. — Wenn ein starrer Körper unter der Einwirkung beliebiger Kräfte sich nicht im Gleichgewicht befindet, so muss ein Agens, welches ihrer Resultante (von welcher Art diese auch sein mag) gleich und entgegengesetzt ist, im Verein mit jenen Kräften offenbar Gleichgewicht erzeugen.



Diese umgekehrte Resultante muss daher im Allgemeinen sechs Bedingungen genügen. Eine Anzahl von Kräften, die auf einen starren Körper wirken, ist also nur in speciellen Fällen einer einzigen Kraft äquivalent; diese Kräfte können aber auf unendlich viele Arten auf zwei Kräfte reducirt werden, indem vier Bedingungen sich entbehren lassen.

553. **Kräftepaare.** — Bevor wir dazu übergehen, die eben erhaltenen allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anzuwenden, ist es zweckmässig, die grosse von Poinsot erfundene Vereinfachung einzuführen, welche der Gebrauch der Kräftepaare mit sich führt. In § 234 haben wir schon die Definition eines Kräftepaares gegeben und gezeigt, dass die Summe der Momente seiner Kräfte in Beziehung auf alle zu seiner Ebene senkrechten Axen dieselbe ist. Das Paar kann also in irgend eine neue Lage seiner Ebene oder in irgend eine andere parallele Ebene verschoben werden, ohne dass seine Wirkung auf den starren Körper eine andere würde. Ebenso kann man, ohne den statischen Effect eines Kräftepaars zu ändern, den Arm desselben durch einen beliebigen Winkel in der Ebene der Kräfte drehen und die Länge des Armes und die Grösse der Kräfte nach Belieben ändern, wenn nur das Moment unverändert bleibt. Folglich wird, wie wir schon in § 234 sahen, ein Kräftepaar vollständig durch seine Axe dargestellt. Nach der in § 234 getroffenen Uebereinkunft muss die Axe eines Kräftepaars, welches eine Rotation in der Richtung der Zeiger einer Uhr zu erzeugen strebt, durch die Rückseite der Uhr gezogen werden, und umgekehrt. Es lässt sich dies leicht mit Hülfe der nebenstehenden einfachen Figur dem Gedächtniss einprägen: die Pfeilspitzen zeigen beziehungsweise die Richtung der Rotation und der Axe an.

Fig. 22.

554. **Zusammensetzung von Kräftepaaren.** — Kräftepaare werden vereinigt und zerlegt, indem man ihre Axen nach dem Parallelogramm-Gesetz in einer Weise behandelt, welche mit der nach unseren früheren Betrachtungen für lineare und angulare Geschwindigkeiten und Kräfte erforderlichen identisch ist. Es ergibt sich dies unmittelbar aus § 551, II, kann aber auch leicht synthetisch bewiesen werden. Um nämlich die Componente eines Kräftepaars, das in einer Ebene A liegt, für eine beliebige gegen A geneigte Ebene B zu finden, lassen wir (§ 553) den Arm des Paars mit dem Durchschnitt beider Ebenen zusammenfallen. Die Kräfte liegen dann in A, senkrecht zu dieser Durchschnittslinie, und man

erhält ihre Componenten für die Ebene B, wenn man mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebenen multiplicirt. In diesem Verhältniss ist daher, da der Arm derselbe geblieben ist, das Moment der Componenten in B verringert. Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist aber gleich dem Winkel zwischen zwei auf den Ebenen gezogenen Senkrechten, d. h. gleich dem Winkel, den die Axe des Paars mit der Axe der Componente einschliesst. Die Länge der Axe der Componente, die ja gleich dem Moment derselben ist, verhält sich also zur Länge der Axe des ursprünglichen Paars, wie der Cosinus des Neigungswinkels der Axen zur Einheit.

Ein Kräftepaar G, dessen Axe die Richtungscosinus λ, μ, ν hat, ist danach drei Kräftepaaren $G\lambda$, $G\mu$, $G\nu$ äquivalent, welche beziehungsweise um die Axen der x, y, z drehen. Hieran schliessen sich unmittelbar die am Schluss des § 95 gemachten Bemerkungen. Wir ersehen daraus auch die Bedeutung der Symbole des § 551 (c) II.

555. Zerlegung einer Kraft in eine Kraft und ein Kräftepaar. — Eine Kraft F, die in irgend einem Punkte A eines Körpers angreift, kann in Grösse und Richtung unverändert in einen beliebigen anderen Punkt B versetzt werden, wenn noch ein Kräftepaar eingeführt wird, dessen Moment gleich demjenigen ist, welches die in A angreifende Kraft F in Beziehung auf B hat. Denn nach dem Princip der Vereinigung von Kräften können wir in B in der zur Richtung der gegebenen Kraft F parallelen Linie ein Paar gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte F und $-F$ anbringen. Die Kraft F in A und die Kraft $-F$ in B bilden das angegebene Kräftepaar, und ausserdem haben wir noch die Kraft F in B.

Anwendung auf das Gleichgewicht eines starren Körpers. — Hieraus erhalten wir sofort die bereits zweimal (§ 551) ermittelten Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers. Jede Kraft kann nach einem beliebigen, als Coordinatenanfang angenommenen Punkte versetzt werden, wenn zugleich das entsprechende Paar eingeführt wird. Die Kräfte, die jetzt in einem Punkte angreifen, müssen nach den im Capitel VI. entwickelten Principien einander das Gleichgewicht halten, und das resultirende Kräftepaar, also seine für drei beliebige zu einander senkrechte Linien genommenen Componenten müssen verschwinden.

556. Darstellung der Kräfte durch die Seiten eines Polygons. — Wenn also Kräfte nicht bloss der Grösse und Richtung, sondern auch ihren Wirkungslinien nach, durch die in derselben Ordnung genommenen Seiten eines beliebigen ebenen oder unebenen

Polygons dargestellt werden, so sind sie einem einzigen Kräftepaar äquivalent. Denn wenn man sie in einen beliebigen Anfangspunkt versetzt, so halten sie sich nach dem Polygon der Kräfte (§§ 27, 256) das Gleichgewicht. Wenn das Polygon eben ist, so ist seine doppelte Fläche das Moment des Paares; ist das Polygon uneben, so ist die Componente des Paares für irgend eine Axe doppelt so gross, als die Fläche der Projection auf eine zu dieser Axe senkrechte Ebene. Die Axe des ganzen Paars ist in diesem Falle senkrecht zu der Ebene (§ 236), für welche die Projection der Fläche ein Maximum ist.

557. **Kräfte, die den Seiten eines Dreiecks proportional und senkrecht zu denselben sind.** — Die Linien, welche in den Mitten der Seiten eines Dreiecks auf diesen Seiten senkrecht stehen, schneiden einander in einem Punkte und bilden mit einander dieselben Winkel, wie die entsprechenden Dreiecksseiten, wenn deren Richtungen alle im Sinne eines Umlaufs genommen werden. Wenn man also in den Mittelpunkten der Seiten eines Dreiecks in der Ebene desselben nach innen zu ziehende Kräfte anbringt, deren Grössen den Seiten proportional sind, so erzeugen sie Gleichgewicht. Dasselbe ist für jede ebene Figur richtig, wie man erkennt, wenn man dieselbe in Dreiecke zertheilt. Später werden wir zeigen, dass, wenn man in den Trägheitsmittelpunkten der Grenzflächen eines beliebigen geschlossenen Polyëders Kräfte angreifen lässt, die senkrecht gegen diese Flächen nach innen ziehen und den Grössen der Flächen proportional sind, man gleichfalls ein System erhält, das sich im Gleichgewicht befindet.

558. **Zusammensetzung einer Kraft und eines Kräftepaars.** — Ein Kräftepaar und eine Kraft, deren Richtung gegen die Ebene des Paars geneigt ist, können auf ein kleineres Kräftepaar, dessen Ebene zur Richtung der Kraft senkrecht ist, und eine der gegebenen gleiche und parallele Kraft reducirt werden. Denn das Kräftepaar lässt sich in zwei Paare zerlegen, von denen das eine in einer Ebene liegt, welche die Richtung der gegebenen Kraft enthält, während die Ebene des zweiten zur Kraft senkrecht steht, und dass die Kraft und das in derselben Ebene liegende Paar einer gleich grossen und in einer parallelen Richtung, wenngleich in einer anderen Linie wirkenden Kraft äquivalent sind, ist bloss die Umkehrung des § 555.

559. **Zusammensetzung beliebiger auf einen starren Körper wirkenden Kräfte.** — Nach dem Vorhergehenden können beliebig viele auf einen starren Körper wirkende Kräfte auf

eine in einem beliebigen Punkte angreifende Kraft und ein Kräftepaar zurückgeführt werden (§ 551). Diese Kraft und das Paar lassen sich (§ 558) auf eine gleiche in einer bestimmten Linie des Körpers wirkende Kraft und ein Kräftepaar reduciren, dessen Ebene zur Kraft senkrecht ist, und welches das kleinste Paar ist, das als ein Theil der Resultante der gegebenen Kräfte erscheinen kann. Die bestimmte Linie, in welcher die letzterhaltene Kraft wirkt, heisst die Central-Axe; sie ist offenbar die Linie, in Beziehung auf welche das Moment der gegebenen Kräfte am kleinsten ist.

Unter Beibehaltung der Bezeichnung des § 551 (c) wollen wir voraussetzen, der Anfangspunkt der Coordinaten werde in den Punkt (x', y', z') verlegt. Die resultirende Kraft hat dann noch die den Axen parallelen Componenten $\Sigma(X)$, $\Sigma(Y)$, $\Sigma(Z)$, oder Rl, Rm, Rn. Die Kräftepaare sind aber

$$\Sigma[Z(y-y')-Y(z-z')],\ \Sigma[X(z-z')-Z(x-x')],\ \Sigma[Y(x-x')-X(y-y')],$$

oder

$$G\lambda-R(ny'-mz'),\ G\mu-R(lz'-nx'),\ G\nu-R(mx'-ly').$$

Die Bedingungen, dass die resultirende Kraft zur Ebene des resultirenden Paares senkrecht sei, sind

$$\frac{G\lambda-R(ny'-mz')}{l}=\frac{G\mu-R(lz'-nx')}{m}=\frac{G\nu-R(mx'-ly')}{n}.$$

Diese beiden Gleichungen zwischen x', y', z' sind die Gleichungen der Centralaxe.

Wir können dieselben auch dadurch erhalten, dass wir die Bedingungen suchen, unter welchen das resultirende Kräftepaar

$$\sqrt{[G\lambda-R(ny'-mz')]^2+[G\mu-R(lz'-nx')]^2+[G\nu-R(mx'-ly')]^2},$$

die Variationen von x', y', z' als von einander unabhängig angesehen, ein Minimum werde. Diese Methode liefert uns drei Gleichungen (da die nach x', y', z' genommenen partiellen Differentialquotienten des obigen Ausdrucks einzeln verschwinden müssen), welche sich auf die beiden schon erhaltenen reduciren lassen, und von denen wir nur die erste hinschreiben. Es ist

$$n\{G\mu-R(lz'-nx')\}-m\{G\nu-R(mx'-ly')\}=0.$$

Aus den einfachsten Eigenschaften der Kräftepaare folgt, dass das resultirende Paar in allen Punkten der Centralaxe dieselbe Grösse hat; es lässt sich dies übrigens auch leicht aus den obigen Gleichungen herleiten.

560. Vereinigung zu zwei Kräften. — Man kann die resultirende Kraft mit einer der Kräfte des resultirenden Paares vereinigen, also eine beliebige Anzahl auf einen starren Körper wirkender Kräfte auf zwei Kräfte reduciren, deren Richtungen einander nicht schneiden, und zwar kann diese Reduction offenbar auf unendlich viele Arten erfolgen. Es gibt aber einen Fall, in wel-



chem das Resultat symmetrisch ist, und dieser verdient deshalb besonders hervorgehoben zu werden.

Wir nehmen an, die Centralaxe des Systems sei gefunden. Durch einen beliebigen Punkt C dieser Axe ziehen wir senkrecht zu derselben eine Linie AA', so dass $CA = CA'$ ist. Für die in der Richtung der Centralaxe wirkende Kraft R substituiren wir (nach § 561) in jedem Endpunkte von AA' eine Kraft $\frac{1}{2}R$. Ferner wählen wir die Linie AA', die wir a nennen wollen, zum Arm des Kräftepaares. Dann haben wir in jedem Endpunkt von a zwei Kräfte, nämlich eine zur Centralaxe senkrechte Kraft $\frac{G}{a}$ und eine der Centralaxe parallele Kraft $\frac{1}{2}R$. Durch Vereinigung dieser beiden Kräfte erhalten wir zwei beziehungsweise durch A und A' gehende Kräfte, deren jede von der Grösse $\left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{G^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ und zu AA' senkrecht ist, und die zu beiden Seiten der durch AA' und die Centralaxe gelegten Ebene um den Winkel $\arctan \frac{2G}{Ra}$ geneigt sind.

561. Zusammensetzung paralleler Kräfte. — Ein sehr einfacher, aber wichtiger Fall ist der einer beliebigen Anzahl in verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifenden parallelen Kräfte.

Damit Gleichgewicht bestehe, muss hier offenbar die (algebraische) Summe der Kräfte gleich Null sein; auch müssen ihre Momente in Beziehung auf irgend zwei zur gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte senkrechte Axen verschwinden.

Ist P eine der Kräfte, (x, y, z) ihr Angriffspunkt, (l, m, n) ihre Richtungscosinus (also auch die Richtungscosinus aller übrigen Kräfte) und R die Resultante, die im Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ angreift, so erhalten wir $\Sigma(P) = R$ und

$$\Sigma(Pny - Pmz) = Rn\bar{y} - Rm\bar{z},$$

sowie zwei andere ähnliche Gleichungen. Daraus folgt

$$\Sigma(P) = R,$$

$$\Sigma(Px) = R\bar{x},\ \Sigma(Py) = R\bar{y},\ \Sigma(Pz) = R\bar{z}.$$

Die Lösung ist bestimmt und führt zu einem besonderen Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, dessen Lage von den Grössen l, m, n unabhängig ist. Wir schliessen daraus: —

Wenn kein Gleichgewicht besteht, so ist die Resultante einer Anzahl solcher Kräfte eine der (algebraischen) Summe derselben gleiche Kraft, welche in einem bestimmten Punkte im Körper, dem

sogenannten Mittelpunkt der parallelen Kräfte, angreift. Die Lage dieses Punktes hängt von den relativen Grössen und von den Angriffspunkten, nicht aber von der gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte ab.

562. Schwerpunkt. — Aus den Formeln des § 230 erhellt, dass, wenn in die verschiedenen Angriffspunkte dieser Kräfte Massen gesetzt werden, welche den Kräften proportional sind, der Trägheitsmittelpunkt dieser Massen derselbe Punkt im Körper, wie der Mittelpunkt der parallelen Kräfte sein wird. Folglich lassen sich die Gegenwirkungen, welche die verschiedenen Theile eines starren Körpers einer Beschleunigung in parallelen Richtungen entgegensetzen, in aller Strenge auf eine im Trägheitsmittelpunkt angreifende Kraft reduciren. Dasselbe gilt näherungsweise von der Wirkung, welche die Schwerkraft auf einen starren Körper ausübt, dessen Dimensionen klein im Verhältniss zu denjenigen der Erde sind, und daher wird der Trägheitsmittelpunkt auch zuweilen (§ 230) der Schwerpunkt genannt. Die Schwerkraft kann aber, ausser bei einem centrobarischen Körper (§ 527), im Allgemeinen nicht auf eine einzige Kraft reducirt werden, und wenn dies möglich ist, so geht diese Kraft nicht durch einen in Beziehung auf den Körper in allen seinen Lagen festen Punkt.

563. Parallele Kräfte, deren algebraische Summe Null ist. — In einem Falle hat man den am Schluss des § 561 gegebenen Ausspruch zu modificiren, nämlich wenn die algebraische Summe der gegebenen Kräfte verschwindet. In diesem Falle ist die Resultante ein Kräftepaar, dessen Ebene der Richtung der Kräfte parallel ist. Ein gutes Beispiel hierfür liefert eine magnetisirte Stahlmasse von geringen Dimensionen, welche nur der Einwirkung des Erdmagnetismus unterworfen ist. Wie wir später sehen werden, befindet sich in jedem Element der Masse dasselbe Quantum des sogenannten Nord- und Süd-Magnetismus; die Elemente sind daher gleichen und entgegengesetzten Kräften unterworfen, welche sämmtlich der Linie der Inclination parallel sind. Eine Compassnadel wird daher vom Erdmagnetismus im Ganzen weder angezogen noch abgestossen, sondern es erleidet nur ihre Richtung eine Aenderung, wie wenn sie unter dem Einfluss eines Kräftepaars stände.

564. Bedingungen für das Gleichgewicht dreier Kräfte. — Wenn drei auf einen starren Körper wirkende Kräfte Gleichgewicht erzeugen, so müssen ihre Richtungen in einer Ebene liegen und einander entweder in einem Punkte schneiden oder parallel sein. Dies zu beweisen, wollen wir eine Betrachtung einführen, welche

uns in der Statik der biegsamen Körper und der Flüssigkeiten in mehreren Untersuchungen von grossem Nutzen sein wird.

Physikalisches Axiom. — Wenn beliebige auf einen festen oder flüssigen Körper wirkende Kräfte Gleichgewicht erzeugen, so können wir, ohne das Gleichgewicht zu stören, annehmen, dass irgend welche Theile des Körpers festgelegt, oder starr, oder starr und festgelegt werden.

Dies Princip wollen wir auf den vorliegenden Fall anwenden. Nehmen wir zwei beliebige Punkte des Körpers, welche beziehungsweise in den Wirkungslinien zweier der Kräfte liegen, als fest an, so darf die dritte Kraft in Beziehung auf die Verbindungslinie dieser Punkte kein Moment haben, d. h. ihre Richtung muss durch diese Verbindungslinie hindurchgehen. Nun können wir aber zwei ganz beliebige Punkte der Wirkungslinien nehmen; folglich gehören die Richtungen der drei Kräfte einer Ebene an, und drei in einer Ebene liegende Kräfte können nur dann einander das Gleichgewicht halten, wenn ihre Richtungen entweder durch einen Punkt gehen oder parallel sind.

565. Gleichgewicht unter der Wirkung der Schwerkraft. — Es ist leicht und nützlich, verschiedene Gleichgewichtsfälle zu betrachten, in denen auf einen starren Körper keine anderen Kräfte wirken, als die Schwere und der normale oder tangentiale Druck zwischen dem Körper und festen Unterlagen. So leuchtet ein, dass, wenn nur ein Punkt des Körpers festgelegt ist, sein Schwerpunkt in der durch diesen Punkt gehenden Verticalen liegen muss; denn sonst würden sein Gewicht und die Reaction der Unterlage ein Kräftepaar bilden, das durch keine Gegenwirkung aufgehoben würde. Ferner sehen wir, dass bei stabilem Gleichgewicht der Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkt liegen muss. Auf diese Weise können wir einen Körper von beliebiger Form auf einer Nadelspitze in stabiles Gleichgewicht bringen, wenn wir mit demselben eine Masse von solcher Grösse starr verbinden, dass der gemeinschaftliche Schwerpunkt unter die Nadelspitze zu liegen kommt.

566. Wagsteine. — Einen interessanten Gleichgewichtsfall liefern uns die sogenannten Wagsteine, bei denen, durch natürliche oder künstliche Processe, die untere Oberfläche einer lockeren Felsmasse auf eine convexe Form gebracht ist, die annähernd sphärisch sein möge, während die Felslage, auf der sie im Gleichgewichtszustande ruht, convex oder concav und zwar gleichfalls annähernd sphärisch, wenn nicht eben ist. Eine auf einer sphärischen

Oberfläche ruhende Kugel, welche an einer Stelle in der Nähe ihrer Oberfläche aus einem schwereren Stoffe als an den übrigen Stellen besteht, ist daher ein Repräsentant solcher Fälle.

Es sei O der Krümmungsmittelpunkt des festen Körpers, O' die Lage, welche der Krümmungsmittelpunkt des darauf liegenden beweglichen Körpers im Gleichgewichtszustande einnimmt. Wir nehmen zwei beliebige unendlich kleine gleiche Bogen PQ, Pp an und ziehen QR durch Q so, dass $\measuredangle O'QR = \measuredangle POp$ wird. Wenn die Punkte Q und p durch eine Verschiebung aufeinander fallen, so wird QR offenbar eine Verticale sein, und wenn der Schwerpunkt G, welcher in OPO' liegen muss, wenn der bewegliche Körper seine Gleichgewichtslage einnimmt, zur Linken von QR liegt, so wird das Gleichgewicht stabil sein. Das Gleichgewicht ist folglich stabil, wenn G tiefer als R liegt, sonst nicht.

Fig. 23.

Sind jetzt ϱ und σ die Krümmungsradien OP und $O'P$ der beiden Oberflächen, und ϑ der Winkel POp, so ist der Winkel $QO'R = \frac{\varrho\vartheta}{\sigma}$, und wir haben in dem Dreieck $QO'R$ (§ 112)

$$RO' : \sigma = \sin\vartheta : \sin\left(\vartheta + \frac{\varrho\vartheta}{\sigma}\right)$$

$$= \sigma : \sigma + \varrho \text{ (näherungsweise).}$$

Folglich ist

$$PR = \sigma - \frac{\sigma^2}{\sigma + \varrho} = \frac{\varrho\sigma}{\varrho + \sigma},$$

und daher muss, wenn das Gleichgewicht stabil sein soll,

$$PG < \frac{\varrho\sigma}{\varrho + \sigma}$$

sein. Wenn die untere Oberfläche eben ist, so ist ϱ unendlich gross, und die Bedingung geht (wie in § 291) über in

$$PG < \sigma.$$

Ist die untere Oberfläche concav, so hat man das Zeichen von ϱ zu ändern und erhält als Bedingung

$$PG < \frac{\varrho\sigma}{\varrho - \sigma},$$

welcher Ausdruck nicht negativ sein kann, da ϱ in diesem Falle numerisch grösser als σ sein muss.

567. Gleichgewicht um eine Axe. — Wenn zwei Punkte fest sind, so ist die einzige dem System mögliche Bewegung eine Rotation um eine feste Axe. Der Schwerpunkt muss dann in der durch jene Punkte gehenden Verticalebene und unter der Verbindungslinie derselben liegen.

568. Gleichgewicht auf einer festen Oberfläche. — Wenn ein starrer Körper auf einer festen Oberfläche ruht, so wird es im Allgemeinen nur drei Berührungspunkte zwischen beiden geben (§ 427), und der Körper wird sich in stabilem Gleichgewicht befinden, wenn die von seinem Schwerpunkt aus gezogene Verticallinie die Ebene dieser drei Punkte innerhalb des Dreiecks trifft, dessen Ecken sie bilden. Denn wenn eine dieser Stützen entfernt wird, so hat der Körper offenbar das Bestreben, nach dieser Stütze hin zu fallen; jede derselben hindert also den Körper, um die Verbindungslinie der beiden anderen zu rotiren. So z. B. steht ein Körper in stabilem Gleichgewicht auf einer geneigten Ebene (falls die Reibung stark genug ist, um ein Gleiten zu verhindern), wenn die durch seinen Schwerpunkt gezogene Verticallinie die Ebene innerhalb der Basis, d. h. des Flächenstücks trifft, das von der kürzesten Linie begrenzt wird, die man um den mit der Ebene in Berührung stehenden Theil ziehen kann. Daher kann ein Körper, der auf einer horizontalen Ebene nicht stehen kann, auf einer geneigten Ebene zum Stehen gebracht werden.

569. Satz von Pappus. — Wir wollen hier einen von Pappus entdeckten, aber gewöhnlich dem Guldinus zugeschriebenen merkwürdigen Satz erwähnen, da er in einigen Fällen zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers mit Erfolg angewandt wird, obschon er in Wirklichkeit nur eine von den geometrischen Eigenschaften des Trägheitsmittelpunktes ausspricht. Der Beweis folgt leicht aus § 230. Der Satz lautet: —

Wenn ein durch eine Curve umgrenzter Theil einer Ebene um eine in der Ebene liegende Axe durch irgend einen Winkel rotirt, so ist der Rauminhalt der erzeugten Oberfläche gleich dem Product aus dem erzeugenden Ebenentheil in die Länge des von seinem Schwerpunkte beschriebenen Weges, und die Grösse des gekrümmten Theils der Oberfläche gleich dem Product aus der Länge der Curve in die Länge des von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Weges.

570. Die allgemeinen Principien, nach welchen die Kräfte zu behandeln sind, die aus der Gebundenheit eines Systems und von der

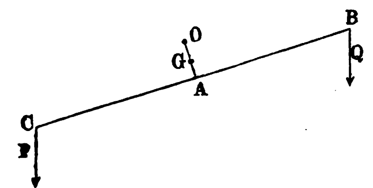
Reibung herrühren, sind schon oben (§§ 293, 329, 452) angegeben. Zur Erläuterung der Anwendung dieser Principien lassen wir einige Beispiele folgen, und zwar wollen wir das Gleichgewicht eines starren Körpers in einigen der wichtigeren praktischen Fälle von Gebundenheit betrachten.

571. Maschinen. — Die Anwendung der Principien der Statik auf die einfachen Maschinen und die, wenn auch noch so zusammengesetzten, Combinationen derselben, fordert Nichts weiter, als dass man die kinematischen Relationen (wie in §§ 79, 85, 102, u. s. w.) feststelle und sodann in die Dynamik übertrage. Dies geschieht mittels des Newton'schen Princips (§ 269) oder mittels des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten (§ 289), bei dessen Anwendung aber besondere Aufmerksamkeit auf die Einführung der Kräfte der Reibung (wie in § 452) zu richten ist. Dies Verfahren kann in keinem Falle andere Schwierigkeiten involviren als solche, wie sie die Bestimmung der geometrischen Bedingungen irgend einer unendlich kleinen Verschiebung mit sich bringt, und dann die Lösung der Gleichungen, zu denen uns die Uebertragung in die Dynamik führt. Wir wollen uns daher nicht dabei aufhalten, eine dieser Fragen zu discutiren, sondern, bevor wir diesen Theil unseres Gegenstandes für einige Zeit verlassen, nur noch einige Beispiele betrachten, die keine grosse Schwierigkeit darbieten. Die schon entwickelten Principien werden im übrigen Theil dieses Werkes beständig benutzt werden, und werden wir noch oft Gelegenheit finden, ihren Nutzen und die Art und Weise, wie sie anzuwenden sind, an Beispielen zu erläutern.

Wir wollen mit dem Fall einer Wage beginnen, deren nähere Untersuchung uns (§ 431) noch obliegt.

572. Beispiel I. **Die Wage.** — Wir nehmen an, die Verbindungslinie der Punkte, in welchen die Wagschalen an die Arme befestigt sind, stehe senkrecht auf der Linie, welche den Schwerpunkt des Balkens mit dem Unterstützungspunkt verbindet. Offenbar darf der Schwerpunkt des Balkens nicht in die Spitze der Schneide fallen, auf welcher der Balken ruht, da derselbe sonst in jeder Lage im Gleichgewicht sein würde. Wir wollen erstens voraussetzen, die Arme seien von ungleicher Länge.

Fig. 24.



Es sei O der Unterstützungspunkt, G der Schwerpunkt, M

die Masse des Balkens, und es werde angenommen, derselbe komme, wenn die Schalen die Gewichte P und Q enthalten, in einer Lage zur Ruhe, die mit der horizontalen Richtung einen Winkel ϑ bildet (Fig. 24).

Empfindlichkeit. — Nehmen wir die Momente in Beziehung auf den Punkt O und setzen dabei der Einfachheit wegen voraus, die Kräfte seien nach dem in § 220 erläuterten Princip gemessen, so erhalten wir

$$Q(AB.\cos\vartheta + OA.\sin\vartheta) + M.OG.\sin\vartheta$$
$$= P(AC.\cos\vartheta - OA.\sin\vartheta).$$

Hieraus ergibt sich

$$\tan\vartheta = \frac{P.AC - Q.AB}{(P+Q).OA + M.OG}.$$

Wenn die Arme gleich sind, so geht dies über in

$$\tan\vartheta = \frac{(P-Q)\,AB}{(P+Q).OA + M.OG}.$$

Danach ist die Empfindlichkeit (§ 431) der Wage um so grösser, (1) je länger die Arme sind, (2) je kleiner die Masse des Balkens ist, (3) je näher der Unterstützungspunkt der Verbindungslinie der Punkte ist, in welchen die Schalen an dem Balken befestigt sind, (4) je näher der Unterstützungspunkt dem Schwerpunkt des Balkens liegt. Wenn der Unterstützungspunkt in der Verbindungslinie der Aufhängungspunkte der Schalen liegt, so ist die Empfindlichkeit für dieselbe Differenz der Belastungen der Schalen unabhängig von der Grösse dieser Belastungen.

Stabilität. — Um die Stabilität zu bestimmen, haben wir die Dauer der Oscillationen zu suchen, welche eintreten, wenn die Wage eine geringe Ablenkung aus der Gleichgewichtslage erfährt. Mit Rücksicht auf ein späteres Capitel wird sich zeigen, dass die Gleichung der Bewegung näherungsweise

$$\{Mk^2 + (P+Q)\,AB^2\}\,\ddot{\vartheta} + Qg(AB\cos\vartheta + OA\sin\vartheta)$$
$$+ Mg\,OG\sin\vartheta - Pg\,(AC\cos\vartheta - OA\sin\vartheta) = 0$$

ist, wo k den Gyrationsradius (§ 281) des Balkens bezeichnet. Werden die Arme und ihre Belastungen als gleich vorausgesetzt, so erhalten wir für die Dauer einer unendlich kleinen Oscillation

$$\pi\sqrt{\frac{Mk^2 + 2P.\overline{AB}^2}{(2P.OA + M.OG)g}}.$$

Für eine gegebene Belastung ist die Stabilität also um so grösser, (1) je kleiner die Länge des Balkens ist, (2) je kleiner seine Masse ist, (3) je kleiner sein Gyrationsradius ist, (4) je weiter der Unterstützungspunkt von dem Balken und von dem Schwerpunkt desselben entfernt ist. Diese Erfordernisse sind, mit Ausnahme der zweiten, den für die Empfindlichkeit ermittelten direct entgegengesetzt, und daher bleibt nichts Anderes übrig, als einen angemessenen Compromiss zu schliessen. Je geringer aber die Masse des Balkens ist, um so besser ist die Wage, sowohl hinsichtlich der Empfindlichkeit, als auch der Stabilität.

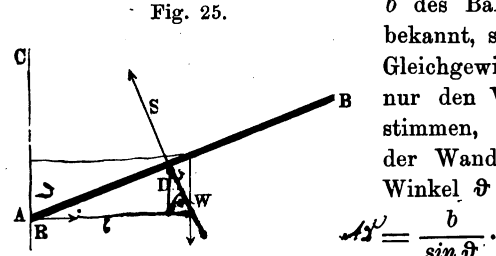
Die oben gegebene allgemeine Gleichung zeigt, dass die Empfindlichkeit zunimmt, wenn man die Länge und den Gyrationsradius eines Armes verringert und zugleich die entsprechende Belastung in solchem Grade vergrössert, dass das Gleichgewicht erhalten bleibt. Diese Form der Wage ist zuweilen von Nutzen.

Beispiel II. **Eine Stange auf einer glatten Stütze.** — Die Gleichgewichtslage einer Stange AB zu finden, welche auf einem glatten horizontalen Balken D ruht und mit ihrem tieferen Ende gegen eine dem Balken parallele glatte verticale Wand drückt.

Die Figur 25 stellt einen Verticaldurchschnitt der Stange dar, die offenbar in einer zur Mauer und dem Balken senkrechten Ebene liegen muss. Das Gleichgewicht ist augenscheinlich instabil.

Es wirken in diesem Falle nur drei Kräfte, nämlich: der Druck R der Wand auf die Stange, in horizontaler Richtung; der Druck S des Balkens auf die Stange, senkrecht zu derselben; das Gewicht W der Stange, welches im Schwerpunkt derselben vertical nach unten zieht. Ist die halbe Länge a der Stange und der Abstand b des Balkens von der Wand bekannt, so haben wir, um die Gleichgewichtslage zu fixiren, nur den Winkel CAB zu bestimmen, den die Stange mit der Wand bildet. Wird dieser Winkel ϑ genannt, so ist AD

Fig. 25.



$$= \frac{b}{\sin \vartheta}.$$

Um die Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln, haben wir S in eine horizontale und eine verticale Componente zu zerlegen. Dadurch erhalten wir zunächst die Bedingungen

$$(1) \qquad R - S \cos \vartheta = 0,$$

$$(2) \qquad W - S \sin \vartheta = 0.$$

Weiter nehmen wir die Momente in Beziehung auf A und erhalten

$$S.AD - W.a \sin \vartheta = 0,$$

oder

$$(3) \qquad S.b - W.a \sin^2 \vartheta = 0.$$

Da diese drei Gleichungen nur die drei unbekannten Grössen R, S, ϑ enthalten, so bestimmen sie die Aufgabe vollständig. Aus (2) und (3) folgt

$$\sin^3 \vartheta = \frac{b}{a}, \text{ wodurch } \vartheta \text{ bestimmt wird.}$$

Dann ist nach (2)

$$S = \frac{W}{\sin \vartheta},$$

und endlich nach (1)

$$R = S \cos \vartheta = W \operatorname{cotan} \vartheta.$$

Beispiel III. **Eine Stange auf rauhen Stützen.** — Als Zusatz wollen wir noch den Fall betrachten, in welchem die Wand und der Balken des vorigen Beispiels rauh sind, und zwar sei μ der Coefficient der statischen Reibung für beide. Wenn die Stange in die Gleichgewichtslage gebracht wird, die wir eben für den Fall, in welchem keine Reibung eintreten kann, bestimmt haben, so wird auch unter den jetzt vorliegenden Verhältnissen keine Reibung ins Leben gerufen werden, da die Stange nicht das Bestreben hat, eine Bewegung anzunehmen, ein solches Bestreben also auch nicht zu überwinden ist. Wird das Ende A der Stange immer weiter nach unten gerückt, so wird immer mehr Reibung erweckt, um das Streben der Stange, zwischen der Wand und dem Balken hinunterzufallen, zu überwinden. Endlich gelangen wir zu einer Grenzlage, über welche hinaus der Endpunkt A nicht gebracht werden darf, ohne dass die Stange wirklich hinunterfiele. In dieser Lage wirkt die Reibung in A nach oben und ist μ mal so gross, als der Druck auf die Wand. Die Reibung in D ist μ mal so gross, als der Druck auf die Stange, und wirkt in der Richtung DB. Setzen wir in diesem Falle $\measuredangle CAD = \vartheta_1$, so gehen unsere drei Gleichungen über in

$$(1_1) \qquad R_1 + \mu S_1 \sin \vartheta_1 - S_1 \cos \vartheta_1 = 0,$$

$$(2_1) \qquad W - \mu R_1 - S_1 \sin \vartheta_1 = 0,$$

$$(3_1) \qquad S_1 b - W a \sin^2 \vartheta_1 = 0.$$

Da die Richtungen beider Reibungskräfte durch A gehen, so erscheint keine derselben in (3_1). Dies ist der Grund, warum es

zweckmässiger ist, die Momente in Beziehung auf A zu nehmen, als in Beziehung auf irgend einen anderen Punkt.

Werden R_1 und S_1 aus diesen Gleichungen eliminirt, so erhalten wir die Formel

$$(4_1) \qquad 1 - \frac{a}{b} \sin^3 \vartheta_1 = \mu \frac{a}{b} \sin^2 \vartheta_1 \; (\cos \vartheta_1 - \mu \sin \vartheta_1),$$

aus der sich ϑ_1 bestimmen lässt. Ist das geschehen, so liefert (3_1) den Werth von S_1 und jede der beiden anderen Gleichungen den Werth von R_1.

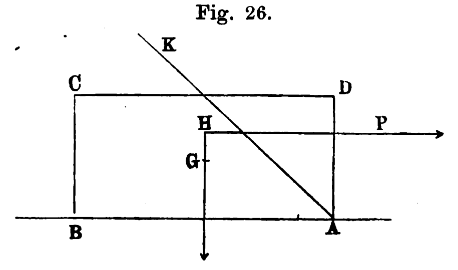
Wird der Endpunkt A der Stange von der Lage aus, in welcher ohne Mitwirkung der Reibung Gleichgewicht besteht, in die Höhe gerückt, so nimmt die Stange das Bestreben an, auf der anderen Seite des Balkens hinunterzufallen. Je höher A rückt, desto mehr Reibung wird erweckt, bis die Stange eine durch den Winkel ϑ_2 bestimmte Lage annimmt, in welcher die Reibung ihren grössten Werth, das μ fache des Druckes, erreicht. Auf diese Weise finden wir eine zweite Grenzlage für die Stabilität. Zwischen beiden Grenzlagen befindet sich die Stange überall im Gleichgewicht.

Es ist nützlich zu bemerken, dass die Richtung der Reibung in diesem zweiten Falle stets derjenigen im ersteren Falle entgegengesetzt ist, und dass man dieselben Gleichungen zur Bestimmung beider Grenzlagen benutzen kann, wenn man den analytischen Kunstgriff anwendet, das Zeichen von μ zu ändern. Auf diese Weise erhalten wir aus (4_1) für ϑ_2 die Gleichung

$$1 - \frac{a}{b} \sin^3 \vartheta_2 = - \mu \frac{a}{b} \sin^2 \vartheta_2 \, (\cos \vartheta_2 + \mu \sin \vartheta_2).$$

Beispiel IV. **Ein Block auf einer rauhen Ebene.** — Ein Block, dessen Grenzflächen senkrecht auf einander stehen, liegt auf einer rauhen Horizontalebene, und es wirkt auf ihn eine horizontale

Fig. 26.



Kraft, deren Wirkungslinie von zwei verticalen Grenzflächen gleich weit entfernt ist. Man soll bestimmen, wie gross die Kraft

sein muss, damit sie zur Erzeugung einer Bewegung genüge, und untersuchen, ob diese Bewegung in einem Gleiten oder einem Umfallen des Blockes besteht.

Wenn die Kraft P den Körper umzuwerfen strebt, so leuchtet ein, dass derselbe sich um die Kante A drehen wird; daher wirken der Druck R der Ebene und die Reibung S an dieser Kante. Unsere statischen Bedingungen sind natürlich

$$R = W,$$
$$S = P,$$
$$Wb = Pa,$$

wo b die halbe Länge des Blocks und a der Abstand der Kraft P von der Ebene ist. Daraus folgt

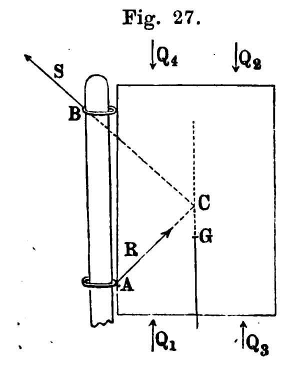
$$S = \frac{b}{a} W.$$

Nun kann S nicht grösser als μR sein; folglich darf $\frac{b}{a}$ nicht grösser als μ sein, wenn es möglich sein soll, den Körper durch eine horizontale Kraft in der für P gegebenen Linie umzustürzen.

Dieses Problem und andere der Art lassen sich mittels einer einfachen geometrischen Construction lösen, welche, wie sich leicht ersehen lässt, bloss eine graphische Darstellung des obigen Verfahrens ist. Wenn wir nämlich die Richtungen der einwirkenden Kraft und des Gewichtes bis zu ihrem Durchschnitt in H verlängern und in A einen Winkel BAK construiren, dessen Cotangente gleich dem Reibungscoefficienten ist, so wird die Kraft den Körper umzustürzen suchen oder nicht, je nachdem H über oder unter AK liegt.

Beisiel V. **Unterstützung einer Masse durch zwei Ringe, die um einen rauhen Pfosten gehen.** — Eine Masse, etwa ein Thor, wird von zwei Ringen A und B getragen, welche lose um einen rauhen verticalen Pfosten gehen. Wenn Gleichgewicht besteht, so muss offenbar in A der dem Thore am nächsten liegende und in B der vom Thore am weitesten entfernte Theil des Ringes mit dem Pfosten in Berührung sein. Die auf die Ringe ausgeübten Druckkräfte R und S werden augenscheinlich die in der Figur angegebenen Richtungen AC, CB haben. Wenn

Fig. 27.



die Masse nur der Einwirkung der Schwerkraft unterliegt, so muss die Wirkungslinie ihres Gewichtes W durch den Punkt C gehen (§ 564), und es leuchtet ein, dass, wie klein auch der Reibungscoefficient sein mag (wenn überhaupt nur eine Reibung vorhanden ist), Gleichgewicht immer möglich ist, wenn der Abstand des Schwerpunkts vom Pfosten gross genug ist im Vergleich zum Abstande der beiden Ringe.

Wenn die Masse gerade im Begriff ist hinabzugleiten, so wird die Reibung in ihrer vollen Kraft ins Leben gerufen, und jeder der Winkel, welchen R und S mit dem Horizont bilden, ist gleich dem Ruhewinkel. Ziehen wir dieser Bedingung gemäss AC, BC, so ist die Bedingung fürs Gleichgewicht, dass der Schwerpunkt G nicht zwischen dem Pfosten und der durch C gehenden Verticalen liege. Liegt G, wie in der Figur, in dieser Verticallinie, so wird eine in Q_1 nach oben zu, oder eine in Q_2 nach unten zu wirkende Kraft das Streben der Masse, hinunterzufallen, aufheben; dagegen wird eine in Q_3 nach oben zu oder in Q_4 nach unten zu gerichtete Kraft ein sofortiges Gleiten bewirken.

Durch eine ähnliche Untersuchung lässt sich der Druck einer Schieb- oder Zugvorrichtung bestimmen und der Punkt ermitteln, in welchem eine Kraft angreifen muss, um Bewegung zu erzeugen. Wir überlassen dies dem Leser.

573. Nachdem wir so in Kürze das Gleichgewicht eines starren Körpers betrachtet haben, wollen wir, bevor wir uns zur Untersuchung der Deformation elastischer fester Körper wenden, einige Uebergangsfälle behandeln, in deren jedem eine besondere Voraussetzung der Betrachtung zu Grunde gelegt wird, wodurch eine beträchtliche Menge analytischer Schwierigkeiten vermieden werden.

574. Gleichgewicht einer biegsamen und unausdehnbaren Schnur. — Ausgezeichnete Beispiele dieser Art liefert die Statik einer biegsamen und unausdehnbaren Schnur oder Kette, die an ihren beiden Endpunkten befestigt und der Einwirkung beliebiger Kräfte unterworfen ist. Die Curve, in welcher die Kette in irgend einem Falle herabhängt, soll eine Kettenlinie genannt werden, obgleich dieser Ausdruck gewöhnlich nur im Falle einer gleichförmigen Schnur gebraucht wird, auf welche keine Kraft ausser der Schwere wirkt.

575. Es sind drei Untersuchungsmethoden möglich. — Wir können die Gleichgewichtsbedingungen jedes Elements einzeln betrachten, oder auch die allgemeine Bedingung (§ 292), dass im Falle eines beliebigen conservativen Kräftesystems die gesammte

potentielle Energie ein Minimum ist, anwenden; endlich können wir auch, namentlich wenn die Schwere die einzige äussere Kraft ist, das Gleichgewicht eines endlichen Theils der Kette betrachten, der dann als ein starrer Körper behandelt wird (§ 564).

576. Gleichungen des Gleichgewichts in Beziehung auf die Tangente und die osculatorische Ebene. — Die erste dieser drei Methoden liefert für die Kettenlinie im ganz allgemeinen Falle unmittelbar die drei folgenden Gleichungen des Gleichgewichts: —

(1) Das Verhältniss der Aenderung der Spannung in einem Curvenbogen zur Länge dieses Bogens ist gleich der für die Längeneinheit genommenen tangentialen Componente der einwirkenden Kraft.

(2) Die Krümmungsebene der Schnur enthält die normale Componente der einwirkenden Kraft, und der Krümmungsmittelpunkt liegt auf der Seite des Bogens, nach welcher diese Kraft nicht hinwirkt.

(3) Die Krümmung ist in jedem Punkte gleich der für die Längeneinheit genommenen normalen Componente der einwirkenden Kraft, dividirt durch die Spannung, welche die Schnur in demselben Punkte hat.

Der erste dieser Sätze sagt einfach, dass ein unendlich kleines Element der Schnur sich, was eine tangentiale Bewegung betrifft, im Gleichgewicht befindet. Die beiden anderen Sätze drücken aus, dass die Componente der an den beiden Endpunkten eines unendlich kleinen Bogens vorhandenen Spannungen, genommen längs der durch den Mittelpunkt dieses Bogens gehenden Normalen, direct entgegengesetzt und gleich der normalen Componente der einwirkenden Kraft und gleich dem ganzen Betrage derselben für den Bogen ist. Denn die Ebene der Tangenten, in welchen jene Spannungen wirken, ist (§ 8) die Krümmungsebene. Ist nun ϑ der Winkel zwischen beiden Tangenten (oder der unendlich kleine Winkel, welcher dem von ihren positiven Richtungen gebildeten Winkel an π fehlt) und T das arithmetische Mittel ihrer Grössen, so ist die längs der Halbirungslinie des von ihren positiven Richtungen gebildeten Winkels genommene Componente ihrer Resultante genau gleich $2\,T \sin \frac{1}{2}\,\vartheta$ oder, da ϑ unendlich klein ist, gleich $T\vartheta$. Wir erhalten folglich $T\vartheta = N\delta s$, wenn δs die Länge des Bogens und $N\delta s$ die gesammte auf ihn wirkende normale Kraft ist. Nach § 9 haben wir aber $\vartheta = \frac{\delta s}{\varrho}$, wenn ϱ der Krümmungsradius ist, mithin

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{N}{T},$$

und dies ist die oben in (3) in Worten ausgesprochene Gleichung.

577. Integral der Spannung. — Aus § 576 (1) sehen wir, dass, wenn die auf einen jeden Punkt der Schnur einwirkenden Kräfte ein conservatives System bilden, und wenn alle gleichen unendlich kleinen Längselemente der Schnur eine Kraft von derselben Grösse und derselben Richtung erfahren, sobald sie durch eine Bewegung der Schnur in gleiche Lage gebracht werden, die Differenz der Spannungen der Schnur in irgend zweien ihrer Punkte in der Gleichgewichtslage gleich der Differenz der Potentiale (§ 485) der Kräfte in den von diesen Punkten eingenommenen Lagen ist. Welches daher auch die Lage ist, in der das Potential gleich Null gerechnet wird, die Spannung der Schnur ist in jedem Punkte gleich dem Werthe, den das um eine Constante vermehrte Potential am Orte jenes Punktes hat.

578. Gleichungen des Gleichgewichts in cartesischen Coordinaten. — Statt die Componenten der Kräfte in der Richtung der Tangente und senkrecht zu dieser Richtung zu nehmen, können wir dieselben sämmtlich parallel einer beliebigen festen Richtung zerlegen. Wir finden auf diese Weise, dass die für die Einheit der Länge der Schnur genommene Componente der einwirkenden Kraft in jedem Punkte gleich dem Verhältniss der Abnahme der der festen Richtung dieser Componente parallelen Spannung zur Einheit der Länge der Schnur ist. Wählen wir daher drei beliebige zu einander senkrechte feste Richtungen, so erhalten wir drei Differentialgleichungen, welche für die analytische Behandlung der Kettenlinien mittels der Methode der rechtwinkligen Coordinaten geeignet sind.

Diese Gleichungen sind

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dx}{ds}\right) = -\sigma X \\ \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dy}{ds}\right) = -\sigma Y \\ \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dz}{ds}\right) = -\sigma Z, \end{cases}$$

wo s die Länge der Schnur von einem beliebigen Punkte an bis zu einem Punkte P bezeichnet, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind; X, Y, Z sind die für die Masseneinheit der Schnur genommenen Componenten der in P angreifenden Kräfte; σ ist die Masse eines in P liegenden Elements der Schnur, dividirt durch die Länge dieses Elements; endlich ist T die Spannung der Schnur im Punkte P.

Mittels dieser Gleichungen kann man die Sätze (1), (2) und (3) des § 576 auf folgende Weise analytisch beweisen: — Werden die Gleichungen addirt, nachdem die erste mit dx, die zweite mit dy, die dritte mit dz multiplicirt worden ist, so folgt, der Relation

$$\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds}=\tfrac{1}{2}\,d\,\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2}=0$$

wegen,

$$(2)\qquad dT=-\sigma\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=-\sigma\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

und diese Formel enthält den Satz (1) des § 576. Wird weiter dT und T eliminirt, so erhalten wir

$$(3)\qquad \begin{cases} X\left(\frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds}-\frac{dz}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds}\right)+Y\left(\frac{dz}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds}-\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds}\right)\\ \qquad +Z\left(\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds}\right)=0; \end{cases}$$

diese Gleichung zeigt (§§ 9, 26), dass die Resultante von X, Y, Z in der osculatorischen Ebene liegt, und ist folglich der analytische Ausdruck von § 576 (2). Werden endlich die Gleichungen (1) addirt, nachdem man die erste mit $d\,\frac{dx}{ds}$, die zweite mit $d\,\frac{dy}{ds}$, die dritte mit $d\,\frac{dz}{ds}$ multiplicirt hat, so ergibt sich

$$(4)\qquad T=-\sigma\,\frac{\left(X\,d\,\frac{dx}{ds}+Y\,d\,\frac{dy}{ds}+Z\,d\,\frac{dz}{ds}\right)ds}{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2},$$

und dies ist der analytische Ausdruck von § 576 (3).

579. Methode der Energie. — Dieselben Gleichungen des Gleichgewichts lassen sich aus der Bedingung herleiten, welcher die Energie im Falle des Gleichgewichts genügen muss; analytisch geschieht dies leicht mittels der Methoden der Variationsrechnung.

Es sei V das Potential der äusseren Kräfte im Punkte (x, y, z) für die Einheit der Masse der Schnur. Dann ist die potentielle Energie einer beliebig gegebenen Länge der Schnur in irgend einer wirklichen Lage zwischen zwei gegebenen festen Punkten gleich

$$\int V\sigma\,ds.$$

Dies Integral, das für die gegebene Länge der Schnur zwischen den gegebenen Punkten zu nehmen ist, muss ein Minimum sein, während das unbestimmte Integral s, von einem Endpunkt an bis zum Punkte (x, y, z) genommen, durch die Aenderungen der Lagen dieses Punktes nicht geändert wird. Nach den Principien der Variationsrechnung muss daher

$$\delta\int V\sigma\,ds+\int\lambda\,\delta\,ds=0$$

sein, wo λ eine zu eliminirende Function von x, y, z ist.



Nun ist σ eine Function von s, und da s sich nicht ändert, wenn x, y, z in $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ (die Coordinaten, welche derselbe Punkt der Kette in einer anderen Lage hat) übergehen, so erhält man

$$\delta(\sigma V) = \sigma \delta V = -\sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z).$$

Ferner ist

$$\delta ds = \frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z}{ds}.$$

Wenn wir diese beiden Formeln auf die vorige Gleichung anwenden und das letzte Glied derselben auf die gewöhnliche Weise partiell integriren, so erhalten wir

$$\int ds \left\{ \left[\sigma X + \frac{d}{ds} \left(\overline{V\sigma + \lambda} \frac{ds}{dx} \right) \right] \delta x + \left[\sigma Y + \frac{d}{ds} \left(\overline{V\sigma + \lambda} \frac{ds}{dy} \right) \right] \delta y \right.$$
$$\left. + \left[\sigma Z + \frac{d}{ds} \left(\overline{V\sigma + \lambda} \frac{ds}{dz} \right) \right] \delta z \right\} = 0,$$

und hieraus endlich

$$\frac{d}{ds} \left\{ (V\sigma + \lambda) \frac{dx}{ds} \right\} + X\sigma = 0,$$
$$\frac{d}{ds} \left\{ (V\sigma + \lambda) \frac{dy}{ds} \right\} + Y\sigma = 0,$$
$$\frac{d}{ds} \left\{ (V\sigma + \lambda) \frac{dz}{ds} \right\} + Z\sigma = 0.$$

Wird hierin T für $V\sigma + \lambda$ geschrieben, so stimmen diese Gleichungen mit § 578 (1) überein.

580. Die gemeine Kettenlinie. — Die Form der gemeinen Kettenlinie (§ 574) kann natürlich mit Zugrundelegung der Differentialgleichungen (§ 578) der Kettenlinie im Allgemeinen untersucht werden. Es ist aber zweckmässig und lehrreich, diese Curve zu behandeln, ohne eins der schon erhaltenen Resultate zu benutzen, und dadurch eine Erläuterung der in § 575 dargelegten dritten Methode zu geben.

Dritte Methode. — Wenn die Kette im Gleichgewicht sich befindet, so können wir voraussetzen, ein beliebiger Bogen derselben werde starr, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird. Die einzigen auf diesen starren Körper wirkenden Kräfte sind die Spannungen in seinen Endpunkten und sein Gewicht. Die Richtungen dieser drei Kräfte müssen nach § 564 einer Ebene angehören, und da eine derselben vertical ist, so liegt die ganze Curve in einer Verticalebene. Diese Ebene sei die xz Ebene, und es seien x_0, z_0; x_1, z_1 die Coordinaten der Endpunkte des als starr angesehenen Bogens, s_0 und s_1 Bogenlängen von einem beliebig gewählten Curvenpunkte an bis zu den Punkten (x_0, z_0), (x_1, z_1), endlich T_0 und T_1 die Spannungen in diesen Punkten. Nehmen wir dann die horizontalen Componenten der Kräfte, so finden wir

$$T_0 \left(\frac{dx}{ds} \right)_0 = T_1 \left(\frac{dx}{ds} \right)_1;$$

$T\left(\frac{dx}{ds}\right)$ ist folglich in der ganzen Curve constant. Ferner führen die verticalen Componenten der Kräfte zu der Gleichung

$$T_1\left(\frac{dz}{ds}\right)_1 - T_0\left(\frac{dz}{ds}\right)_0 = \sigma\,(s_1 - s_0),$$

wenn das Gewicht der Masseneinheit als Einheit der Kraft genommen wird.

Ist also T_0 die Spannung im tiefsten Punkte der Curve, wo $\frac{dz}{ds} = 0$ und $s = 0$ ist, und T die Spannung in einem beliebigen Punkte (x, z) der Curve, so erhalten wir

$$(1) \qquad T = T_0\,\frac{ds}{dx} = \sigma s\,\frac{ds}{dz}.$$

Hieraus folgt

$$T_0\,\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \sigma,$$

oder

$$(2) \qquad T_0\,\frac{d^2z}{dx^2} = \sigma\,\frac{ds}{dx} = \sigma\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$\log\left\{\frac{dz}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right\} = \frac{\sigma}{T_0}\,x + C',$$

und die Constante ist Null, wenn wir den Anfangspunkt so wählen, dass $x = 0$ ist, wenn man $\frac{dz}{dx} = 0$ hat, d. h. da, wo die Kette horizontal ist. Es ist dann

$$(3) \qquad \frac{dz}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = e^{\frac{\sigma}{T_0}x},$$

folglich

$$\frac{dz}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\sigma}{T_0}x} - e^{-\frac{\sigma}{T_0}x}\right),$$

und wir erhalten durch nochmalige Integration

$$z + C'' = \frac{T_0}{2\sigma}\left(e^{\frac{\sigma}{T_0}x} + e^{-\frac{\sigma}{T_0}x}\right).$$

Hierfür kann man

$$(4) \qquad z = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

schreiben, die gewöhnliche Gleichung der Kettenlinie, wenn die x Axe in der Entfernung a oder $\frac{T_0}{\sigma}$ unter dem horizontalen Element der Kette angenommen wird.

Die Coordinaten dieses Elements sind danach $x = 0$, $z = \frac{T_0}{\sigma} = a$. Der letztere Ausdruck zeigt, dass

$$T_0 = \sigma a,$$

dass also die Spannung im tiefsten Punkt der Kette (und somit auch die horizontale Componente der Spannung in jedem Punkte) gleich dem Gewicht einer Länge a der Kette ist.

Nun ist $T = T_0 \frac{ds}{dx}$ [nach (1)] $= \sigma z$ [nach (4)], und daraus schliessen wir Folgendes: —

Die Spannung in einem Punkte ist gleich dem Gewicht eines Theils der Kette, welcher gleich der verticalen Ordinate dieses Punktes ist.

581. Entsprechendes kinetisches Problem. — Aus § 576 folgt unmittelbar, dass, wenn ein Massenpunkt, der die Einheit der Masse enthält, irgend eine Kettenlinie entlang mit einer Geschwindigkeit $\dot{s}$ bewegt wird, welche gleich dem numerischen Maass T der Spannung in jedem Punkte ist, die diese Bewegung des Punktes erzeugende Kraft mit der Resultante der an demselben Orte auf die Kettenlinie einwirkenden äusseren Kraft in derselben Richtung liegt und gleich dem Product aus T in die für die Längeneinheit genommene Grösse dieser Kraft ist. Denn wenn wir mit S die Tangentiale und (wie früher) mit N die normale Componente der in irgend einem Punkte P der Kettenlinie thätigen, für die Längeneinheit genommenen Kraft bezeichnen, so ist nach § 576 (1) S die für die Längeneinheit, folglich $S\dot{s}$ die für die Zeiteinheit genommene Grösse der Variation von $\dot{s}$. Es ist also

$$\ddot{s} = S\dot{s} = S\,T,$$

oder (§ 259) die tangentiale Componente der auf den in Bewegung befindlichen Punkt einwirkenden Kraft ist gleich $S\,T$. Weiter ist nach § 576 (3)

$$N\,T = \frac{T^2}{\varrho} = \frac{\dot{s}^2}{\varrho},$$

oder die Centrifugalkraft des in Bewegung befindlichen Punktes in dem Krümmungskreise seiner Bahn, d. h. die normale Componente der auf ihn wirkenden Kraft, ist gleich $N\,T$. Endlich hat diese Kraft nach (2) dieselbe Richtung wie N. Wir sehen daher, dass die Richtung der gesammten auf den Punkt wirkenden Kraft dieselbe ist, wie diejenige der Resultante von S und N, und dass ihre Grösse das T-fache der Grösse dieser Resultante ist.

Oder nehmen wir in der Differentialgleichung des § 578

$$\frac{ds}{T} = dt$$

an, so ergibt sich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -T\sigma X,\ \frac{d^2y}{dt^2} = -T\sigma Y,\ \frac{d^2z}{dt^2} = -T\sigma Z,$$

welche Formeln denselben Schluss gestatten.

Wenn σ constant ist und die Kräfte einem conservativen Systeme angehören, so haben wir nach § 578 (2), wenn V das Potential in einem beliebigen Punkte der Schnur ist,

$$T = \sigma V + C.$$

Ist also $U = \frac{1}{2} (\sigma V + C)^2$, so gehen jene Gleichungen über in

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx},\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dU}{dy},\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{dU}{dz}.$$

Die Integrale dieser mit der Kettenlinie verträglichen Gleichungen sind nur die, für welche die Constante der Energie so beschaffen ist, dass man $\dot{s}^2 = 2U$ hat.

582. Beispiele. — Wir sehen somit, wie man aus den uns geläufigeren Problemen der Kinetik eines Massenpunktes unmittelbar merkwürdige Fälle von Kettenlinien herleiten kann. Wenn z. B. ein Massenpunkt unter der Einwirkung einer constanten in parallelen Linien wirkenden Kraft steht, so bewegt er sich (Cap. VIII) in einer Parabel von verticaler Axe, und seine Geschwindigkeit ist in jedem Punkte gleich derjenigen, welche die Kraft erzeugt, wenn sie einen Weg hindurch wirkt, welcher gleich dem Abstande des Punktes von der Direktrix ist. Wird dieser Abstand mit z und die constante Kraft mit f bezeichnet, so ist in der zugehörigen parabolischen Kettenlinie

$$T = \sqrt{2fz},$$

und die auf die Kettenlinie wirkende Kraft ist der Axe parallel und für die Längeneinheit gleich

$$\frac{f}{\sqrt{2fz}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{f}{2z}}.$$

Wenn also die auf die Kettenlinie wirkende Kraft die Schwere ist, so muss ihre Axe vertical (der Scheitel ist bei stabilem Gleichgewicht natürlich unten) und die für die Längeneinheit genommene Masse in einem beliebigen Punkte der Quadratwurzel des Abstandes dieses Punktes von der Direktrix umgekehrt proportional sein. Daraus geht hervor, dass das Gesammtgewicht irgend eines Bogens der Horizontalprojection desselben proportional ist. Weiter werden wir später bei der Betrachtung der Cometenbewegungen beweisen, dass sich ein materieller Punkt in einer Parabel bewegt, wenn eine nach einem festen Punkte hin gerichtete Kraft auf ihn wirkt, die sich

umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes von diesem Punkte ändert, und wenn seine Geschwindigkeit diejenige ist, die er durch einen Fall von einer unendlich entfernten Ruhelage aus erlangt haben würde. Da diese Geschwindigkeit in einem Abstande r gleich $\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$ ist, so folgt mit Rücksicht auf § 581, dass eine Schnur in derselben Parabel herabhängt, wenn sie unter dem Einflusse einer nach demselben Centrum hin gerichteten Kraft von der Grösse

$$\frac{\mu}{r^2} : \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{\mu}{2r^3}}$$

steht. Wenn aber die Länge der Schnur zwischen den beiden festen Punkten geändert wird, während die Centralkraft noch demselben Gesetze folgt, so wird die geänderte Kettenlinie nicht mehr parabolisch, sondern die Bahn eines materiellen Punktes sein, auf welchen eine Centralkraft von der Grösse

$$\left(C + \sqrt{\frac{2\mu}{r}}\right)\sqrt{\frac{\mu}{2r^3}}$$

wirkt; denn die Spannung ist jetzt im Abstande r vom Anfangspunkte nicht mehr $\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$, sondern (§ 581) $C + \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$.

583. **Umkehrung der Aufgabe.** — Wenn es sich darum handelt, die gegen einen gegebenen festen Punkt gerichtete Kraft zu bestimmen, unter deren Einwirkung eine Schnur in einer beliebig gegebenen ebenen Curve herabhängt, deren Ebene diesen festen Punkt enthält, so können wir die Antwort unmittelbar aus der Lösung des entsprechenden Problems der Theorie der „centralen Kräfte" entnehmen. Aber auch die allgemeinen Gleichungen, § 578, lassen sich immer mit Leichtigkeit anwenden, wie z. B. auf den folgenden umgekehrten Fall der Gravitationskettenlinie, der zuweilen von Nutzen ist: —

Man soll den Querschnitt für jeden Punkt einer aus gleichförmigem Material bestehenden Kette von der Beschaffenheit bestimmen, dass, wenn ihre Endpunkte fest sind, die von ihrem Gewichte erzeugte Spannung in jedem Punkte der Stärke (d. i. der Grösse des Schnittes) in diesem Punkte proportional sei. Ferner soll man die Form der Curve bestimmen, in welcher die Kette herabhängt, und welche man die Kettenlinie gleichförmiger Stärke nennt.

Da hier die Schwere die einzige äussere Kraft ist, so befindet sich die ganze Kette in einer Verticalebene. Eine horizontale Linie dieser Ebene wollen wir zur x Axe nehmen. Ist μ das für die Längeneinheit genommene Gewicht der Kette im Punkte (x, z), so gehen unsere Gleichungen [§ 578 (1)] über in

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) = \mu.$$

Der Voraussetzung nach ist aber T proportional μ, also etwa $T = b\mu$. Ist also μ_0 der Werth, welchen μ in dem am tiefsten gelegenen Punkte hat, so folgt aus der ersteren Gleichung

$$\mu = \mu_0 \frac{ds}{dx},$$

und mit Rücksicht hierauf geht die zweite Gleichung über in

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{b}\,\frac{ds}{dx},$$

oder in

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{b}\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right].$$

Eine erste Integration liefert jetzt

$$\arctan\frac{dz}{dx} = \frac{x}{b},$$

und wir brauchen keine Constante hinzuzufügen, wenn wir die x Axe so wählen, dass sie die Curve in ihrem tiefsten Punkte berührt. Wird die letzte Gleichung integrirt, so folgt

$$\frac{z}{b} = -\log\cos\frac{x}{b},$$

und auch hier ist keine Constante hinzuzufügen, wenn der tiefste Punkt der Curve zum Coordinatenanfangspunkt genommen wird. Diese Gleichung kann auf die Form

$$\sec\frac{x}{b} = e^{\frac{z}{b}}$$

gebracht werden, und diese Form lässt erkennen, dass die Curve verticale Asymptoten hat, deren Horizontalabstand von einander πb beträgt. Danach ist es leicht, für beliebige Data über die Dehnbarkeit und die specifische Schwere des angewandten Materials die grösste in irgend einem Falle erreichbare Spannweite zu berechnen.

584. Eine biegsame Schnur auf einer glatten Fläche. — Wenn eine vollkommen biegsame Schnur über eine glatte Oberfläche gespannt wird, und wenn in allen ihren Punkten keine andere Kraft, als der Widerstand dieser Oberfläche auf sie wirkt, so wird sie, falls sie sich in stabilem Gleichgewicht befindet, eine Linie bilden, von welcher jedes beliebige Stück kleiner ist, als jede andere zwischen denselben Punkten auf der Oberfläche gezogene Linie. Denn (§ 564) ihr Gleichgewicht kann weder gestört, noch instabil

gemacht werden, dadurch dass man in zwei beliebigen Punkten, in denen sie auf der Oberfläche ruht, Haken über sie setzt, durch die sie frei hindurchgleiten kann, und für den zwischen diesen Punkten liegenden Theil ist die Bedingung des stabilen Gleichgewichts die eben angegebene.

Da in diesem Falle keine tangentiale Kraft auf die Schnur wirkt, und da die Normalkraft, der sie unterliegt, die Richtung der an die Oberfläche gezogenen Normalen hat, so muss (§ 576) ihre osculatorische Ebene die Oberfläche überall unter rechten Winkeln schneiden. Diese Betrachtungen, die sich leicht in die reine Geometrie übertragen lassen, führen zur Fundamental-Eigenschaft der auf irgendwelchen Oberflächen gezogenen geodätischen Linien. Die analytischen Untersuchungen der §§ 578, 579 bilden, wenn man sie auf den Fall einer zwischen zwei gegebenen Punkten über eine gegebene glatte Oberfläche gespannten Kette von nicht gegebener Länge anwendet, den directen analytischen Beweis dieser Eigenschaft.

In diesem Falle liegt es auf der Hand, dass die Spannung der Schnur in allen Punkten die nämliche, und dass der Druck, welchen die Oberfläche auf die Schnur ausübt [§ 576 (3)], in jedem Punkte der Krümmung derselben proportional ist.

585. Eine biegsame Schnur auf einer rauhen Fläche. — Da keine der vorhandenen Oberflächen vollkommen glatt ist, so kann eine Schnur oder Kette sich in Ruhe befinden, auch wenn sie längs einer so langen geodätischen Linie auf einem convexen starren Körper ausgespannt ist, dass die Länge zwischen ihren Endpunkten kein Minimum ist. In der Praxis, wie z. B. beim Binden einer Schnur um eine Kugel, ist es aber zur dauernden Sicherheit nöthig, in einer Reihe von Punkten, die so nahe an einander liegen, dass jeder freie Theil der Curve auf der Oberfläche ein wirkliches Minimum werde, Häkchen oder dergleichen anzubringen und dadurch die Schnur zu verhindern, zur Seite abzugleiten.

586. Ein um einen rauhen Cylinder gewundenes Seil. — Einen in der Praxis wichtigen Fall dieser Art liefert die Betrachtung eines um einen rauhen Cylinder gewundenen Seils. Wir wollen voraussetzen, dasselbe liege in einer zur Axe senkrechten Ebene, da wir durch diese Annahme die Frage erheblich vereinfachen, ohne die Anwendbarkeit der Lösung merklich zu beeinträchtigen. Zur Vereinfachung wollen wir weiter annehmen, dass auf das Seil keine Kräfte wirken, ausser den Spannungen und der Reaction des Cylinders. In der Praxis ist dies der Voraussetzung äquivalent, dass

die Spannungen und die Reactionen sehr gross seien im Vergleich mit dem Gewicht des Seils oder der Kette. Diese Voraussetzung ist freilich in einigen wichtigen Fällen unzulässig, besonders in Fällen, wie sie bei der Anwendung des Princips auf die beim Legen unterseeischer Kabel benutzten Hemmungen, auf Dynamometer und auf Winden mit horizontalen Axen vorkommen.

Wenn R der Widerstand in Richtung der Normale ist, den die Längeneinheit der Schnur in irgend einem Punkte vom Cylinder erfährt, wenn ferner T und $T + \delta T$ die Spannungen in den Endpunkten eines Bogens δs sind, und wenn $\delta\vartheta$ der Winkel zwischen den Richtungen dieser Spannungen ist, so haben wir, wie in § 576,

$$T\delta\vartheta = R\delta s,$$

und die ins Leben gerufene Reibung ist offenbar gleich δT. Wenn das Seil im Begriff ist, eine gleitende Bewegung anzunehmen, so hat die Reibung ihren grössten Werth, und dann können wir setzen

$$\delta T = \mu R \delta s = \mu T \delta\vartheta.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$T = T_0 e^{\mu\vartheta},$$

und diese Formel zeigt, dass die Spannung des Seils für gleiche successive Gesammtkrümmungen (§ 10) in geometrischer Progression zunimmt. Um eine Vorstellung davon zu geben, wie gross die Spannung auf diese Weise werden kann, wollen wir $\mu = 0{,}5$; $\vartheta = \pi$ annehmen; dann ist

$$T = T_0 e^{0{,}5\pi} = 4{,}81\ T_0 \text{ (näherungsweise).}$$

Wenn also das Seil drei Mal um den Pfosten oder Cylinder gewunden wird, so stehen die Spannungen seiner Endpunkte im Augenblick, wo es im Begriff ist, eine Bewegung anzunehmen, in dem Verhältniss

$$(4{,}81)^6 : 1 \text{ oder ungefähr } 12390 : 1.$$

Wir sehen daraus, wie ein einziger Mann mittels der Reibung leicht die Bewegung des grössten Schiffes hemmen kann, dadurch dass er einfach ein Seil mehrmals um einen Pfosten wickelt. In ähnlicher Weise wird die Reibung in vielen anderen Fällen, namentlich bei Dynamometern, mit grossem Nutzen angewandt.

587. Mit Hülfe der vorhergehenden Betrachtung kann der Leser leicht selbst die Formeln für die Lösung des allgemeinen Problems ausarbeiten, in welchem ein einer rauhen Oberfläche aufliegendes Seil unter der Einwirkung beliebiger Kräfte steht. Diese



Formeln sind nicht so wichtig oder interessant, dass sie hier Platz finden sollten.

588. **Elastische Drähte.** — Einen länglichen Körper von elastischem Material werden wir der Kürze wegen allgemein einen Draht nennen. Ein bis zu irgend einem Grade gebogener oder gedrillter Draht bietet, wenn nur der Krümmungsradius und der reciproke Werth der Drillung (§ 119) überall sehr gross sind im Vergleich mit der grössten Querdimension, einen Fall dar, in welchem, wie wir sehen werden, die Lösung der allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht eines elastischen festen Körpers entweder in endlichen Ausdrücken angegeben, oder auf vergleichsweise leichte Fragen reducirt werden kann, die hinsichtlich der mathematischen Bedingungen mit einigen der elementarsten Probleme der Hydrokinetik, der Elektricität und der Wärmeleitung übereinstimmen. Diese Probleme sind übrigens nur zu dem Zwecke zu lösen, um gewisse von dem Querschnitt des Drahtes und der elastischen Beschaffenheit seiner Substanz abhängige Constanten zu bestimmen, welche ein Maass für seinen Widerstand gegen eine Biegung und Drillung liefern. Wenn die Biegungs- und Drillungsconstanten, wie wir jetzt voraussetzen, durch theoretische Berechnung oder auf experimentellem Wege bestimmt sind, so wird die Untersuchung der Gestalt und der Drillung einer beliebigen Länge des Drathes, unter der Einwirkung beliebiger Kräfte, welche keine Verletzung der oben ausgesprochenen Bedingung hervorbringen, ein Gegenstand der mathematischen Analysis, dessen Behandlung nur die Principien und Formeln aus der Geometrie oder Kinematik erfordert, welche die Theorie der Krümmung (§§ 5 bis 13) und der Drillung (§§ 119 bis 123) ausmachen.

589. Bevor wir auf die allgemeine Theorie der elastischen festen Körper eingehen, werden wir nach dem in § 573 angegebenen Plane die dynamischen Eigenschaften eines vollkommen elastischen Drahtes untersuchen und seine Gleichgewichtsbedingungen bestimmen. Wir lassen dabei keine andere Bedingung oder Beschränkung der Umstände, als die in § 588 angegebene zu, und setzen keine besondere Beschaffenheit der Substanz (isotropische oder krystallinische, faserige oder blättrige Structur) voraus. Der folgende kurze geometrische Excurs ist eine passende Einleitung: —

590. **Zusammensetzung und Zerlegung von Krümmungen in einer Curve.** — Wie man Krümmungen mit einander oder mit Drillungen geometrisch verbindet, erhellt aus den oben gegebenen Definitionen und Principien über die Krümmung (§§ 5 bis 13)

und Drillung (§§ 119 bis 123) und aus der in § 96 erörterten Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten. Wenn z. B. eine Linie OT eines starren Körpers beständig der Tangente PT in einem Punkte P parallel bleibt, der sich mit der Einheit der Geschwindigkeit längs einer ebenen oder gewundenen Curve bewegt, so besitzt der Körper um eine zu OT und zum Krümmungsradius senkrechte Axe (d. h. senkrecht zur osculatorischen Ebene) eine Winkelgeschwindigkeit, die numerisch gleich der Krümmung ist. Ausserdem kann man den Körper mit einer beliebigen Winkelgeschwindigkeit um OT rotiren lassen. Wenn z. B. eine Linie OA desselben beständig einer Querlinie (§ 120) PA parallel bleibt, so wird die Componente der Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers um OT in jedem Augenblick gleich der Drillung (§ 120) sein, welche in diesem Punkte der Curve die Querlinie um deren Tangente erfährt. Weiter kann die Winkelgeschwindigkeit um OA in Componenten um zwei Linien OK, OL zerlegt werden, die zu einander und zu OT senkrecht sind, und die Gesammtkrümmung der Curve lässt sich demgemäss in zwei Krümmungscomponenten zerlegen, deren Ebenen beziehungsweise senkrecht zu jenen beiden Linien sind. Die Grösse jeder dieser Krümmungscomponenten ist natürlich gleich dem Product aus der Gesammtkrümmung in den Cosinus des Neigungswinkels zwischen ihrer Ebene und der osculatorischen Ebene, und somit leuchtet ein, dass jede Krümmungscomponente einfach die Krümmung der Projection der gegebenen Curve auf die Ebene der Componente ist*).

591. Gesetze der Biegung und Torsion. — Die vollständige Theorie der elastischen Drähte zeigt, wie man die Constanten des Widerstandes, den der Körper einer Biegung und Torsion entgegensetzt, aus der Form seines Querschnitts und den geeigneten Daten in Betreff der elastischen Eigenschaften seiner Substanz theoretisch bestimmen kann. Ausserdem lehrt sie einfach, dass der unter der Einwirkung der Kräfte stehende Draht, so lange seine Deformation die in § 588 angegebene Grenze nicht überschreitet, folgenden Gesetzen gehorcht: —

---

*) Die Krümmung der Projection einer Curve auf eine Ebene, die mit der osculatorischen Ebene den Winkel α bildet, ist $\frac{1}{\varrho} \cos\alpha$, wenn die Ebene der Tangente parallel ist, und $\frac{1}{\varrho \cos^2\alpha}$, wenn die Ebene der Hauptnormale (oder dem Radius der absoluten Krümmung) parallel ist. Es ist nicht schwer, jeden dieser Ausdrücke zu beweisen.

Die gesammte Wechselwirkung zwischen den Theilen des Drahtes zu beiden Seiten des Querschnitts in irgend einem Punkte (es ist dies natürlich die Wirkung der Masse, welcher der Schnittebene unendlich nahe auf der einen Seite liegt, auf die Masse, welche sich in unendlich kleiner Entfernung auf der anderen Seite der Schnittebene befindet) werde auf eine einzige durch irgend einen Punkt des Schnittes gehende Kraft und auf ein einziges Kräftepaar reducirt. Dann sind

I. die Drillung und Krümmung des Drahtes in der Nähe dieses Schnittes von der Kraft unabhängig und hängen nur von dem Kräftepaare ab.

II. Die Krümmungen und die Grössen der Drillung, die von mehreren Kräftepaaren einzeln erzeugt werden, geben als geometrische Resultante diejenige Krümmung und Drillung, die durch eine der Resultante jener Kräftepaare gleiche Wechselwirkung wirklich erzeugt werden.

592. Wir fügen hinzu, obgleich es für unseren jetzigen Zweck nicht nöthig ist, dass es in dem Querschnitt einen bestimmten Punkt von der Beschaffenheit gibt, dass, wenn man ihn als den Punkt wählt, in welchen die Kräfte versetzt werden, ein höherer Grad der Annäherung für die Erfüllung dieser Gesetze erlangt wird, als wenn irgend ein anderer Punkt des Schnittes gewählt würde. Diesen Punkt, der, wenn der Querschnitt des Drahtes aus einer gleichförmigen Substanz besteht, der Trägheitsmittelpunkt der Schnittfläche ist, werden wir allgemein den elastischen Mittelpunkt oder den Mittelpunkt der Elasticität des Schnittes nennen. Derselbe hat die folgende wichtige Eigenschaft: — Die Verbindungslinie der elastischen Mittelpunkte oder, wie wir sie nennen werden, die elastische Centrallinie ändert ihre Länge nicht merklich, wenn man den Draht innerhalb der (§ 588) angegebenen Grenzen einer beliebigen Biegung und Drillung unterwirft. Die Ausdehnung oder Zusammenziehung, welche die vernachlässigte resultirende Kraft erzeugt (wenn diese überhaupt eine solche Richtung hat, dass sie eine derartige Wirkung hervorbringt), wird bewirken, dass die Linie, die in aller Strenge ihre Länge unverändert beibehält, in jedem Theil des Drahtes, der eine endliche Krümmung hat, nur unendlich wenig von der elastischen Centrallinie abweicht. In jedem geraden Drahttheil wird es freilich offenbar keine Linie geben, die ihre Länge unverändert beibehielte; da aber die ganze Verlängerung im Vergleich mit den Wirkungen, mit denen wir es zu thun haben, unendlich klein sein würde, so bildet dieser Fall keine Ausnahme von dem ausgesprochenen Satze.

593. Rotationen, welche einer Biegung und Torsion entsprechen. — Betrachten wir jetzt einen Draht von überall gleichförmiger Substanz und Form, der von Natur gerade ist. Durch seine noch gerade elastische Centrallinie denken wir uns zwei beliebige zu einander senkrechte Coordinatenebenen gelegt, welche den durch P gehenden Normalschnitt in den Linien PK und PL schneiden. Diese beiden Linien (von denen wir annehmen, dass sie zu der Substanz gehören und sich mit derselben bewegen) werden mit einander und mit der Tangente PT an die Centrallinie Winkel bilden, deren jeder nur unendlich wenig von einem Rechten abweicht, wie auch der Draht innerhalb der angegebenen Grenzen gebogen oder gedrillt wird. Es seien nun $\varkappa$ und λ die Krümmungscomponenten (§ 590) in den beiden durch PT gelegten zu PK und PL senkrechten Ebenen, und τ die Drillung (§ 120) des Drahtes in P. Wir haben in § 590 gesehen, dass, wenn sich P mit der Einheit der Geschwindigkeit die Curve entlang bewegt, ein starrer Körper mit drei rechtwinkligen Coordinatenaxen $O_{\prime}K$, $O_{\prime}L$, $O_{\prime}T$, welche beständig PK, PL, PT parallel bleiben, beziehungsweise die Winkelgeschwindigkeiten $\varkappa$, λ, τ um diese Axen haben wird. Wenn also der Punkt P und die Linien PK, PL, PT in Ruhe bleiben, während der Draht von seinem anfänglichen Zustande aus in einen anderen Zustand gebogen und gedrillt wird, so werden die durch irgend einen P unendlich nahe liegenden Punkt P' gehenden Coordinatenaxen $P'K'$, $P'L'$, $P'T'$ eine Rotation erleiden, die aus $\varkappa . PP'$ um $P'K'$, $\lambda . PP'$ um $P'L'$ und $\tau . PP'$ um $P'T'$ besteht.

594. Potentielle Energie der elastischen Kraft in einem gebogenen und gedrillten Drahte. — Betrachten wir jetzt die ins Leben gerufenen elastischen Kräfte, so sehen wir, dass, wenn dieselben ein conservatives System bilden, die zum Biegen und Drillen eines Drahttheils aus seinem undeformirten in seinen wirklichen Zustand erforderliche Arbeit nur von seiner Gestalt in diesen beiden Zuständen abhängt. Bezeichnet demnach $w . PP'$ die Grösse dieser Arbeit für die unendlich kleine Länge PP' des Drahtes, so muss w eine Function von $\varkappa$, λ, τ sein; wenn also K, L, T die Componenten des resultirenden Kräftepaars aller Kräfte bezeichnen, die auf den durch P' gehenden Schnitt wirken müssen, um den Theil PP' in seinem deformirten Zustande zu erhalten, so ergibt sich aus §§ 240, 272, 274, dass

$$(1) \qquad K\delta\varkappa = \delta_{\varkappa} w, \quad L\delta\lambda = \delta_{\lambda} w, \quad T\delta\tau = \delta_{\tau} w$$

ist, wo $\delta_\varkappa w$, $\delta_\lambda w$, $\delta_\tau w$ die Zunahmen von w sind, welche beziehungsweise den unendlich kleinen Zunahmen $\delta\varkappa$, $\delta\lambda$, $\delta\tau$ von $\varkappa, \lambda, \tau$ entsprechen.

595. Wie sehr nun auch die Gestalt irgend einer endlichen Länge des Drahtes geändert werden möge, die Bedingung des § 588 fordert offenbar, dass die Aenderung der Gestalt in jedem unendlich kleinen Theil, d. h. die Deformation (§ 154) der Substanz überall sehr klein sei (sie müsste unendlich klein sein, wenn die Theorie in aller Strenge sollte angewendet werden können). Mit Rücksicht hierauf zeigt das Princip der Superposition von Krümmungen und Drillungen (§ 591, II), dass, wenn jede der Grössen $\varkappa, \lambda, \tau$ in einem Verhältniss vergrössert oder verringert wird, jede der Grössen K, L, T in demselben Verhältniss zu- oder abnimmt, folglich w in dem Quadrat dieses Verhältnisses; denn der Winkel, durch welchen jedes Kräftepaar wirkt, ändert sich in demselben Verhältniss wie die Grösse des Paars. Algebraisch ausgedrückt heisst dies: w ist eine homogene quadratische Function von $\varkappa, \lambda, \tau$.

Auf diese Weise erhalten wir, wenn A, B, C, a, b, c sechs Constanten bezeichnen,

$$w = \tfrac{1}{2}(A\varkappa^2 + B\lambda^2 + C\tau^2 + 2a\lambda\tau + 2b\tau\varkappa + 2c\varkappa\lambda); \tag{2}$$

folglich ist nach § 594 (1)

$$\begin{cases} K = A\varkappa + c\lambda + b\tau \\ L = c\varkappa + B\lambda + a\tau \\ T = b\varkappa + a\lambda + C\tau. \end{cases} \tag{3}$$

Durch die bekannte Reduction der homogenen quadratischen Function können diese Ausdrücke natürlich auf die folgenden einfachen Formen gebracht werden: —

$$\begin{cases} w = \tfrac{1}{2}(A_1\theta_1^2 + A_2\theta_2^2 + A_3\theta_3^2) \\ L_1 = A_1\theta_1,\ L_2 = A_2\theta_2,\ L_3 = A_3\theta_3, \end{cases} \tag{4}$$

wo θ_1, θ_2, θ_3 lineare Functionen von $\varkappa, \lambda, \tau$ sind, und wenn man diese Functionen darauf beschränkt, dass sie die Ausdrücke für die um drei zu einander senkrechte Axen genommenen Componenten der als Winkelgeschwindigkeiten um die Axen PK, PL, PT angesehenen Rotationen $\varkappa, \lambda, \tau$ sind, so sind die Lagen der neuen Axen PQ_1, PQ_2, PQ_3 und die Werthe von A_1, A_2, A_3 bestimmt; die letzteren sind nämlich die Wurzeln der aus (A, B, C, a, b, c) gebildeten kubischen Determinantengleichung des § 181 (11). Wir schliessen daraus Folgendes: —

596. Die drei Hauptaxen der torquirenden Biegung. — Es gibt im Allgemeinen durch jeden Punkt P der Mittellinie eines Drahtes drei bestimmte zu einander senkrechte Richtungen PQ_1, PQ_2, PQ_3 von der Beschaffenheit, dass, wenn man auf irgend zwei

Theile des Drahtes in Ebenen, die zu einer dieser Richtungen senkrecht sind, entgegengesetzte Kräftepaare wirken lässt, jeder dazwischen liegende Theil eine Rotation in einer Ebene erfährt, die den Ebenen der Paare parallel ist. Die Momente der Kräftepaare, die erforderlich sind, um eine Rotation von der Einheit der Geschwindigkeit um diese drei Axen zu erzeugen, werden die **Hauptwiderstandsmomente des Drahtes gegen eine Deformation (torquirende Biegung) genannt.** Sie sind die Elemente, die wir in der vorstehenden Untersuchung mit A_1, A_2, A_3 bezeichnet haben.

597. Wenn der in § 593 vorgestellte starre Körper Trägheitsmomente von der Grösse A_1, A_2, A_3 um drei durch O gehende Hauptaxen hat, die beständig den durch P gehenden Hauptwiderstandsaxen parallel bleiben, während P sich mit der Einheit der Geschwindigkeit den Draht entlang bewegt, so wird das Moment seiner Bewegungsgrösse um irgend eine Axe gleich dem Moment der Componente des Deformationskräftepaars um die durch P gehende parallele Axe sein. Dies ergibt sich aus der Uebereinstimmung der vorhergehenden Formeln mit denen, die wir unten (Cap. IX) für das Moment der Bewegungsgrösse eines rotirenden starren Körpers erhalten werden.

598. Die drei Hauptspiralen. — Die Form, welche der Draht annimmt, wenn er unter der Einwirkung von Kräftepaaren, die um eine der drei Hauptaxen drehen, zur Ruhe kommt, ist natürlich eine gleichförmige Schraubenlinie, deren Axe eine zu dieser Hauptaxe parallele Linie ist, und welche einem Cylinder aufliegt, dessen Radius durch die Bedingung bestimmt wird, dass die ganze Rotation, die das eine Ende des Drahtes aus seinem undeformirten Zustande erfährt, während das andere Ende festgehalten wird, gleich der von dem einwirkenden Kräftepaar erzeugten Rotation ist.

Es sei l die Länge des Drahtes von einem festgehaltenen Ende E bis zum anderen Ende E', wo ein Kräftepaar L in einer Ebene wirkt, welche auf der durch einen beliebigen Punkt des Drahtes gehenden Hauptaxe PQ_1 senkrecht steht. Da die Grösse der Rotation für die Längeneinheit $\frac{L}{A_1}$ beträgt [§ 595 (4)], so beläuft sie sich im Ganzen auf $l\frac{L}{A_1}$. Dies ist daher der Steigungswinkel der Schraubenlinie auf dem Cylinder, dem sie aufliegt. Bezeichnet also r den Radius dieses Cylinders und i_1 die Neigung der Schraubenlinie gegen die Axe desselben (es ist dies die Neigung von PQ_1 gegen die Länge des Drahtes), so erhalten wir

$$r\,\frac{Ll}{A_1} = l \sin i_1,$$

folglich

$$(5) \qquad r = \frac{A_1 \sin i_1}{L}.$$

599. Fall, in welchem die elastische Centrallinie eine Normalaxe der Torsion ist. — In den für die Praxis wichtigsten Fällen, namentlich in denjenigen, in welchen die Substanz isotropisch ist (was bei den gewöhnlichen Metalldrähten nahezu der Fall ist), oder in Stäben oder Stangen von faseriger oder krystallinischer Structur, bei denen eine Axe der elastischen Symmetrie die Längsrichtung des Körpers hat, fällt, wie wir später sehen werden, eine der drei Normalaxen der torquirenden Biegung mit der Länge des Drahtes zusammen, und die beiden anderen sind senkrecht zu derselben; die erstere Axe ist eine Axe reiner Torsion, die beiden letzteren sind Axen reiner Biegung. Daher bringen Kräftepaare, welche um die Axe des Drahtes nach entgegengesetzten Richtungen drehen, nur eine Drillung hervor, die von keiner Biegung begleitet ist, während Kräftepaare, die in einer der beiden Hauptbiegungsebenen nach entgegengesetzten Richtungen wirken, den Draht in einen Kreis umbiegen. Die ungebogene gerade Linie, die der Draht unter der ersteren Voraussetzung bildet, und die Kreisbogen, in die er durch Kräftepaare in den beiden Hauptebenen der Biegung verwandelt wird, sind die drei Hauptspiralen des allgemeinen Problems in diesem Falle.

600. Fall gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen. — In dem noch specielleren Falle, in welchem zwei Hauptwiderstandsmomente gegen eine Biegung gleich sind, ist jede durch die Länge des Drahtes gehende Ebene eine Hauptebene der Biegung und der Widerstand gegen eine Biegung in allen gleich. Dies ist offenbar bei einem gewöhnlichen runden Draht oder Stab der Fall, oder bei einem Draht von quadratischem Durchschnitt. Wir werden später sehen, dass es sich ebenso mit einem Stabe von isotropischem Material und von einem beliebig geformten Normalschnitt verhält, der um alle in seiner Ebene durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehenden Axen kinetische Symmetrie (§ 285) hat.

601. Wenn in diesem Falle das eine Ende des Drahtes oder Stabes festgehalten wird, während man auf das andere Ende in irgend einer Ebene ein Kräftepaar wirken lässt, so wird eine gleichförmige Spirale um eine zur Ebene des Paares senkrechte Axe erzeugt werden. Die zur Axe der Spirale parallelen Linien der

Substanz sind aber nicht ihren anfänglichen Lagen parallel, wie es (§ 598) in jeder der drei Hauptspiralen des allgemeinen Problems der Fall ist, und die Linien, welche auf der Oberfläche des Drahtes der Richtung parallel gezogen sind, die der Draht hat, wenn er gerade ist, werden nicht Spirallinien von gleicher Steigung, wie bei jeder der Hauptspiralen des allgemeinen Problems, sondern verwandeln sich gewissermaassen in secundäre Spiralen, welche die von der Centrallinie des deformirten Drahtes gebildete Hauptspirale umkreisen. Wenn wir endlich im vorliegenden Falle voraussetzen, der Normalschnitt des Drahtes sei kreisförmig, und gleichförmige Spiralen längs seiner Oberfläche ziehen, wenn er in der angenommenen Art deformirt ist (zwei dieser Spiralen sind z. B. die Linien, in denen er von dem eingeschriebenen und dem umschriebenen Cylinder berührt wird), so werden diese Linien nicht gerade, sondern um den Draht gehende Spiralen, wenn demselben gestattet wird, in seinen natürlichen geraden und ungedrillten Zustand zurückzukehren.

In § 595 möge $P\,Q_1$ mit der Centrallinie des Drahtes zusammenfallen und $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = B$ sein, so dass A den Widerstand gegen eine Torsion, B denjenigen gegen eine Biegung misst. Während das eine Ende des Drahtes festgehalten wird, wirke auf das andere Ende um eine Axe, die mit der Länge einen Winkel ϑ bildet, ein Kräftepaar G ein. Dann werden die für die Längeneinheit genommenen Grössen der Drillung und Biegung nach § 595 (4) beziehungsweise

$$\frac{G \cos \vartheta}{A} \quad \text{und} \quad \frac{G \sin \vartheta}{B}$$

sein. Da die letztere Grösse dasselbe wie die Krümmung ist (§ 9), und da die Spirale die Neigung ϑ gegen ihre Axe hat, so folgt [§ 126, oder § 590, Anmerkung], dass $\frac{B \sin \vartheta}{G}$ der Krümmungsradius der Projection der Spirale auf eine zur Axe senkrechte Ebene, d. h. der Radius des Cylinders ist, dem die Spirale aufliegt.

602. Deformation eines Drahtes in eine gegebene Spiralform und eine gegebene Drillung. — Ein Draht, der in allen Richtungen von gleicher Biegsamkeit ist, kann offenbar in irgend einer festgesetzten Spiralform erhalten und in einem beliebigen Grade gedrillt werden, dadurch dass man das eine Ende festhält und am anderen Ende eine bestimmte Kraft und ein bestimmtes Kräftepaar anbringt. Die Richtung der Kraft muss der Axe der Spirale parallel sein, und die Kraft muss mit dem Kräftepaar ein System ausmachen, für welches diese Linie die Centralaxe (§ 559) ist; denn sonst könnte nicht in jedem Normalschnitt der Spirale dasselbe System von Kräften sein, die einander das Gleichgewicht

halten. Man erkennt alles dieses leicht, wenn man voraussetzt, dem Draht werde erst durch irgend welche Mittel die angegebene Deformation ertheilt, und es werden sodann an seinen Enden senkrecht zu seiner Axe zwei starre Ebenen starr befestigt, welche ihrerseits durch eine in der Axe liegende Stange in starrer Verbindung stehen. Der dann sich selbst überlassene spiralförmige Draht muss nothwendig im Gleichgewicht sein, obschon sein Gleichgewicht, wenn er (für seine Form und den Grad seiner Drillung) zu lang ist, instabil sein kann. Die Kraft in der Richtung der Centralaxe und das Kräftepaar bestimmen sich durch die Bedingung, dass aus demselben, wenn die Kraft nach Poinsot's Verfahren in den elastischen Mittelpunkt irgend eines Normalschnittes versetzt wird, zwei Kräftepaare erhalten werden, die zusammen den elastischen Kräftepaaren der Biegung und Torsion äquivalent sind.

Es sei α die Neigung der Spirale gegen die zu ihrer Axe senkrechte Ebene, r der Radius des Cylinders, auf dem sie liegt, τ die für die Längeneinheit genommene Grösse der Drillung, welche der Draht in seiner Spiralform besitzt. Dann ist die Krümmung (§ 126) gleich $\frac{\cos^2\alpha}{r}$, und ihre Ebene in irgend einem Punkte der Spirale muss mit der zur Axe senkrechten Ebene den Winkel α einschliessen, da sie die Tangente an die Spirale und den Durchmesser des durch jenen Punkt gehenden Cylinders enthält. Folglich sind die in dieser und in der durch die Axe des Cylinders gehenden Ebene genommenen Componenten des Biegungs-Kräftepaars beziehungsweise

$$\frac{B\cos^2\alpha}{r}\cos\alpha \quad \text{und} \quad \frac{B\cos^2\alpha}{r}\sin\alpha.$$

In denselben Ebenen sind die Componenten des Torsions-Kräftepaars

$$A\tau\sin\alpha \quad \text{und} \quad -A\tau\cos\alpha.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen sind daher

$$(6)\qquad \begin{cases} G = \dfrac{B\cos^2\alpha}{r}\cos\alpha + A\tau\sin\alpha \\ -Rr = \dfrac{B\cos^2\alpha}{r}\sin\alpha - A\tau\cos\alpha, \end{cases}$$

und diese Formeln geben die expliciten Werthe des erforderten Kräftepaars G und der Kraft R, welche letztere als positiv gerechnet wird, wenn sie so gerichtet ist, dass sie die Spirale ausspannt, oder wenn die Enden des oben vorausgesetzten starren Stabes durch die an den Enden der Spirale befestigten Platten einwärts gedrückt werden.

Wenn wir $R = 0$ machen, so gelangen wir wieder zu dem oben in § 601 betrachteten Falle. Wird andererseits $G = 0$ vorausgesetzt, so folgt

$$\tau = -\frac{1}{r}\frac{B}{A}\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$$

und

$$R = -\frac{B}{r^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{A\tau}{r\cos\alpha}.$$

Wir schliessen daraus: —

603. **Bestimmung der Drillung, durch welche die Wirkung auf eine einzige Kraft reducirt wird.** — Ein in allen Richtungen gleich biegsamer Draht kann durch eine einfache in der Richtung seiner Axe wirkende Kraft zwischen zwei starren Platten, die mit seinen Enden starr verbunden sind, in einer beliebigen festgesetzten Spiralform erhalten werden, vorausgesetzt dass ihm zugleich ein gewisser Grad von Drillung ertheilt ist. Diese Kraft bestimmt sich durch die Bedingung, dass ihr Moment in Beziehung auf die durch irgend einen Punkt der Spirale zu der durch denselben Punkt gehenden osculatorischen Ebene senkrechte Linie dem zurückbiegenden Elasticitätskräftepaar gleich und entgegengesetzt sein muss. Die Grösse der Drillung ist (nach der einfachen Gleichung der Torsion) diejenige, welche dem Moment der so bestimmten Kraft in Beziehung auf die in irgend einem Punkte an die Spirale gelegte Tangente entspricht. Da die Richtung der Kraft, der vorhergehenden Bedingung gemäss, eine solche ist, dass die Enden der Spirale zusammengepresst werden, so ist die Richtung der Drillung im Drahte der Richtung der Windung (§ 9) seiner Centrallinie entgegengesetzt.

604. **Spiralfedern.** — Die Principien und Formeln (§§ 598, 603), mit denen wir uns bisher beschäftigt haben, lassen sich unmittelbar auf die Theorie der Spiralfedern anwenden. Bevor wir daher unsere Untersuchung der elastischen Curven schliessen, werden wir einen kurzen Excurs über diesen merkwürdigen und praktisch wichtigen Gegenstand machen.

Eine gewöhnliche Spiralfeder besteht aus einem gleichförmigen Draht, der im undeformirten Zustande die Form einer regelmässigen Schraubenlinie hat; die Hauptaxen der Biegung und Torsion sind überall in Beziehung auf die Curve ähnlich gelegen. Wenn die Spiralfeder richtig gebraucht wird, so wirken an Armen oder Platten, die an den Endpunkten starr befestigt sind, Kräfte von solcher Beschaffenheit auf sie ein, dass die Form, auf die diese Kräfte sie bringen, immer noch eine regelmässige Schraubenlinie ist. Diese Bedingung wird offenbar erfüllt, wenn man (während das eine Ende festgehalten wird) auf das andere Ende eine unendlich kleine Kraft und ein unendlich kleines Kräftepaar in der Richtung der Axe und in einer zur Axe senkrechten Ebene wirken, und die

Kraft und das Kräftepaar sodann allmälig bis zu einer beliebigen Grösse zunehmen lässt, während sie beziehungsweise immer in der Richtung der Axe der geänderten Spirale und in der zu dieser Axe senkrechten Ebene bleiben. Es würde jedoch nutzlose Mühe verursachen, das Problem detaillirt auszuarbeiten, ausser für den Fall (§ 599), in welchem eine der Hauptaxen mit der Tangente an die Centrallinie zusammenfällt und daher eine Axe reiner Torsion ist. In der Praxis entsprechen auch die Spiralfedern immer dieser Bedingung. Einen anderen interessanten Fall erhalten wir durch die Annahme (die sich praktisch leicht realisiren lässt, aber nicht erfüllt sein darf, wenn man eine gute Spiralfeder haben will), der Normalschnitt des Drahtes sei so gestaltet und in Beziehung auf die Spirale so gelegen, dass die Ebenen des grössten und des kleinsten Biegungswiderstandes gegen die Tangentialebene des Cylinders schräg geneigt sind. Wird auf eine solche Spiralfeder an ihren Enden in der regelmässigen Weise eingewirkt, so muss sie sich in ihrer ganzen Länge um einen gewissen Betrag um ihre elastische Centrallinie drehen, damit das hervorgebrachte Biegungskräftepaar genau in der osculatorischen Ebene der neuen Spirale liege, was, wie wir sofort sehen werden, der Fall sein muss. Aber Alles, was uns bei dieser merkwürdigen Wirkung interessirt, wird später (§ 624) im Falle eines offenen Kreisbogens, welcher durch ein in seiner Ebene drehendes Kräftepaar in einen Kreisbogen von grösserem oder kleinerem Radius deformirt wird, eingehend behandelt werden, und wollen wir uns der Kürze und Einfachheit wegen bei der Betrachtung der Spiralfedern, die wir jetzt beginnen, auf die Fälle beschränken, in welchen der Draht einer Biegung in jeder Richtung denselben Widerstand leistet, oder in welchen die beiden Hauptebenen des (grössten und kleinsten oder des kleinsten und grössten) Widerstandes gegen eine Biegung in jedem Punkte beziehungsweise mit der Tangentialebene des Cylinders und der die Centrallinie des Drahtes berührenden Normalebene zusammenfallen.

605. Wenn die auf das bewegliche Ende der Feder in der Richtung der Axe wirkende Kraft nach Poinsot's Verfahren (§ 555) in irgend einen Punkt der elastischen Centrallinie versetzt wird, so liefert sie ein Kräftepaar in der durch jenen Punkt und die Axe der Spirale gehenden Ebene. Die Resultante dieses Kräftepaars und des Paars, das, wie wir voraussetzen, an dem beweglichen Ende in der zur Axe der Spirale senkrechten Ebene dreht, ist das wirksame Biegungs- und Drillungskräftepaar, und da dasselbe in einer

zur Tangentialebene an den Cylinder senkrechten Ebene liegt, so muss diejenige Componente desselben, welche die Biegung erzeugt, gleichfalls senkrecht zu dieser Ebene sein, folglich in der osculatorischen Ebene der Spirale liegen. Dieses componirende Kräftepaar unterhält daher einfach eine Krümmung, welche von der natürlichen Krümmung des Drahtes verschieden ist, während das andere Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht zur Centrallinie ist, reine Torsion unterhält. Die Gleichungen des Gleichgewichts sind der blosse mathematische Ausdruck dieser Ergebnisse.

Wird wie früher (§ 602) jedes der Biegungs- und Torsionskräftepaare in Componenten zerlegt, deren Ebenen durch die Axe der Spirale gehen und senkrecht zu derselben sind, so erhalten wir

$$(7)\quad \begin{cases} G = B\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{r} - \dfrac{\cos^2\alpha_0}{r_0}\right)\cos\alpha' + A\tau\sin\alpha' \\ -Rr = B\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{r} - \dfrac{\cos^2\alpha_0}{r_0}\right)\sin\alpha' - A\tau\cos\alpha' \\ \tau = \dfrac{\cos\alpha\sin\alpha}{r} - \dfrac{\cos\alpha_0\sin\alpha_0}{r_0}\ \text{(nach § 126)}; \end{cases}$$

darin bezeichnet A den Torsionswiderstand, B den Widerstand, welchen der Draht in der osculatorischen Ebene der Spirale einer Biegung entgegensetzt; r_0 den Radius des Cylinders und α_0 die Neigung der Spirale gegen denselben, so lange sie nicht deformirt ist; r und α dieselben Parameter der Spirale, wenn sie unter der Einwirkung der in der Richtung der Axe thätigen Kraft R und des Kräftepaars G steht; endlich τ die Grösse der Drillung beim Uebergange aus dem undeformirten in den deformirten Zustand.

Diese Gleichungen geben die expliciten Ausdrücke der Kraft und des Kräftepaars, die erforderlich sind, um eine bestimmte Aenderung der Spirale zu erzeugen; sie bestimmen aber auch die Parameter α', r' der geänderten Curve, falls die Kraft und das Kräftepaar gegeben sind.

Da es hauptsächlich die äussere Wirkung der Feder ist, die uns in praktischen Anwendungen interessirt, so wollen wir die Parameter α, r der Spirale durch die folgenden Annahmen eliminiren: —

$$(8)\quad \begin{cases} x = l\sin\alpha,\ \varphi = \dfrac{l\cos\alpha}{r} \\ x_0 = l\sin\alpha_0,\ \varphi_0 = \dfrac{l\cos\alpha_0}{r_0}; \end{cases}$$

darin bezeichnet l die Länge des Drahtes; φ den Winkel zwischen den Ebenen, welche durch die beiden Enden des Drahtes und die Axe gehen; x den Abstand der Ebenen, welche durch die Endpunkte gehen und zur Axe senkrecht sind; φ_0 und x_0 bezeichnen für den undeformirten Zustand dasselbe, was φ und x im deformirten Zustande, so dass wir (φ, x) und (φ_0, x_0) als die Coordinaten des beweglichen Endes in Beziehung auf das feste in beiden Lagen der Feder ansehen können. Die vorhergehenden Gleichungen gehen durch diese Annahmen über in

$$
(9)\quad \begin{cases} L = \frac{B}{l^3}\,\{\sqrt{(l^2-x^2)}\,\varphi - \sqrt{(l^2-x_0^2)}\,\varphi_0\}\,\sqrt{(l^2-x^2)} \\ \qquad + \frac{A}{l^3}\,(x\,\varphi - x_0\,\varphi_0)\,x \\ R = -\frac{B}{l^3}\,\{\sqrt{(l^2-x^2)}\,\varphi - \sqrt{(l^2-x_0^2)}\,\varphi_0\}\,\frac{x\,\varphi}{\sqrt{(l^2-x^2)}} \\ \qquad + \frac{A}{l^3}\,(x\,\varphi - x_0\,\varphi_0)\,\varphi. \end{cases}
$$

Hier sehen wir, dass $L\,d\varphi + R\,dx$ das Differential einer Function der beiden unabhängig Veränderlichen x, φ ist. Wird diese Function mit E bezeichnet, so erhalten wir

$$
(10)\quad \begin{cases} E = \tfrac{1}{2}\,\frac{B}{l^3}\,\{\sqrt{(l^2-x^2)}\,\varphi - \sqrt{(l^2-x_0^2)}\,\varphi_0\}^2 \\ \qquad + \tfrac{1}{2}\,\frac{A}{l^3}\,(x\,\varphi - x_0\,\varphi_0)^2, \\ L = \frac{dE}{d\varphi},\quad R = \frac{dE}{dx}, \end{cases}
$$

ein Resultat, das wir aus dem allgemeinen Princip der Energie leicht hätten herleiten können, und zwar auf folgende Weise: —

606. Die potentielle Energie der deformirten Feder ist, wie man leicht aus § 595 (4) ersieht,

$$
\tfrac{1}{2}\,[B\,(\varpi - \varpi_0)^2 + A\,\tau^2]\,l,
$$

wenn A den Widerstand gegen eine Torsion, B den Widerstand gegen eine Biegung in der Krümmungsebene, ϖ und ϖ_0 die Krümmungen des Drahtes im deformirten und undeformirten Zustande und τ die Drillung des Drahtes im deformirten Zustande bezeichnen; dabei wird vorausgesetzt, dass die Drillung im undeformirten Zustande Null sei. Die Kraft in der Richtung der Axe und das Kräftepaar, die erforderlich sind, um zu bewirken, dass die Axe der von der Feder gebildeten Spirale irgend eine gegebene Länge habe, und dass die durch ihre Enden und die Axe gelegten Ebenen irgend einen gegebenen Winkel einschliessen, sind natürlich (§ 272) gleich den Aenderungen der potentiellen Energie, genommen beziehungsweise für die Einheit der Aenderung dieser Coordinaten. Man hat aber sorgfältig zu beachten, dass die Bewegung etwas complicirt wird, wenn man die mit dem einen Ende der Feder starr verbundene Platte festhält, so dass die Tangente an diesem Ende fixirt wird, und die Bewegung der anderen Platte so regulirt, dass die zwischen beiden Platten liegende Feder beständig genau spiralförmig erhalten wird; denn wenn sich die Form der Feder ändert, so ändern sich auch der Radius des Cylinders, die Neigung der Axe

der Spirale zu der festen Richtung der Tangente am festen Ende und die Lage des Punktes, in welchem die Axe von der Ebene geschnitten wird, welche senkrecht zu ihr steht und durch das feste Ende der Feder geht. Die wirksamen Componenten einer beliebigen unendlich kleinen Bewegung des beweglichen Endes sind seine Verschiebung parallel der augenblicklichen Lage der Axe der Spirale und seine Rotation um diese Axe (zwei Grade von Freiheit); ausserdem wird dieses Ende im Allgemeinen eine unendlich kleine Verschiebung in einer gewissen Richtung und eine Rotation um eine gewisse Linie erfahren, von denen jede zu dieser Axe senkrecht ist und aus den beiden Graden von freier Bewegung durch die Bedingung bestimmt wird, dass die Curve eine genaue Spirale bleibt.

607. Beim praktischen Gebrauch der Spiralfedern ist diese Bedingung nicht streng erfüllt, sondern statt dessen gewöhnlich einer der beiden folgenden Pläne befolgt: —

(1) Man lässt eine einfache Kraft allein wirken, die zwei bestimmte, so weit es möglich ist in der Axe der undeformirten Spirale liegende Punkte der beiden Enden von einander entfernt oder einander nähert; oder

(2) Man hält das eine Ende fest und lässt das andere, ohne eine Rotation zu gestatten, in einer festen Richtung fortgleiten, die so weit es möglich ist, mit der Richtung der Axe der undeformirten Spirale zusammenfällt. Die vorstehende Untersuchung lässt sich auf die unendlich kleine Verschiebung jedes dieser beiden Fälle anwenden: im Falle (1) ist das Kräftepaar gleich Null gesetzt, und im Falle (2) ist die Rotationsbewegung um die augenblickliche Axe der Spirale gleich Null.

Für unendlich kleine Verschiebungen sei in (10)

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi \text{ und } x = x_0 + \delta x,$$

so dass jetzt

$$L = \frac{dE}{d\delta\varphi}, \quad R = \frac{dE}{d\delta x}$$

ist. Dann erhalten wir, wenn in jeder Formel nur die Glieder vom niedrigsten Grade in Beziehung auf δx und $\delta\varphi$ beibehalten werden, und x und φ statt x_0 und φ_0 geschrieben wird,

$$(11)\quad \begin{cases} E = \frac{1}{2l^3}\left\{\left(B\frac{x^2}{l^2-x^2}+A\right)\varphi^2\delta x^2 + 2(A-B)x\varphi\delta x\delta\varphi \right. \\ \qquad\qquad \left. + [B(l^2-x^2)+A x^2]\,\delta\varphi^2\right\}, \\ R = \frac{1}{l^3}\left\{\left(B\frac{x^2}{l^2-x^2}+A\right)\varphi^2\delta x + (A-B)x\varphi\,\delta\varphi\right\}, \\ L = \frac{1}{l^3}\left\{(A-B)x\varphi\delta x + [B(l^2-x^2)+Ax^2]\,\delta\varphi\right\}. \end{cases}$$

Beispiel 1. — Für eine Spirale von 45⁰ Neigung ist

$$x^2 = \tfrac{1}{2}\, l^2 \text{ und } \varphi^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{l^2}{r^2};$$

die Formeln gehen also über in

$$(12)\quad \begin{cases} R = \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{l r^2}\,[(A+B)\,\delta x + (A-B)\,r\delta\varphi], \\ L = \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{l r}\,[(A-B)\,\delta x + (A+B)\,r\delta\varphi]. \end{cases}$$

Es ist sehr lehrreich, diesen Fall sorgfältig zu studiren und nöthigenfalls durch ein Modell zu erläutern, das sich aus gewöhnlichem Eisen- oder Stahldraht leicht herstellen lässt.

Beispiel 2. — Es sei $\frac{x}{l}$ sehr klein. Wir können dann das Quadrat dieser Grösse vernachlässigen und erhalten $\varphi = \frac{l}{r}$, also

$$L = \frac{B}{l}\,\delta\varphi \text{ und } R = \frac{A}{l r^2}\,\delta x.$$

Die erstere dieser beiden Formeln ist einfach die Gleichung der directen Biegung (§ 595). Die Interpretation der zweiten Formel ist folgende: —

608. Spiralfeder von unendlich kleiner Neigung. Torsionswage. — Bei einer Spiralfeder von unendlich kleiner Neigung gegen die zu ihrer Axe senkrechte Ebene ist die in dem beweglichen Ende durch eine in der Axe der Spirale wirkende Kraft hervorgebrachte Verschiebung eine einfache geradlinige Translation in der Richtung der Axe und gleich der Länge des Kreisbogens, durch welchen eine gleich grosse Kraft das freie Ende eines dem Radius des Cylinders gleichen starren Hebelarmes fortbewegen würde, welcher den Draht zu torquiren hätte; dabei ist angenommen, dass der Draht der Spirale gerade gestreckt worden sei, sein eines Ende vollkommen festgehalten werde, und dass der Hebel am anderen Ende normal zur Länge des Drahtes und so befestigt sei, dass er sich nur um eine mit der Axenlinie des Drahtes zusammenfallende Axe drehen kann. Dieser Ausspruch rührt von J. Thomson*) her, welcher

*) Camb. u. Dubl. Math. Journ. 1848.

zeigte, dass, wenn man eine Spiralfeder von unendlich kleiner Neigung ausspannt, die ausgeübte Wirkung und die benutzte elastische Eigenschaft dieselben wie bei einer Torsionswage sind, welche denselben Draht, aber gerade gestreckt, enthält (§ 433). Diese Theorie ist, wie J. Thomson experimentell zeigte, für die meisten praktischen Anwendungen hinlänglich genau, da die gewöhnlich angefertigten und gebrauchten Spiralfedern von sehr kleiner Neigung sind. Es ist nicht schwer, aus den vorhergehenden Formeln in jedem Falle die für die vorhandene Neigung erforderliche Correction zu finden. Das Fundamentalprincip, dass Spiralfedern hauptsächlich vermittels der Torsion wirken, scheint zuerst von Binet im Jahre 1814 entdeckt worden zu sein*).

609. Kirchhoff's Vergleich der Biegung und Drillung eines Drahtes mit der Rotation eines starren Körpers. — Wir kehren jetzt zum Falle eines gleichförmigen Drahtes zurück, der, wenn Nichts auf ihn einwirkt, gerade und ungedrillt (d. h. cylindrisch oder prismatisch) ist, und nehmen an, es wirke auf den Draht, dessen eines Ende in einer gegebenen Richtung festgehalten wird, keine Kraft von aussen, ausser derjenigen eines am anderen Ende befestigten starren Rahmens, auf welchen in einer gegebenen Linie AB eine Kraft R und in einer zu dieser Linie senkrechten Ebene ein Kräftepaar G wirkt. Die Gestalt und die Drillung, die der Draht haben wird, wenn er sich im Gleichgewicht befindet, werden durch die Bedingung bestimmt, dass in jedem Punkte P seiner Länge die Torsion und die Biegung die sind, welche das Kräftepaar G in Verbindung mit dem durch Versetzung der Kraft R nach P erhaltenen Kräftepaare erzeugt. Es folgt daraus, dass der starre Körper des § 597, der sich in der vorgeschriebenen Weise um den festen Punkt O bewegt, und der nur einer constanten in dem Punkte $,T$ in einer zu AB parallelen Linie $,TD$ angreifenden Kraft von der Grösse R unterworfen ist, sich weiter in der vorgeschriebenen Weise bewegen wird, wenn man ihn in irgend einem Augenblick sich selbst überlässt.

Dies zu beweisen, nehmen wir an, der Körper werde gezwungen, sich in der vorgeschriebenen Weise zu bewegen, und zugleich wirke auf ihn die Kraft R in der Linie $,TD$. Nehmen wir dann die Coordinaten-Axe OX parallel dieser Linie an und bezeichnen mit x, y, z die Coordinaten von P zu irgend einer Zeit t, so sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Richtungscosinus von O,T, und die in der Linie $,TD$ wirkende Kraft R

*) St. Venant, Comptes Rendus. Sept. 1864.

hat, da die Länge von $O_{\prime}T$ Eins ist, in Beziehung auf die Axen OX, OY, OZ beziehungsweise die Momente

$$0, \quad R\frac{dz}{ds}, \quad -R\frac{dy}{ds}.$$

Folglich sind die Momente der hierdurch in irgend einer Zeit erzeugten Bewegungsgrösse (es sind dies einfach ihre Zeitintegrale), da $s = t$ ist,

$$0, \quad R(z - z_0), \quad -R(y - y_0),$$

wenn (y_0, z_0) und (y, z) die Coordinaten von P zu Anfang und zu Ende der Zeit sind. Dies sind aber genau die Zunahmen, welche die componirenden Kräftepaare der torquirenden Biegung im Drahte von der ersten zur zweiten Lage von P erfahren. Wenn also die componirenden Momente der Bewegungsgrösse des Körpers beim Beginn der Zeit gleich den componirenden Kräftepaaren der torquirenden Biegung des Drahtes im Punkte (x_0, y_0, z_0) sind, so wird die Wirkung der Kraft R, während der Punkt O festgehalten wird, darin bestehen, dass das Moment seiner Bewegungsgrösse beständig mit dem Kräftepaar der torquirenden Biegung des Drahtes in Uebereinstimmung erhalten bleibt, und dass folglich seine Linien $O_{\prime}T$, $O_{\prime}K$, $O_{\prime}L$ den entsprechenden durch P gehenden Linien im Drahte parallel bleiben, welcher von P mit der Einheit der Geschwindigkeit durchlaufen wird.

Dieser sehr bemerkenswerthe Satz ist von Kirchhoff entdeckt worden, dem wir auch die erste ganz allgemeine Untersuchung über die Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung eines elastischen Drahtes verdanken*).

610. Der auf diese Weise dargelegte Vergleich zwischen dem statischen Problem der Biegung und Drillung eines Drahtes und dem kinetischen Problem der Rotation eines starren Körpers liefert eine interessante Veranschaulichung oder gewissermaassen graphische Darstellung eines jeden dieser Vorgänge durch den andern. Den Nutzen, der hierdurch für eine vollständige geistige Aneignung beider Gegenstände erwächst, muss Jeder empfinden, der den Gewinn an physikalischer Einsicht höher schätzt, als das mechanische Durcharbeiten mathematischer Ausdrücke, welcher letzteren Arbeit sich in der letzten Zeit leider so Viele gewidmet haben, die zu besseren Dingen in der Wissenschaft befähigt waren.

Im Capitel IX, wo wir uns mit dem kinetischen Problem besonders beschäftigen, werden wir Gelegenheit haben, die Rotationen zu untersuchen, welche den Spiralen der §§ 601 bis 603 entsprechen, und auch den allgemeinen Charakter der elastischen Curven

*) Crelle's Journal 1859. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes.

anzugeben, welche einigen der weniger einfachen Fälle von Rotationsbewegung entsprechen.

611. Das gemeine Pendel und die elastische Curve. — Für jetzt beschränken wir uns auf ein Beispiel, welches, soweit es den Vergleich zwischen dem statischen und dem kinetischen Problem betrifft, das einfachste von allen ist — die elastische Curve von Johann Bernoulli und das gemeine Pendel. Auf einen gleichförmigen geraden Draht, der entweder in allen Ebenen seine ganze Länge hindurch gleich biegsam ist, oder in zwei Ebenen seine ganze Länge hindurch Richtungen des grössten und kleinsten Biegungswiderstandes hat, wirken in einer dieser Ebenen eine Kraft und ein Kräftepaar ein, die am einen Ende entweder direct, oder vermittels eines mit demselben starr verbundenen Armes angreifen, während das andere Ende festgehalten wird. Die Kraft und das Kräftepaar können natürlich (§ 558) auf eine einzige Kraft reducirt werden; der äusserste Fall, in welchem sich bei dieser Reduction statt einer Kraft ein Kräftepaar ergibt, ist mathematisch insofern im allgemeinen Fall enthalten, als das Kräftepaar einer in einem unendlich grossen Abstande wirkenden unendlich kleinen Kraft äquivalent ist. Um jede Beschränkung des Problems zu vermeiden, müssen wir voraussetzen, diese Kraft wirke auf einen mit dem Drahte starr verbundenen Arm, obschon die Kraft in jedem Falle, in welchem ihre Richtung den Draht schneidet, direct in diesen Schnittpunkt versetzt werden kann, ohne dass dadurch die Umstände für den Drahttheil zwischen diesem Punkte und dem festen Ende geändert würden. Unter diesen Umständen wird der Draht in eine Curve gebogen, welche ganz in der durch das feste Ende und die Richtung der Kraft gehenden Ebene liegt, und deren Krümmung (§ 599) in jedem Punkte, wie zuerst Johann Bernoulli gezeigt hat, einfach dem Abstand des Punktes von der Richtung der Kraft proportional ist. Die Curve, welche dieser Bedingung genügt, hat offenbar zwei unabhängige Parameter, von denen der eine passend als die mittlere Proportionale a zwischen dem Krümmungsradius in irgend einem Punkte und dem Abstand dieses Punktes von der Richtung der Kraft angesehen wird, während der andere der grösste Abstand b des Drahtes von der Kraftlinie ist. Wenn man irgend einen Werth für jeden dieser Parameter wählt, so ist es leicht, die entsprechende Curve mit einem hohen Grade von Genauigkeit zu verzeichnen. Man beginnt mit einem kleinen Kreisbogen, welcher eine in der gegebenen grössten Entfernung von der Kraftlinie gezogene Gerade am einen Ende berührt, und

fährt fort, solche kleine Kreisbogen zu zeichnen, deren Radien in entsprechender Weise zunehmen, wie die Abstände ihrer Mittelpunkte von der Richtung der Kraft kleiner werden. Die beigefügten Figuren sind aber nicht in dieser Weise, sondern einfach nach den Formen gezeichnet, welche eine flache Stahlfeder wirklich annahm; die Feder war so schmal, dass ihre Gestalt in den Fällen, in welchen einige ihrer Theile einander kreuzten, durch die dadurch bedingte Windung der Curve (§ 7) nicht sehr gestört wurde. Die Art der Anlegung der Kraft ist hinlänglich in den Figuren angedeutet worden.

Gleichung der ebenen elastischen Curve. — Es sei die Richtung der Kraft die x-Axe und ϱ der Krümmungsradius in irgend einem Punkte (x, y) der Curve. Dann verwandelt sich die oben ausgesprochene dynamische Bedingung in

$$\varrho y = \frac{B}{T} = a^2, \tag{1}$$

wo B den Biegungswiderstand, T die Spannung der Feder und a einen von diesen Elementen abhängigen linearen Parameter der Curve bezeichnet. Nach der gewöhnlichen Formel für ϱ^{-1} ist daher

$$y = \frac{a^2 \frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}. \tag{2}$$

Wird dies mit $2\,dy$ multiplicirt und darauf integrirt, so folgt

$$y^2 = C - \frac{2\,a^2}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{1/2}}, \tag{3}$$

und endlich

$$x = \int \frac{(y^2 - C)\,dy}{(4\,a^4 - C^2 + 2\,Cy^2 - y^4)^{1/2}}, \tag{4}$$

was die Gleichung der Curve in Form eines elliptischen Integrals ist.

Wird in dem ersteren Integral, (3), $\frac{dy}{dx} = 0$ gesetzt, so erhält man

$$y = \pm\,(C \pm 2\,a^2)^{1/2}; \tag{5}$$

das obere Zeichen innerhalb der Klammer liefert Punkte des grössten Abstandes von der Axe, das untere Zeichen Punkte, für welche dieser Abstand ein Minimum ist, wenn es reelle Punkte der Art gibt. Folglich gibt es, wenn $C < 2\,a^2$ ist, zu beiden Seiten der Linie der Kraft Punkte, welche von dieser Linie gleiche grösste Abstände haben, aber keine reellen Punkte, für welche die Abstände Minima seien; hierin sind also die in den Figuren 28 bis 32 (a. f. S.) dargestellten Fälle enthalten. Wenn dagegen $C > 2\,a^2$ ist, so gibt es sowohl reelle Minima als Maxima; dies ist also der Fall der Figur 34. Wir bemerken, dass die analytischen Gleichungen in diesem Falle zwei congruente abgesonderte Curven um-

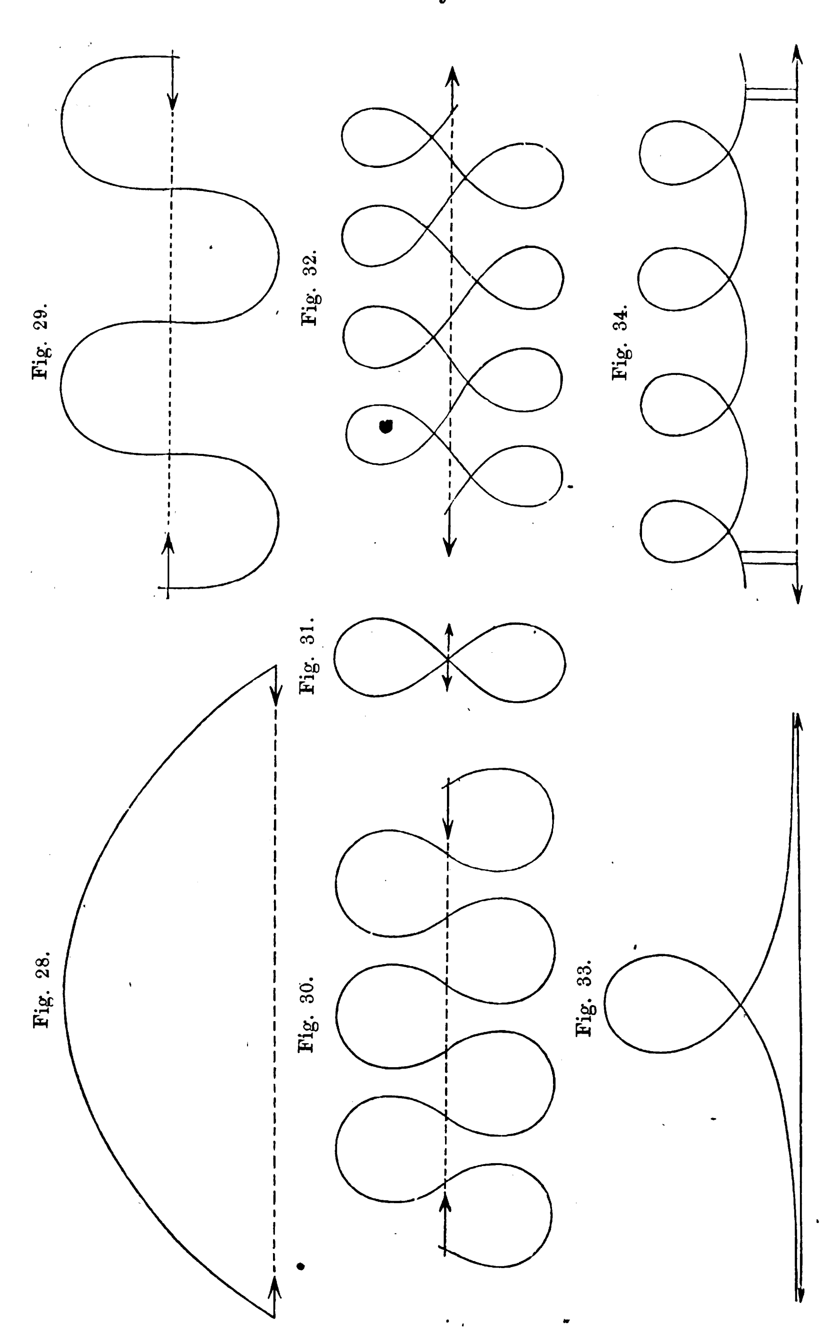


Fig. 28.

Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 31.

Fig. 32.

Fig. 33.

Fig. 34.

fassen, die symmetrisch zu beiden Seiten der Kraftlinie liegen, und von denen nur eine in der Figur gezeichnet ist.

Der Fall $C = 2a^2$ endlich ist der der Fig. 33. Für ihn nimmt das letzte Integral eine logarithmische Form an. Es ist nämlich

$$x = \int \frac{y\,dy}{(4a^2 - y^2)^{1/2}} - \int \frac{2a^2\,dy}{y(4a^2 - y^2)^{1/2}},$$

oder, wenn man die Integrationen ausführt und die Constante so wählt, dass die y Axe die Axe der Symmetrie werde,

$$(6) \qquad x = -(4a^2 - y^2)^{1/2} + a \log \frac{2a + (4a^2 - y^2)^{1/2}}{y}.$$

Wenn das Radical mit den angegebenen Zeichen genommen wird, so stellt diese Gleichung den Zweig dar, welcher vom Scheitel aus zuerst zur negativen Seite der y Axe geht, dieselbe dann in dem Doppelpunkte durchkreuzt und sich darauf der positiven Seite der x Axe immer mehr nähert, so dass diese eine Asymptote wird. Der andere Zweig wird durch dieselbe Gleichung dargestellt, wenn man darin das Zeichen des Radicals an jeder Stelle umkehrt.

Wir brauchen wohl kaum zu bemerken, dass sich das Zeichen von $\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{1/2}$ in (3) für einen die Curve stetig durchlaufenden Punkt nur dann ändern kann, wenn $\frac{dy}{dx}$ unendlich wird. Die Interpretation wird erleichtert, wenn man

$$\frac{dy}{dx} = \tan \vartheta, \text{ oder } \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{1/2} = -\cos \vartheta$$

setzt, wodurch (3) auf

$$(7) \qquad y^2 = 2a^2 \cos \vartheta + C$$

reducirt wird.

Wenn jetzt $C > 2a^2$ ist (der Fall, in welchem es, wie wir oben sahen, sowohl Minimal- als Maximalwerthe von y zu einer Seite der Linie der Kraft gibt), so kann der Werth von ϑ unbegrenzt wachsen. Derselbe nimmt natürlich für einen Punkt, der die Curve stetig durchläuft, stetig zu; seine Zunahme für eine vollständige Periode beträgt 2π (Fig. 34).

Wenn $C < 2a^2$ ist, so hat ϑ in den Punkten, in welchen die Curve die Linie der Kraft schneidet, gleiche positive und negative Werthe. Diese Werthe, welche die Formel

$$(8) \qquad \cos \vartheta = -\frac{C}{2a^2}$$

liefert, sind stumpf, wenn C positiv ist (Fig. 30), spitz, wenn C negativ ist (Fig. 28). Der grösste negative Werth von C ist natürlich $-2a^2$.

Wenn wir $C = -2a^2 + b^2$ annehmen, so wird, wie wir aus (7) sehen, $\pm b$ der grösste positive oder negative Werth von y sein, und wenn wir voraussetzen, dass b sehr klein im Vergleich zu a ist, so erhalten wir den Fall einer gleichförmigen Feder, welche wie ein Bogen durch eine zwischen ihren Enden ausgespannte Schnur schwach gebogen ist.

612. Schwach gebogener Stab. — Ein wichtiger besonderer Fall ist der der Figur 28, welcher einem gebogenen Stabe (Bogen zum Schiessen) entspricht, der überall einer Biegung denselben Widerstand entgegensetzt. Wenn die Grösse der Biegung klein ist, so lässt sich die Gleichung leicht bis zu jedem erforderten Grade der Genauigkeit näherungsweise integriren. Wir wollen die Art, wie man in dieser Untersuchung zu verfahren hat, bloss skizziren.

Es sei e der grösste Abstand von der Axe, welcher $x = 0$ entspricht. Dann liefert $y = e$ sofort $\frac{dy}{dx} = 0$ und die Gleichung (3) geht über in

$$e^2 - y^2 = 2a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}\right),$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{e^2-y^2}\sqrt{4a^2-e^2+y^2}}{2a^2-e^2+y^2} \tag{9}$$

folgt. Um eine erste Annäherung zu erhalten, lassen wir $e^2 - y^2$ in jedem Factor fort, in welchem auch die Grösse a^2 vorkommt, und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{e^2-y^2}}{a},$$

oder, da $y = e$, wenn $x = 0$ ist,

$$y = e \cos\frac{x}{a}, \tag{10}$$

die Gleichung der harmonischen oder Sinus-Linie, welches die einfachste von einer vibrirenden Schnur oder einem Pianofortedraht angenommene Form ist.

Um genauere Näherungswerthe zu erhalten, können wir für y in den Factoren, wo es ausgelassen war, den in (10) gegebenen Werth substituiren, u. s. w. Auf diese Weise ergibt sich näherungsweise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{e^2-y^2}}{a}\left(1 + \frac{3e^2}{8a^2}\sin^2\frac{x}{a}\right),$$

oder

$$\frac{dy}{\sqrt{e^2-y^2}} = \frac{dx}{a}\left(1 + \frac{3e^2}{16a^2} - \frac{3e^2}{16a^2}\cos\frac{2x}{a}\right),$$

woraus durch Integration

$$\arccos\frac{y}{e} = \frac{x}{a}\left(1 + \frac{3e^2}{16a^2}\right) - \frac{3e^2}{32a^2}\sin\frac{2x}{a}$$

und

$$y = e\cos\left\{\frac{x}{a}\left(1 + \frac{3e^2}{16a^2}\right)\right\} + \frac{3e^3}{32a^2}\sin\frac{x}{a}\sin\frac{2x}{a}$$

folgt.

613. Da wir im Besonderen das gewöhnliche Pendel für das entsprechende kinetische Problem wählen, so muss die auf den



verglichenen starren Körper wirkende Kraft die in der Verticalen durch den Schwerpunkt wirkende Schwerkraft sein. Daher ist es zweckmässig, nicht die Einheit als die Geschwindigkeit für den Vergleichungspunkt auf dem gebogenen Drahte zu wählen, sondern die Geschwindigkeit, welche die Schwerkraft in einem Körper erzeugen würde, der einen Weg von der Höhe $\frac{a}{2}$ hindurch fällt, und diese Constante a (§ 611) ist dann die Länge des isochronen einfachen Pendels. Wenn also die Kraftlinie einer elastischen Curve vertical gehalten wird und ein Punkt P sich mit einer constanten Geschwindigkeit von der Grösse $\sqrt{ga}$ (wo a die mittlere Proportionale zwischen dem Krümmungsradius in irgend einem Punkte und dem Abstande dieses Punktes von der Kraftlinie ist) durch dieselbe bewegt, so wird die Tangente in P beständig einem einfachen Pendel von der Länge a parallel sein, das ihr in irgend einem Augenblick parallel gerichtet und mit der nämlichen Winkelgeschwindigkeit in Bewegung gesetzt ist. Die Figuren 28, ..., 32 entsprechen den Vibrationen des Pendels. Die Figur 33 entspricht dem Falle, in welchem das Pendel gerade seine Lage instabilen Gleichgewichts nach Ablauf einer unendlich langen Zeit erreichen würde. Die Figur 34 entspricht Fällen, in welchen das Pendel unaufhörlich mit periodisch zu- und abnehmender Geschwindigkeit in einer Richtung herumfliegt. Der Grenzfall, in welchem die elastische Curve kreisförmig ist, entspricht einem Pendel, das mit einer unendlichen Winkelgeschwindigkeit herumfliegt, die im Laufe einer Umdrehung natürlich nur eine unendlich kleine Aenderung erleidet. Ein bemerkenswerthes Ergebniss ist, dass die Rectification der elastischen Curve dasselbe analytische Problem ist, wie die Bestimmung der Zeit, welche das Pendel zur Beschreibung eines beliebig gegebenen Winkels gebraucht.

614. Ein Draht von beliebiger Form unter der Einwirkung beliebig vertheilter Kräfte und Kräftepaare. — Bisher haben wir unsere Untersuchung der Form und der Drillung eines in gezwängtem Zustande befindlichen Drahtes auf einen solchen Theil desselben beschränkt, der selbst keiner unmittelbaren Einwirkung äusserer Kräfte ausgesetzt ist, sondern nur von seinen Enden her die Wirkung zweier sich gegenseitig im Gleichgewicht haltender Kraftsysteme fortleitet und überträgt. Auf diese Weise haben wir von der Untersuchung ausgeschlossen die für die Praxis wichtigen Fälle einer Curve, welche durch ihr eigenes Gewicht, oder durch

die Centrifugalkraft deformirt wird, oder welche Gleichgewichtsbedingungen von der Art erfüllt, wie wir sie später bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen nach dem D'Alembert'schen Princip zu benutzen haben werden. Wir wenden uns jetzt zu einer völlig allgemeinen Erforschung des Gleichgewichts einer Curve, die in ihrer ganzen Länge gleichförmig ist, oder nicht; die im ungezwängten Zustande gerade oder beliebig gebogen und gedrillt ist; die durch keine Bedingung hinsichtlich der Lagen der drei Hauptaxen der torquirenden Biegung (§ 596) beschränkt ist, und auf die beliebig vertheilte Kräfte und Kräftepaare einwirken.

Es seien α, β, γ die Componenten der Kraft und ξ, η, ζ die Componenten des Kräftepaars, aus denen die Wechselwirkung zwischen der Materie auf der einen und der anderen Seite des durch den Punkt (x, y, z) gehenden Normalschnitts besteht. Dann sind die Componenten für den durch $(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z)$ gehenden Normalschnitt

$$\alpha + \frac{d\alpha}{ds}\delta s, \quad \beta + \frac{d\beta}{ds}\delta s, \quad \gamma + \frac{d\gamma}{ds}\delta s.$$

$$\xi + \frac{d\xi}{ds}\delta s, \quad \eta + \frac{d\eta}{ds}\delta s, \quad \zeta + \frac{d\zeta}{ds}\delta s.$$

Sind also $X\delta s$, $Y\delta s$, $Z\delta s$ und $L\delta s$, $M\delta s$, $N\delta s$ die Componenten der Kraft und des Kräftepaars, welche auf den zwischen jenen Normalschnitten liegenden Theil δs des Drahtes einwirken, so erhalten wir (§ 551) für das Gleichgewicht dieses Theils des Drahtes

$$-X = \frac{d\alpha}{ds}, \quad -Y = \frac{d\beta}{ds}, \quad -Z = \frac{d\gamma}{ds} \tag{1}$$

und (wenn die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung, wir $\delta y\,\delta s$, vernachlässigt werden)

$$-L\delta s = \frac{d\xi}{ds}\delta s + \gamma\delta y - \beta\delta z, \text{ u. s. w.,}$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} -L &= \frac{d\xi}{ds} + \gamma\frac{dy}{ds} - \beta\frac{dz}{ds} \\ -M &= \frac{d\eta}{ds} + \alpha\frac{dz}{ds} - \gamma\frac{dx}{ds} \\ -N &= \frac{d\zeta}{ds} + \beta\frac{dx}{ds} - \alpha\frac{dy}{ds}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Aus diesen sechs Gleichungen (1) und (2) lassen sich α, β, γ mittels der folgenden zweckmässigen Annahme

$$\alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{dy}{ds} + \gamma\frac{dz}{ds} = T \tag{3}$$

eliminiren, wo T die Componente der Kraft bedeutet, welche auf den Normalschnitt längs der Tangente an die Mittellinie wirkt. Hieraus und aus der zweiten und dritten der Gleichungen (2) ergibt sich

$$\alpha = T\frac{dx}{ds} - \left(M + \frac{d\eta}{ds}\right)\frac{dz}{ds} + \left(N + \frac{d\zeta}{ds}\right)\frac{dy}{ds}.$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man für β und γ, und durch Einsetzung derselben in (1) folgt

$$(4)\quad \begin{cases} X = -\frac{d}{ds}\left\{T\frac{dx}{ds} - \left(M + \frac{d\eta}{ds}\right)\frac{dz}{ds} + \left(N + \frac{d\zeta}{ds}\right)\frac{dy}{ds}\right\} \\ Y = -\frac{d}{ds}\left\{T\frac{dy}{ds} - \left(N + \frac{d\zeta}{ds}\right)\frac{dx}{ds} + \left(L + \frac{d\xi}{ds}\right)\frac{dz}{ds}\right\} \\ Z = -\frac{d}{ds}\left\{T\frac{dz}{ds} - \left(L + \frac{d\xi}{ds}\right)\frac{dy}{ds} + \left(M + \frac{d\eta}{ds}\right)\frac{dx}{ds}\right\}. \end{cases}$$

Ausserdem erhalten wir aus (2)

$$(5)\qquad 0 = \frac{dx}{ds}\left(L + \frac{d\xi}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\left(M + \frac{d\eta}{ds}\right) + \frac{dz}{ds}\left(N + \frac{d\zeta}{ds}\right).$$

Um den mathematischen Ausdruck der Umstände zu vervollständigen, erübrigt nur noch, die Gleichungen der torquirenden Biegung einzuführen. Zu diesem Zwecke nehmen wir in dem durch P gehenden Normalschnitt zwei beliebige zu einander senkrechte Linien PK, PL der Substanz des Drahtes als Coordinatenaxen an. Die Componenten der Krümmung (§ 589) in den zu diesen Linien senkrechten und durch die Tangente PT gehenden Ebenen seien, wenn der Draht undeformirt ist, $\varkappa_0$, λ_0, wenn er deformirt ist, $\varkappa$, λ. Ferner werde die Grösse der Drillung (§ 119), welche jede der Coordinatenaxen um die Tangente von Punkt zu Punkt den Draht entlang hat, mit τ_0 bezeichnet, wenn der Draht undeformirt ist, mit τ im entgegengesetzten Falle, so dass $\tau - \tau_0$ die Grösse der durch die einwirkenden Kräfte in P erzeugten Drillung ist. Dann erhalten wir [§ 595 (3)]

$$(6)\quad \begin{cases} \xi l + \eta m + \zeta n = A(\varkappa - \varkappa_0) + c\,(\lambda - \lambda_0) + b\,(\tau - \tau_0) \\ \xi l' + \eta m' + \zeta n' = c\,(\varkappa - \varkappa_0) + B(\lambda - \lambda_0) + a\,(\tau - \tau_0) \\ \xi\frac{dx}{ds} + \eta\frac{dy}{ds} + \zeta\frac{dz}{ds} = b\,(\varkappa - \varkappa_0) + a\,(\lambda - \lambda_0) + C(\tau - \tau_0), \end{cases}$$

wo (l, m, n), $(l'\, m'\, n')$, $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$ die Richtungen von PK, PL, PT bezeichnen, so dass

$$(7)\quad \begin{cases} l\frac{dx}{ds} + m\frac{dy}{ds} + n\frac{dz}{ds} = 0,\ l'\frac{dx}{ds} + m'\frac{dy}{ds} + n'\frac{dz}{ds} = 0 \\ ll' + mm' + nn' = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1,\ \ l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1 \end{cases}$$

ist.

Werden jetzt, wie in § 593, Linien $O{,}K$, $O{,}L$, $O{,}T$ gezogen, jede von der Längeneinheit und beständig parallel PK, PL, PT, und lässt man den Punkt P die Curve mit der Einheit der Geschwindigkeit durchlaufen, so ist die parallel zu $O{,}T$ genommene Geschwindigkeitscomponente von ${,}L$, oder die parallel zu $O{,}K$ und mit dem entgegengesetzten Zeichen genommene Geschwindigkeitscomponente von ${,}T$ gleich $\varkappa$ (§ 593). Da Aehnliches für λ und τ gilt, so ist

$$
(8)\quad \begin{cases}
\varkappa = -\left(l' \dfrac{d\dfrac{dx}{ds}}{ds} + m' \dfrac{d\dfrac{dy}{ds}}{ds} + n' \dfrac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds}\right) \\
\lambda = +\left(l \dfrac{d\dfrac{dx}{ds}}{ds} + m \dfrac{d\dfrac{dy}{ds}}{ds} + n \dfrac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds}\right) \\
\tau = +\left(l' \dfrac{dl}{ds} + m' \dfrac{dm}{ds} + n' \dfrac{dn}{ds}\right).
\end{cases}
$$

Die Gleichungen (7) reduciren (l, m, n), $(l', m' n')$ auf ein variabeles Element; es ist dies die Coordinate, durch welche die Lage der Substanz des Drahtes in Beziehung auf die Tangente irgend eines Punktes der Centralcurve bestimmt wird. Weiter drücken die Gleichungen (8) $\varkappa$, λ, τ durch diese Coordinate und die drei cartesischen Coordinaten x, y, z von P aus. Die über den ungezwängten Zustand des Drahtes festgesetzten Bestimmungen liefern $\varkappa_0$, λ_0, τ_0 als Functionen von s. Dann geben die Gleichungen (6) jede der Grössen ξ, η, ζ ausgedrückt durch s, die vier Coordinaten und die nach s genommenen Differentialquotienten derselben. Werden diese Werthe in (4) und (5) eingesetzt, so erhalten wir vier Differentialgleichungen, welche in Verbindung mit

$$
(9)\qquad \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1
$$

die fünf Gleichungen ausmachen, vermittels welcher die fünf unbekannten Grössen (die vier Coordinaten und die Spannung T) sich durch s ausdrücken lassen, oder vermittels welcher, nach Elimination von s und T, die beiden Gleichungen der Curve gefunden und die Coordinate für den Grad der Drehung des Normalschnitts um die Tangente durch x, y, z ausgedrückt werden.

Die Grenzbedingungen für irgend welche bestimmten Umstände lassen sich mittels der Gleichungen (2) leicht mathematisch ausdrücken. Wenn z. B. eine gegebene Kraft und ein gegebenes Kräftepaar direct an einem freien Ende angebracht sind, oder wenn das Problem auf einen Theil des Drahtes beschränkt ist, der nach einer Richtung hin im Punkte Q aufhört, und wenn auf den durch Q gehenden Normalschnitt des betrachteten Drahttheils in Folge der jenseits Q angreifenden Kräfte eine gegebene Kraft $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ und ein gegebenes Kräftepaar (ξ_0, η_0, ζ_0) einwirken, so werden die Gleichungen, welche die Grenzbedingungen ausdrücken, folgende sein:

$$
(10)\quad \begin{cases}
\xi = \xi_0, \quad -\dfrac{d\xi}{ds} = L_0 + \left(\gamma_0 \dfrac{dy}{ds} - \beta_0 \dfrac{dz}{ds}\right) \\
\eta = \eta_0, \quad -\dfrac{d\eta}{ds} = M_0 + \left(\alpha_0 \dfrac{dz}{ds} - \gamma_0 \dfrac{dx}{ds}\right) \\
\zeta = \zeta_0, \quad -\dfrac{d\zeta}{ds} = N_0 + \left(\beta_0 \dfrac{dx}{ds} - \alpha_0 \dfrac{dy}{ds}\right)
\end{cases} \Bigg|\ \text{wenn } s = s_0;
$$

darin bezeichnet s_0 die Länge des Drahtes von dem Punkte an, von welchem aus s gemessen wird, bis zum Punkte Q, und L_0, M_0, N_0 sind die Werthe von L, M, N in Q.

Nehmen wir $L_0 = 0$, $M_0 = 0$, $N_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$ an, so ergibt sich Folgendes: —

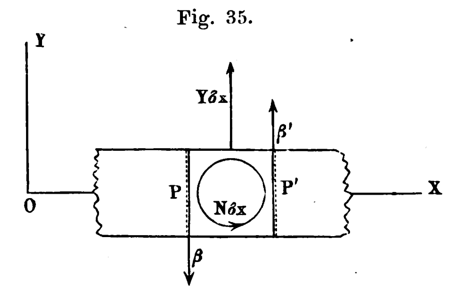
615. In dem einfachen und wichtigen Falle eines von Natur geraden Drahtes, auf den in seiner ganzen Länge beliebig vertheilte Kräfte, aber keine Kräftepaare wirken, besteht die in einem völlig freien, weder von einer Kraft, noch von einem Kräftepaar angegriffenen Ende erfüllte Bedingung darin, dass sowohl die Krümmung, als auch die Grösse ihrer Variation, genommen für die vom Ende aus gerechnete Einheit der Länge, an diesem Ende Null ist. Mit anderen Worten: Die Krümmungen in Punkten, welche dem Ende unendlich nahe liegen, verhalten sich im Allgemeinen wie die Quadrate (in besonderen Fällen wie gewisse höhere Potenzen) ihrer Abstände vom Ende. Dieselben Gesetze gelten für die von den Kräften hervorgebrachte Aenderung der Krümmung, wenn der undeformirte Draht nicht gerade ist, wenn aber die übrigen Umstände die oben angegebenen sind.

616. Ein gerader Stab wird unendlich wenig gebogen. — Um ein sehr einfaches Beispiel des Gleichgewichts eines Drahtes zu geben, welcher Kräften unterworfen ist, die in seiner ganzen Länge wirken, wollen wir voraussetzen, der Draht sei von Natur gerade, und die Richtungen der einwirkenden Kräfte, sowie die Axen der Kräftepaare seien sämmtlich senkrecht zu seiner Länge, die Kräfte und Kräftepaare aber nicht gross genug, um dem Draht eine mehr als unendlich wenig von einer Geraden abweichende Form zu geben. Damit weiter diese Kräfte und Kräftepaare keine Torsion erzeugen, mögen die drei Axen der torquirenden Biegung senkrecht zum Draht und parallel demselben sein. Wir werden aber das Problem nicht noch mehr durch die Annahme beschränken, der Schnitt des Drahtes sei gleichförmig, da wir dadurch einige der für die Praxis wichtigsten Anwendungen (auf Wagebalken, Hebel in Maschinerien, Balken in der Architektur und Ingenieurkunst) ausschliessen würden. Es ist lehrreicher, die Gleichungen des Gleichgewichts für diesen Fall direct zu ermitteln, als sie aus den Gleichungen herzuleiten, die oben für das weit umfassendere allgemeine Problem ausgearbeitet sind. Das besondere Princip für den vorliegenden Fall lautet einfach: In jeder durch die Länge des Drahtes gehenden Ebene ist der nach der Länge des Drahtes genommene zweite Differentialquotient des Biegungskräftepaars überall gleich der für die Längeneinheit genommenen einwirkenden Kraft, vermindert um den ersten Differentialquotienten des einwirkenden Kräftepaars. Im Verein mit den directen Gleichungen (§ 599)

zwischen den Componenten der Biegungskräftepaare liefert dies die erforderten Gleichungen des Gleichgewichts.

In der Figur 35, welche einen Schnitt des Drahtes in der Ebene xy darstellt, sei $OP = x$, $PP' = \delta x$. Ferner mögen Y und N die für

Fig. 35.



die Einheit der Länge des Drahtes gerechneten Componenten der einwirkenden Kraft und des einwirkenden Kräftepaars in der Ebene der Zeichnung sein, so dass $Y\delta x$ und $N\delta x$ die Grössen der Kraft und des Kräftepaars in dieser Ebene sind, welchen die Theile des Drahtes zwischen P und P' wirklich ausgesetzt sind.

Die Wechselwirkung zwischen den zu beiden Seiten des durch P gehenden Normalschnitts liegenden Theilen der Substanz lässt sich auf eine Kraft*) und ein Kräftepaar reduciren. Die den Axen OY und OZ parallelen Componenten der Kraft seien wie früher (§ 614) β und γ, die in den Ebenen XOY und XOZ genommenen Componenten des Kräftepaars ζ und η; die entsprechenden Grössen für P' seien β', γ' und ζ', η'. Die zwischen diesen beiden Schnitten befindliche Substanz ist im Gleichgewicht unter diesen von der zu beiden Seiten unmittelbar daran grenzenden Materie ausgeübten Einwirkungen und unter der Wirkung der Kraft und des Kräftepaars, die sie von aussen angreifen. Die Componenten der letzteren in der Ebene XOY sind beziehungsweise gleich $Y\delta x$ und $N\delta x$. Folglich erhalten wir für das Gleichgewicht des Theils PP' rücksichtlich der zu OY parallelen Kräfte die Bedingung

$$-\beta + Y\delta x + \beta' = 0,$$

und rücksichtlich der in der Ebene XOY wirkenden Kräftepaare

$$-\zeta + N\delta x + \zeta' + \beta\delta x = 0;$$

das Glied $\beta\delta x$ in der zweiten Gleichung ist das Moment des Kräftepaars, welches von den nur unendlich wenig verschiedenen Kräften β, β' gebildet wird, die in entgegengesetzt-parallelen Richtungen durch P und P' gehen. Nun ist

$$\beta' - \beta = \frac{d\beta}{dx}\delta x \text{ und } \zeta' - \zeta = \frac{d\zeta}{dx}\delta x;$$

folglich liefern die vorhergehenden Gleichungen

*) Diese Kräfte, von denen jede in der Ebene des Schnittes des festen Körpers ihren Sitz hat, welche die Theile der Substanz trennt, zwischen denen sie wirken, sind eine Art Schiebungskräfte. Siehe unten § 662.



$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\beta}{dx} = -Y \\ \dfrac{d\zeta}{dx} = -N - \beta, \end{cases}$$

und hieraus folgt durch Elimination von β

$$(2)\qquad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{dN}{dx} + Y.$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die Kräfte und Kräftepaare in der Ebene XOZ

$$(3)\qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{dM}{dx} + Z;$$

die Kräftepaare in dieser Ebene werden als positiv gerechnet, wenn sie aus der Richtung von OX in derjenigen von OZ zu drehen streben [es ist dies der in § 551 getroffenen Uebereinkunft entgegengesetzt; letztere empfiehlt sich immer, wenn die drei Axen symmetrisch behandelt werden].

Da der Draht nur unendlich wenig von der geraden Linie OX abweicht, so sind die Krümmungscomponenten

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ in der Ebene } XOY$$

und

$$\frac{d^2z}{dx^2} \text{ in der Ebene } XOZ,$$

folglich die Gleichungen der Biegung

$$(4)\qquad \begin{cases} \zeta = B\dfrac{d^2y}{dx^2} + a\dfrac{d^2z}{dx^2} \\ \eta = a\dfrac{d^2y}{dx^2} + C\dfrac{d^2z}{dx^2}, \end{cases}$$

wo B und C die Biegungswiderstände (§ 596) in den Ebenen xy und xz sind und a der Coefficient ist, welcher das in jeder dieser Ebenen durch die Einheit der Krümmung in der anderen erzeugte Kräftepaar ausdrückt; diese drei Grössen a, B, C sind im Allgemeinen als gegebene Functionen von x anzusehen. Durch Einsetzung dieser Ausdrücke für ζ und η in (2) und (3) erhalten wir die gesuchten Gleichungen des Gleichgewichts.

617. Fall unabhängiger Biegungen in zwei Ebenen. — Wenn die Richtungen des grössten und des kleinsten Biegungswiderstandes in allen Theilen des Drahtes in zwei Ebenen liegen, so werden die Gleichungen des Gleichgewichts dadurch vereinfacht, dass man diese Ebenen zu Coordinatenebenen XOY, XOZ nimmt. Die Biegung in jeder derselben hängt dann einfach von den in ihr wirkenden Kräften ab, und auf diese Weise zerfällt das Problem von selbst in die beiden von einander ganz unabhängigen Probleme, die Gleichungen der Biegung in den beiden Hauptebenen zu integriren und dadurch die Projectionen der Curve auf zwei feste Ebe-

nen zu bestimmen, deren Lage übereinstimmt mit derjenigen, die sie bei gerade gestrecktem Draht haben.

Wenn in diesem Falle XOY, XOZ in der angegebenen Weise gewählt werden, so ist $a = 0$. Die Gleichungen der Biegung (4) gehen also einfach über in

$$\zeta = B\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \eta = C\frac{d^2z}{dx^2},$$

und durch Einsetzung dieser Ausdrücke in (2) und (3) erhält man als Differentialgleichungen der Curve

$$\frac{d^2\left(B\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx^2} = \mathfrak{Y}, \quad \frac{d^2\left(C\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{dx^2} = \mathfrak{Z}, \tag{5}$$

wo

$$\mathfrak{Y} = -\frac{dN}{dx} + Y, \quad \mathfrak{Z} = -\frac{dM}{dx} + Z \tag{6}$$

ist. Hier sind $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ im Allgemeinen als bekannte Functionen von x anzusehen, die durch (6) explicit gegeben werden; es sind die für die Einheit der Länge des Drahtes gerechneten zum Drahte senkrechten Componenten der einfachen Kräfte, welche dieselbe Gestalt hervorbringen würden, wie die Kräfte und Kräftepaare, die nach unserer Voraussetzung auf den Draht in seiner ganzen Länge wirklich einwirken. Weiterhin, in der Theorie des Magnetismus, werden wir ein merkwürdiges Beispiel der durch (6) ausgedrückten Relation antreffen. Inzwischen bemerken wir nur, dass, obgleich die Gestalt des Drahtes nicht merklich geändert wird, wenn man statt der auf den Draht vertheilten Kräfte und Kräftepaare in geeigneter Weise vertheilte einfache Kräfte substituirt, doch die in den Normalschnitten wirkenden Schiebungskräfte, wie aus (1) hervorgeht, durch diese Aenderung der Umstände vollständig geändert werden. Wenn der Draht gleichförmig ist, so sind B und C constant, und die Gleichungen des Gleichgewichts werden

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{\mathfrak{Y}}{B}, \quad \frac{d^4z}{dx^4} = \frac{\mathfrak{Z}}{C}.$$

Das einfachste Beispiel erhält man, wenn man jede der Grössen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ als constant ansieht; es ist dies der interessante und nützliche Fall eines gleichförmigen Balkens, der überall, ausser wo er durch seine Stützen getragen oder gedrückt wird, nur durch sein eigenes Gewicht eine Einwirkung erleidet. Beschränken wir unsere Aufmerksamkeit auf die Biegung in der einen Hauptebene XOY und nehmen an, dieselbe sei vertical, so dass $\mathfrak{Y} = gw$ ist, wenn w die in der Längeneinheit enthaltene Masse bezeichnet, so erhalten wir als vollständiges Integral natürlich

$$y = \frac{gw}{B}\left(\tfrac{1}{24}x^4 + Kx^3 + K'x^2 + K''x + K'''\right); \tag{8}$$

darin bezeichnen K, K', u. s. w. die vier Integrationsconstanten. Diese werden durch die Grenzbedingungen bestimmt, welche z. B. darin bestehen

können, dass der Werth von y und $\frac{dy}{dx}$ in jedem Ende gegeben ist. Die Bedingung kann auch (wie z. B. im Falle einer Planke, welche mit ihren beiden Enden einfach auf zwei Schneiden ruht und sich um jede frei drehen kann) darin bestehen, dass die Krümmung in jedem Ende verschwinde, so dass wir, wenn die durch die Stützpunkte gehende Linie zur Axe OX genommen wird,

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= 0 \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } x = 0 \text{ und wenn } x = l \text{ ist,}$$

erhalten, wo l die Länge der Planke ist. Die Lösung ist dann

$$(9) \qquad y = \frac{gw}{B} \cdot \tfrac{1}{24} (x^4 - 2 l x^3 + l^3 x).$$

Setzen wir also $x = \tfrac{1}{2} l$, so ergibt sich

$$y = \frac{gw}{B} \cdot \frac{5 l^4}{16 . 24}$$

für die Entfernung, um welche der Mittelpunkt von der die Stützpunkte verbindenden Geraden abgelenkt wird.

Wir können auch, wie im Falle einer Planke, die in ihrem Mittelpunkte (wo $x = 0$ vorausgesetzt wird) auf einer Schneide ruht oder an einem in ihrer Mitte befestigten Seile hängt,

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } x = 0 \text{ ist,}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= 0 \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } x = \tfrac{1}{2} l \text{ ist [siehe oben § 614 (10)],}$$

haben. In diesem Falle ist die Lösung für die positive Hälfte der Planke

$$(10) \qquad y = \frac{gw}{B} \cdot \tfrac{1}{24} (x^4 - 2 l x^3 + \tfrac{3}{2} l^2 x^2).$$

Wird hierin $x = \tfrac{1}{2} l$ gesetzt, so ergibt sich

$$y = \frac{gw}{B} \cdot \frac{3 l^4}{16 . 24}.$$

Wir erhalten also das folgende Resultat: —

618. Senkungen der nicht unterstützten Theile einer Planke. — Wenn ein Stab, Balken oder eine Planke von gleichförmiger Substanz auf einer einzigen im Mittelpunkte angebrachten Stütze ruht, so beträgt die Senkung der Enden nur $\tfrac{3}{5}$ der Senkung, die der Mittelpunkt erleidet, wenn der Körper auf zwei an seinen Enden angebrachten Schneiden ruht. Daraus folgt, dass die erstere Senkung $\tfrac{3}{8}$ und die letztere $\tfrac{5}{8}$ derjenigen Senkung oder

Erhebung beträgt, welche eine dem halben Gewicht des Stabes gleiche Kraft erzeugt, wenn sie am einen Ende vertical nach unten oder oben wirkt, während der Mittelpunkt in einer horizontalen Lage festgehalten wird. Dies zu beweisen, nehmen wir an, der ganze Körper ruhe anfangs auf einer in seiner Mitte angebrachten Stütze, und es seien sodann unter die Enden zwei Stützen gesetzt, die man allmälig erhöht habe, bis der Druck vom Mittelpunkt gänzlich fortgenommen sei. Während dieser Operation bleibt der Mittelpunkt fest und horizontal, während eine bis zur Hälfte des Gewichts zunehmende Kraft, die an jedem Ende vertical nach oben wirkt, dasselbe auf eine Höhe hebt, welche gleich der Summe der Senkungen in den beiden oben angegebenen Fällen ist. Natürlich kann man dies Resultat auch direct beweisen, indem man die absoluten Werthe der Senkung in jenen beiden Fällen, wie wir sie oben ermittelt haben, mit den Resultaten der in § 611 gegebenen Theorie der elastischen Curven Fig. 29 vergleicht. Das Resultat lässt sich auch folgendermaassen aussprechen: Die Senkung der Mitte eines gleichförmigen Stabes, der auf Stützen an seinen Enden ruht, wird im Verhältniss von 5 : 13 vergrössert, wenn man eine seinem Gewichte gleiche Masse auf seine Mitte legt, und wenn der Stab an einem in seiner Mitte befestigten Seile hängt, so wird die Senkung seiner Enden im Verhältniss von 3 zu 11 vergrössert, wenn man an jedes Ende eine dem halben Gewicht des Stabes gleiche Masse hängt.

619. Das im Falle eines vollkommen starren festen Körpers unbestimmte*) (§ 568), für die Praxis wichtige Problem, die Vertheilung des Gewichts eines festen Körpers auf seine Stützpunkte zu bestimmen, wenn mehr als zwei derselben in einer verticalen Ebene liegen, oder wenn überhaupt mehr als drei Stützen vorhanden sind, kann mittels der vorstehenden Resultate vollständig gelöst werden für einen gleichförmigen, elastischen, von Natur geraden Stab, welcher auf drei oder mehr Punkten ruht, die alle nahezu in einer Horizontallinie vollkommen gesicherte Lagen haben.

Wenn i Stützpunkte vorhanden sind, so bilden die $i - 1$ Stabtheile, welche der Reihe nach zwischen diesen Punkten liegen, und die beiden Endtheile $i + 1$ Curven; diese Curven sind durch ver-

*) Wir brauchen wohl kaum zu bemerken, dass eine Unbestimmtheit in der Natur nicht existirt. Wie eine solche in den Problemen der abstracten Dynamik vorkommen kann und dann dadurch beseitigt wird, dass man noch weitere Eigenschaften der Materie in Rechnung zieht, wird auf eine lehrreiche Weise durch die im Texte angegebenen Umstände erläutert.

schiedene algebraische Gleichungen [§ 617 (8)] ausgedrückt, von denen jede vier willkürliche Constanten enthält. Zur Bestimmung dieser Constanten ergeben sich im Ganzen $4i + 4$ Gleichungen, welche die folgenden Bedingungen ausdrücken: —

I. Die Ordinaten der inneren Enden des ersten und des letzten Stabtheils und die Ordinaten beider Enden jedes der übrigen Theile sind beziehungsweise gleich den gegebenen Ordinaten der entsprechenden Stützpunkte [$2i$ Gleichungen].

II. Die Curven zu beiden Seiten jedes Stützpunktes haben in dem Uebergangspunkt von der einen zur andern zusammenfallende Tangenten und gleiche Krümmungen [$2i$ Gleichungen].

III. Die Krümmung und ihr für die Einheit der Länge längs des Stabes genommener Differentialquotient ist in jedem Endpunkte Null [4 Gleichungen].

Danach ist die Gleichung jedes Theils der Curve vollständig bestimmt, und nach § 616 ergibt sich weiter die Schiebungskraft für jeden Normalschnitt. Die Differenz zwischen den Schiebungskräften in den zu beiden Seiten eines Stützpunktes liegenden, aneinander grenzenden Stabtheilen ist natürlich gleich dem Druck, dem dieser Punkt ausgesetzt ist.

620. Die Lösung dieses Problems für den Fall, in welchem zwei der Stützpunkte in den Endpunkten liegen und der dritte sich mitten zwischen beiden befindet, entweder genau in der Verbindungslinie derselben, oder um eine gegebene sehr kleine Strecke über oder unter dieser Linie, ergibt sich sofort, ohne jede analytische Untersuchung, aus den in § 618 ausgesprochenen besonderen Resultaten. Setzen wir nämlich voraus, der Stab sei anfangs ganz von den in seinen Endpunkten angebrachten Stützen getragen, und darauf allmälig durch eine unter seine Mitte gesetzte Stütze in die Höhe gedrückt worden, so wird diese Stütze eine Kraft zu ertragen haben, welche dem Wege, durch den sie vom Nullpunkt aus gehoben wurde, einfach proportional ist, bis das ganze Gewicht den Endpunkten abgenommen ist und von der Mitte getragen wird. Die ganze Strecke, um welche die Mitte während dieses Processes steigt, ist, wie wir fanden, $\frac{gw}{B} \cdot \frac{8\,l^4}{16.24}$, und diese Gesammterhöhung ist $^8/_5$ der Senkung der Mitte in der ersteren Lage. Wenn also die Stütze der Mitte z. B. genau in der Verbindungslinie der Endstützen fixirt wird, so trägt sie $^5/_8$ des Gesammtgewichts und überlässt jeder der letzteren $^3/_{16}$. Wenn die Stütze der Mitte von der Verbindungs-

linie der Endpunkte um $^7/_{15}$ des Weges herabgelassen wird, den sie herabgelassen werden müsste, um von jedem Druck befreit zu werden, so trägt sie gerade $^1/_3$ des Gesammtgewichts und jedes Ende hat gleichfalls $^1/_3$ zu tragen.

621. Rotation eines Drahtes um seine elastische Centrallinie. Elastisches Universalgelenk. — Ein Draht von gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen, der im ungezwängten Zustande gerade ist, lässt sich, nachdem man ihn beliebig gebogen und gedrillt hat, ohne den geringsten Widerstand um seine elastische Centralcurve drehen, da seine Gleichgewichtsbedingungen auf keine Weise verletzt werden, dadurch dass er so in seiner ganzen Länge gleichmässig gedreht wird. Die nützliche Anwendung dieses Princips auf die Erhaltung einer gleichen angularen Bewegung in zwei um verschiedene Axen rotirenden Körpern wird in der Praxis durch die Nothwendigkeit etwas erschwert, jedes Drahtende vollkommen zu befestigen und so zu adjustiren, dass daselbst die Tangente an die elastische Centralcurve genau in die Richtung der Rotationsaxe falle. Wenn aber diese Bedingung streng erfüllt und der Draht von genau gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen und im ungezwängten (§ 658) Zustande völlig gerade ist, so überträgt er gegen jeden constanten Widerstand eine genau gleichförmige Bewegung von einem um eine Axe rotirenden Körper auf einen zweiten solchen Körper, dessen Axe gegen die des ersteren beliebig geneigt ist und mit derselben nicht in einer Ebene zu liegen braucht. Wenn beide Axen in einer Ebene liegen, wenn kein Widerstand gegen die Rotationsbewegung vorhanden ist, und wenn endlich die Schwerkraft nur eine geringe Wirkung auf den Draht ausübt, so wird derselbe eine der verschiedenen Formen der ebenen elastischen Curve von Johann Bernoulli (§ 612) annehmen. Wie sehr aber auch der Draht von dieser Form abweichen möge — sei es nun, weil die Axen nicht in einer Ebene liegen; oder in Folge der Torsion, welche die Uebertragung eines Kräftepaars von einem Schaft zum anderen begleitet, und welche, wenn die Axen einer Ebene angehören, den Draht nothwendig aus derselben hinauslenkt; oder in Folge der Schwere — die elastische Centralcurve wird in Ruhe bleiben, während der Draht in jedem Normalschnitt um sie mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit rotirt, die gleich der Winkelgeschwindigkeit jedes der beiden durch ihn verbundenen Körper ist. In dem Capitel über die Eigenschaften der Materie werden wir sehen, was man freilich schon aus dem Umstande leicht schliessen kann, dass die Feder eines Chronometers zwanzig und mehr Jahre hindurch ihre

Bewegungen vollführt, dass die Unvollkommenheit in der Elasticität eines Metalldrahts keinen solchen Grad erreicht, der die praktische Anwendung dieses Princips unmöglich machte, sogar bei einem Mechanismus, der dauerhaft sein soll.

Wir müssen aber bemerken, dass, wenn die Rotation zu schnell ist, das Gleichgewicht des um seine ungeänderte elastische Centralcurve rotirenden Drahtes instabil werden kann. Man entdeckt dies unmittelbar durch Experimente (die zu sehr merkwürdigen Erscheinungen führen), wenn man, wie es oft bei der Erläuterung der Kinetik der gewöhnlichen Rotation geschieht, einen starren Körper an einen Stahldraht hängt, dessen oberes Ende unaufhörlich schnell herumgedreht wird.

622. Wenn der Draht nicht von genau gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen ist, so wird in der mitgetheilten angularen Bewegung eine periodische Ungleichheit stattfinden, deren Periode eine halbe Umdrehung jedes Körpers ist. Oder wenn der Draht im ungezwängten Zustande nicht ganz gerade ist, so wird eine periodische Ungleichheit eintreten, welche die ganze Umdrehung zur Periode hat. Mit anderen Worten: Wenn φ und φ' die Winkel sind, durch welche die beiden Körper gleichzeitig rotiren, während ein constant arbeitendes Kräftepaar vom einen zum anderen durch den Draht hindurch fortgepflanzt wird, so ist $\varphi - \varphi'$ nicht Null, wie im Falle des exacten elastischen Universal-Biegungsgelenks, sondern eine Function von $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$, wenn der erstere Fehler allein existirt, oder eine Function von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$, wenn der zweite Fehler allein oder im Verein mit dem ersteren da ist. Wenn der Draht im ungezwängten Zustande nicht stärker gebogen ist, als man in der Praxis leicht verhüten kann, so kann die durch seine Biegung erzeugte Ungleichmässigkeit der Wirkung wahrscheinlich ohne Schwierigkeit zur Genüge dadurch beseitigt werden, dass man den Draht am einen oder an beiden Enden eine etwas geneigte Lage gegen die Axe des rotirenden Körpers gibt, an dem er befestigt wird. Aber diese Betrachtungen führen uns zu einem Thema, welches in sich selbst schon ein weit grösseres Interesse trägt, als dasjenige ist, welches es möglicherweise in Anwendungen auf die Praxis erlangen könnte. Die einfachen Fälle, die wir darlegen werden, sind Beispiele für drei Arten der Wirkung, von denen jede allein oder verbunden mit einer andern oder auch zugleich mit beiden anderen im Gleichgewicht eines Drahtes vorkommen kann, der nicht der Bedingung entspricht, in allen Richtungen gleich biegsam und im ungezwängten Zustande gerade zu sein.

623. Rotation eines in einen Reifen umgebogenen geraden Drahtes um seinen elastischen Centralkreis. — Ein gleichförmiger Draht, der im ungezwängten Zustande gerade ist, wird gebogen, bis seine beiden Enden zusammenstossen; diese Enden werden dann so aneinander befestigt, dass die beiden entsprechenden Enden der elastischen Centralcurve eine und dieselbe gerade Linie berühren. Welches dann auch die Form des Normalschnitts und die Beschaffenheit der Substanz ist — dieselbe sei krystallinisch oder nicht —, der Draht muss, wenn er sich im Gleichgewicht befindet, einen genauen Kreis bilden (wofern man Störungen durch die Schwere vermeidet). Man soll nun bestimmen, was geschehen muss, damit sich der ganze Draht gleichförmig durch irgend einen Winkel um seinen elastischen Centralkreis drehe.

Wenn der Draht von genau gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen ist*), so wird er, wie wir gesehen haben (§ 621), dieser Einwirkung gar keinen Widerstand leisten, abgesehen natürlich von dem Widerstande, der in seiner Trägheit beruht, und wenn er einmal in Bewegung gesetzt ist, so dass er sich in dieser Weise mit einer beliebigen, grossen oder kleinen Winkelgeschwindigkeit bewegt, so würde er sich für immer unverändert weiter bewegen, wenn er vollkommen elastisch wäre, und wenn die Luft oder eine andere die Axe berührende Materie keinen Widerstand leistete.

Um jede Beschränkung des Problems zu vermeiden, müssen wir voraussetzen, der Draht sei von solcher Beschaffenheit, dass, wenn er auf irgend eine Weise gedrillt und gebogen wird, die potentielle Energie der ins Leben gerufenen Elasticitäts-Wirkung, genommen für die Einheit der Länge, eine quadratische Function der Drillung und zweier Krümmungscomponenten (§§ 590, 595) mit sechs willkürlich gegebenen Coefficienten ist. Da aber der Draht keine Drillung besitzt**), so verschwinden im vorliegenden Falle drei Glieder dieser Function, und es bleiben nur die drei Glieder, welche die Quadrate und das Product der Krümmungscomponenten enthalten; die Ebenen, für welche diese Componenten genommen sind, stehen auf zwei in einem beliebigen Normalschnitte gelegten zu einander senkrechten Coordinatenaxen

*) In diesem Falle hätte man ihn offenbar vor dem Zusammenlegen seiner Enden drillen können, ohne dass dadurch die kreisförmige Form geändert worden wäre, die er annimmt, wenn man ihn nach der Verbindung seiner Enden sich selbst überlässt.

**) Wir haben dies vorausgesetzt, damit der Draht eine Kreisform annehme; in dem wichtigen Falle gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen würde die letztere Bedingung offenbar erfüllt sein, sogar wenn Drillung vorhanden wäre.

senkrecht. Die Lage dieser Axen wird zweckmässig so gewählt, dass das Product der Krümmungscomponenten verschwindet; dann werden die zu diesen Coordinatenaxen senkrechten Ebenen die Ebenen des grössten und kleinsten Biegungswiderstandes sein, wenn der Draht frei von Drillung erhalten wird*).

Es bietet keine Schwierigkeit dar, die allgemeinen Gleichungen des § 614 zur Ausdrückung dieser Umstände anzuwenden und die vorgelegte Frage zu beantworten. Wir überlassen dies dem Leser als eine analytische Uebung und schlagen einen kürzeren Weg zu demselben Ziele ein, indem wir direct das Princip der Energie anwenden.

Es sei $\frac{1}{2}(B\varkappa^2 + C\lambda^2)$ die potentielle Energie für die Einheit der Länge, wenn $\varkappa$ und λ die Krümmungscomponenten in den Ebenen des grössten und kleinsten Biegungswiderstandes sind, so dass, wie in § 617, B und C die Biegungswiderstände in diesen Ebenen messen. Wenn nun der Draht irgendwie in Ruhe gehalten wird, so dass diese Ebenen in jedem seiner Punkte mit der Ebene seines elastischen Centralkreises die Winkel φ und $\frac{\pi}{2} - \varphi$ bilden, so würden wir $\varkappa = \frac{1}{r}\cos\varphi$, $\lambda = \frac{1}{r}\sin\varphi$ erhalten, wo r den Radius jenes Kreises bezeichnet. Folglich ist, da die ganze Länge $2\pi r$ beträgt,

$$E = \pi\left(\frac{B}{r}\cos^2\varphi + \frac{C}{r}\sin^2\varphi\right). \tag{1}$$

Wir wollen nun voraussetzen, auf jeden unendlich kleinen Theil des Drahtes wirke ein Kräftepaar in der Normalebene, und es sei L die Grösse dieses Kräftepaars für die Einheit der Länge. Dasselbe muss um den ganzen Ring herum gleichförmig sein, damit die Kreisform erhalten bleibe. Lassen wir jetzt das Kräftepaar so variiren, dass, nachdem die Rotation einmal begonnen hat, φ mit einer beliebigen constanten Winkelgeschwindigkeit zunimmt, so ist die Gleichung der in der Zeiteinheit geleisteten Arbeit (§§ 240, 287)

$$2\pi r L\dot{\varphi} = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d\varphi}\dot{\varphi},$$

folglich nach (1)

$$-L = \frac{B-C}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi = \frac{B-C}{2r^2}\sin 2\varphi.$$

Daraus geht Folgendes hervor: —

Damit die Ebenen des grössten Biegungswiderstandes des Ringes beständig einen Kegel berühren, der einen beliebigen Winkel

*) Wenn, wie es gewöhnlich der Fall ist, der Draht aus isotropischem Material (s. unten § 677) besteht, oder eine Normalaxe (§ 596) in der Richtung seiner elastischen Centrallinie hat, so wird eine Biegung kein Streben nach Drillung erzeugen. Mit anderen Worten: die Producte der Drillung in die Krümmungscomponenten werden aus dem quadratischen Ausdruck der potentiellen Energie verschwinden, oder die elastische Centrallinie ist eine Axe reiner Torsion. Der betrachtete Fall wird aber, wie im Text gezeigt wird, durch diese Beschränkung nicht vereinfacht.



φ mit der Ebene des Ringes einschliesst, ist in der Normalebene durch jeden Punkt ein Kräftepaar erforderlich, welches proportional *sin* 2φ ist, eine solche Richtung hat, dass φ verhindert wird zuzunehmen, und welches, wenn $\varphi = {}^1/_4\,\pi$ ist, für die Einheit der Ringlänge $\frac{B-C}{2r^2}$ beträgt. Hieraus ersehen wir, dass es zwei Lagen stabilen Gleichgewichts — es sind dies diejenigen, in denen die Ebene des kleinsten Biegungswiderstandes in der Ebene des Ringes liegt — und zwei Lagen instabilen Gleichgewichts gibt — es sind dies diejenigen, in denen die Ebene des grössten Biegungswiderstandes in der Ebene des Ringes liegt.

624. Rotation eines im ungezwängten Zustande kreisförmigen, in allen Richtungen gleich biegsamen Drahtes um seinen elastischen Centralkreis. — Ein Draht von gleichförmiger Biegsamkeit in allen Richtungen, der im ungezwängten Zustande einen Kreisbogen vom Radius a bildet, wird gebogen, bis seine Enden zusammentreffen, die dann wie in § 623 verbunden werden, so dass das Ganze ein kreisförmiger Ring vom Radius r wird. Man soll das Kräftepaar bestimmen, welches diesen Ring in einer Lage festhält, die er dadurch erreicht, dass er in jedem Normalschnitt von der Lage stabilen Gleichgewichts aus um die Centrallinie durch einen beliebigen Winkel φ rotirt (letztere ist natürlich die Lage, in welcher die von Natur concave Seite des Drahtes auf der concaven Seite des Ringes liegt, indem die natürliche Krümmung entweder vermehrt oder vermindert, aber nicht umgekehrt wird, wenn man den Draht zu einem Ringe umbiegt). Wenden wir das Princip der Energie ganz wie im vorhergehenden Paragraphen an, so finden wir, dass das Kräftepaar in diesem Falle proportional *sin* φ ist und, wenn $\varphi = {}^1/_2\,\pi$ ist, für die Einheit der Länge des Ringes $\frac{B}{ar}$ beträgt, wo B den Biegungswiderstand bezeichnet.

Denn die potentielle Energie ist in diesem Falle

$$E = \pi r B \left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\sin\varphi\right)^2\right\} \tag{2}$$

$$= \pi r B \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{ar}\cos\varphi + \frac{1}{r^2}\right)$$

und

$$L = \frac{1}{2\pi r}\frac{dE}{d\varphi} = \frac{B}{ar}\sin\varphi. \tag{3}$$

Wenn jeder Theil des Ringes halb herumgedreht worden ist, so dass die von Natur concave Seite des Drahtes die convexe Seite des Ringes bildet, so befindet sich der Draht natürlich in einer Lage instabilen Gleichgewichts.

625. Ein im undeformirten Zustande kreisförmiger Draht von ungleicher Biegsamkeit in verschiedenen Richtungen wird in eine andere Kreisform gebogen durch an seinen Enden angreifende Kräftepaare, die einander das Gleichgewicht halten. — Ein Draht von ungleicher Biegsamkeit in verschiedenen Richtungen wird so geformt, dass er im ungezwängten Zustande einen Kreisbogen vom Radius a bildet, während die Ebene seines grössten Biegungswiderstandes in jedem Punkte einen Kegel berührt, der mit der Ebene des Drahtes einen Winkel α einschliesst. Seine Enden werden dann zusammengebracht und, wie in §§ 623, 624, verbunden, so dass das Ganze ein geschlossener kreisförmiger Ring von einem beliebig gegebenen Radius r wird. Man soll die neue Neigung φ, welche die Ebene des grössten Biegungswiderstandes gegen die Ebene des Ringes annimmt, und das Kräftepaar G bestimmen, welches in der Ebene des Ringes zwischen den zu beiden Seiten irgend eines Normalschnittes liegenden Massentheilchen wirkt.

Die beiden Gleichungen zwischen den Componenten des Kräftepaars und den Componenten der Krümmung in den Ebenen des grössten und kleinsten Biegungswiderstandes bestimmen die beiden unbekannten Grössen des Problems.

Diese Gleichungen sind

$$(4)\qquad \begin{cases} B\left(\frac{1}{r}\cos\varphi - \frac{1}{a}\cos\alpha\right) = G\cos\varphi \\ C\left(\frac{1}{r}\sin\varphi - \frac{1}{a}\sin\alpha\right) = G\sin\varphi, \end{cases}$$

da $\frac{1}{a}\cos\alpha$ und $\frac{1}{a}\sin\alpha$ die Componenten der natürlichen Krümmung in den Hauptebenen, folglich $\frac{1}{r}\cos\varphi - \frac{1}{a}\cos\alpha$ und $\frac{1}{r}\sin\varphi - \frac{1}{a}\sin\alpha$ die Aenderungen der Krümmung in diesen Ebenen sind, welche die entsprechenden Componenten $G\cos\varphi$ und $G\sin\varphi$ des Kräftepaars G unterhalten.

Soweit es sich um die Lage handelt, in welche der Draht durch die Rotation um seine elastische Centralcurve übergeht, kann das Problem durch eine Anwendung des Princips der Energie gelöst werden, welche die Entwicklungen der §§ 623, 624 als besondere Fälle umfasst.

Es sei L die für die Längeneinheit des Ringes genommene Grösse des Kräftepaares, welches in jedem Normalschnitt von aussen her angebracht werden muss, um die Ebene des grössten Biegungswiderstandes in jedem Punkte unter irgend einem gegebenen Winkel φ gegen die Ebene des Ringes geneigt zu halten. Wenn der Ring so gehalten wird, so haben wir wie früher (§§ 623, 624) für die potentielle Energie der Elasticitätswirkung in demselben

$$E = \pi r \left\{ B \left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\cos\alpha}{a} \right)^2 + C \left(\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\sin\alpha}{a} \right)^2 \right\}, \tag{5}$$

folglich

$$\left\{ \begin{aligned} L &= \frac{1}{2\pi r} \frac{dE}{d\varphi} \\ &= \left\{ -B \left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\cos\alpha}{a} \right) \frac{\sin\varphi}{r} + C \left(\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\sin\alpha}{a} \right) \frac{\cos\varphi}{r} \right\}. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich Null, so erhalten wir dieselbe Gleichung, die sich aus (4) durch Elimination von G ergibt. Dieselbe bestimmt die Relation, die zwischen φ und r bestehen muss, damit der Ring, wenn sein Radius aus a in r übergegangen ist, in sich selbst (d. h. ohne jede Anwendung eines Kräftepaars im Normalschnitt) im Gleichgewicht sei. Die vorliegende Methode hat den Vorzug, dass sie die Unterscheidung der Lösungen, was die Stabilität oder Instabilität des Gleichgewichts betrifft, erleichtert, da (§ 291) für ein stabiles Gleichgewicht E ein Minimum, für ein instabiles Gleichgewicht ein Maximum ist.

Um einen besonderen Fall zu betrachten, nehmen wir $C = \infty$ an, was das Problem bedeutend vereinfacht. Die Glieder in (5) und (6), welche C als Factor enthalten, werden in diesem Falle ungereimt und fordern natürlich, dass

$$\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\sin\alpha}{a} = 0$$

sei. Für diesen Fall ist aber die frühere Methode klarer und besser; denn die zweite der Gleichungen (4) liefert sofort das eben erhaltene Resultat, und dann bestimmt die erstere der Gleichungen (4) den Werth von G, wenn derselbe bestimmt werden soll. Wir gelangen so zu dem im folgenden Paragraphen ausgesprochenen Ergebniss: —

626. Auflegung einer abwickelbaren Fläche auf einen Kegel. — Es sei ein gleichförmiger Reifen gegeben, welcher sich in jedem Punkte nur in einer Tangentialebene an seine elastische Centrallinie biegen lässt und so geformt ist, dass er, frei von Zwang, (wenn er z. B. in irgend einem Normalschnitt durchschnitten ist und keine Einwirkung von anderen Körpern erfährt), einen Kreis vom Radius a bildet, und dass zugleich die Ebenen, in denen er unbiegsam ist, überall einen gegen die Ebene dieses Kreises geneigten Kegel berühren. Es wird dies ganz nahezu bei einem gewöhnlichen Reifen von dünnem Eisenblech der Fall sein, der einem

conischen Gefäss oder einem Ende einer Tonne von gewöhnlicher Form aufgelegt ist. Ein solcher Reifen werde verkürzt (oder verlängert), in einen Kreis vom Radius a gebogen und, nachdem seine Enden in der gewöhnlichen Weise aneinander genietet sind (§ 623), sich selbst überlassen, so dass keine Kraft von aussen her auf ihn wirkt. Wenn er zur Ruhe gekommen ist, wird die Ebene, in der er sich nicht biegen lässt, den Winkel $\varphi = \arcsin\left(\frac{r}{a}\sin\alpha\right)$ mit der Ebene seiner Kreisform bilden, und das Elasticitätskräftepaar, welches in dieser Ebene zwischen den zu beiden Seiten irgend eines Normalschnitts liegenden Massentheilen wirkt, wird

$$G = \frac{B}{\cos\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\cos\alpha}{a}\right)$$

sein. Diese Resultate ergeben sich sofort, wenn man beachtet, dass die Componente der Krümmung in der Ebene der Unbiegsamkeit in jedem Punkte unveränderlich von demselben Werthe $\frac{\sin\alpha}{a}$ sein muss, wie im gegebenen ungezwängten Zustande des Reifens, und dass das componirende Kräftepaar $G\cos\varphi$ in der zur Ebene der völligen Unbiegsamkeit senkrechten Ebene so beschaffen sein muss, dass die Componente der Krümmung in dieser Ebene sich aus $\frac{\cos\alpha}{a}$ in $\frac{\cos\varphi}{r}$ verwandle.

Der grösste Kreis, in welchen sich ein solcher Reifen verwandeln kann, ist natürlich der vom Radius $\frac{a}{\sin\alpha}$. Für diesen ist $\varphi = 1/2\,\pi$, oder die Fläche, in welcher in keinem Punkte eine Biegung möglich ist (in praktischen Fällen die Fläche des Metallblatts), wird die Ebene des Kreises. Es ist daher $G = \infty$, und dies zeigt, dass, wenn man in der dargelegten Weise einen Reifen anfertigt, der nur unendlich wenig von dieser Bedingung abweicht, das in jedem Normalschnitt wirkende innere Kräftepaar unendlich gross sein wird, was offenbar richtig ist.

627. Biegung einer ebenen elastischen Platte. — Ein anderer wichtiger und interessanter Fall lässt sich mittels einer der auf die elastischen Drähte angewandten ganz ähnlichen Methode leicht behandeln, nämlich das Gleichgewicht einer ebenen elastischen Platte, die durch Kräfte gebogen wird, welche gewissen unten (§ 632) angegebenen Bedingungen unterworfen sind. Vorher ist es zweck-

mässig, einige Definitionen und einleitende Betrachtungen zu geben.

(1) Eine Fläche eines festen Körpers ist eine Fläche, welche immer durch die nämlichen Massenpunkte des Körpers geht, wie derselbe auch deformirt werden möge.

(2) Die Mittelfläche einer Platte ist die Fläche, welche durch alle die Punkte derselben geht, die, wenn sie frei von Zwang ist, in einer Ebene mitten zwischen ihren beiden ebenen Seitenflächen liegen.

(3) Ein Normalschnitt einer Platte oder eine zu einer Platte normale Oberfläche ist eine Fläche, welche, wenn dieselbe frei von Zwang ist, deren Seitenflächen und alle denselben parallelen Ebenen unter rechten Winkeln schneidet, und welche daher im undeformirten Zustande nothwendig entweder eine einzige Ebene oder eine cylindrische (oder prismatische) Oberfläche ist.

(4) Die Deflexion irgend eines Punktes oder kleinen Theils der Platte ist der Abstand seiner Mittelfläche von der an die Mittelfläche in irgend einem in ihr passend gewählten Anfangspunkte gelegten Tangentialebene.

(5) Die Inclination der Platte in einem Punkte ist die Neigung der Tangentialebene an die durch diesen Punkt gehende Mittelfläche gegen die im Anfangspunkt gelegte Tangentialebene.

(6) Die Krümmung einer Platte in einem Punkte oder in einem kleinen Theil ist die Krümmung, welche ihre Mittelfläche daselbst hat.

(7) In einer Fläche, welche nur unendlich wenig von einer Ebene verschieden ist, nennt man die Krümmung gleichförmig, wenn die Krümmungen in zwei parallelen Normalschnitten gleich sind, wo auch diese Normalschnitte gelegt werden.

(8) Jeder Durchmesser einer Platte, oder Abstand in einer Platte, die unendlich wenig von einer Ebene abweicht, heisst endlich, wofern er nicht ein unendlich grosses Vielfache des mit der grössten Inclination multiplicirten kleinsten Krümmungsradius ist.

Unter der Voraussetzung, dass die im Anfangspunkt gelegte Tangentialebene zur Ebene XOY gewählt werde, sei (x, y, z) irgend ein Punkt der Mittelfläche der Platte, i die Inclination derselben in diesem Punkte und $\frac{1}{r}$ ihre Krümmung in einem durch denselben gehenden Normalschnitt, welcher mit ZOX den Winkel φ einschliesst. Dann ist

$$\tan i = \sqrt{\left(\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}\right)} \tag{1}$$

und, wenn i unendlich klein ist,

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 z}{dx^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{d^2 z}{dx\, dy} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{d^2 z}{dy^2} \sin^2 \varphi. \tag{2}$$

Diese Formeln zu beweisen, nehmen wir an, ξ, η, ζ seien die Coordinaten irgend eines Punktes der Fläche, welcher (x, y, z) unendlich nahe liegt. Dann ist nach den Elementen der Differentialrechnung

$$\zeta = \frac{dz}{dx}\xi + \frac{dz}{dy}\eta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2 z}{dx\, dy}\xi\eta + \frac{d^2 z}{dy^2}\eta^2\right).$$

Es sei nun

$$\xi = \varrho \cos \varphi, \quad \eta = \varrho \sin \varphi,$$

so dass wir

$$\left\{\begin{aligned} \zeta &= A\varrho + \tfrac{1}{2} B \varrho^2, \text{ wo} \\ A &= \frac{dz}{dx}\cos\varphi + \frac{dz}{dy}\sin\varphi \text{ und} \\ B &= \frac{d^2 z}{dx^2}\cos^2\varphi + 2\frac{d^2 z}{dx\, dy}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2 z}{dy^2}\sin^2\varphi \text{ ist,} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

erhalten. Dann ist nach der Formel für die Krümmung einer ebenen Curve (§ 9)

$$\frac{1}{r} = \frac{B}{(1 + A^2)^{3/2}}, \text{ oder, da } A \text{ unendlich klein ist, } \frac{1}{r} = B,$$

und damit ist (2) bewiesen.

Daraus folgt, dass die durch

$$z = \tfrac{1}{2}(Ax^2 + 2cxy + By^2) \tag{4}$$

dargestellte Oberfläche eine Fläche gleichförmiger Krümmung ist, wenn A, B, c im ganzen Gebiet, das den Werthen von (x, y) eingeräumt wird, constant sind; diese Werthe werden durch die Bedingung beschränkt, dass $Ax + cy$ und $cx + By$ überall unendlich klein sein müssen.

628. **Die Biegung darf nicht derartig sein, dass eine Dehnung der Mittelfläche eintritt, die in einem endlichen Verhältniss zu der jeder Seitenfläche steht.** — Wenn eine ebene Oberfläche in irgend eine nicht abwickelbare (§ 139) Fläche deformirt wird, so muss sie einen gewissen Grad von Ausdehnung oder Contraction erleiden. Eine wesentliche Bedingung für die Theorie der elastischen Platten, zu der wir uns alsbald wenden werden, besteht aber darin, dass die Grösse der auf diese Weise nothwendigen Ausdehnung oder Contraction in der Mittelfläche in jedem Falle äusserst klein ist im Vergleich mit der aus der Krümmung herrührenden Ausdehnung oder Contraction der beiden Seitenflächen (§ 141). Wenn wir den Fall ausschliessen, in welchem die Fläche so deformirt wird, dass sie sich nur unendlich wenig von einer abwickelbaren unterscheidet, so ist diese Bedingung der folgenden äquivalent: —

An allen Stellen, die einen endlichen Abstand [§ 627 (8)] vom Anfangspunkt haben, ist das Verhältniss der Deflexion zur Dicke eine unendlich kleine Grösse.

Wenn wir den Ausdruck „Deflexion“ nicht auf die in § 627 (4) gegebene Bedeutung beschränken, sondern auf den Abstand von irgend einer wirklich abwickelbaren Fläche ausdehnen, so wird der ausgeschlossene Fall natürlich demselben Ausspruch subsumirt.

Obgleich die Wahrheit dieser Bemerkung auf der Hand liegt, so ist es doch zu empfehlen, sie durch Bestimmung der Grössen der angegebenen Ausdehnung und Contraction zu beweisen.

629. Ausdehnung einer Ebene durch synclastische oder anticlastische Biegung. — Wir nehmen an, eine gegebene ebene Fläche sei in eine krumme Form gebogen, ohne dass die von einem besonderen Punkte O der Fläche ausgehenden Linien irgend eine Ausdehnung oder Contraction erlitten hätten. Man soll die Ausdehnung oder Contraction längs des Umfangs eines Kreises bestimmen, der um O als Mittelpunkt mit einem beliebigen Radius a auf der undeformirten Ebene beschrieben ist. Wenn man die Ausdehnung in jedem Theil des Kreises und nicht bloss die Gesammtausdehnung ermitteln soll, so muss noch eine Angabe über die Art der Biegung gemacht sein. Diese soll der Einfachheit wegen zunächst darin bestehen, dass irgend ein Punkt P der gegebenen Fläche sich während der Deformirung in einer zu der durch O gehenden Tangentialebene senkrechten Ebene bewegt.

Es seien a, ϑ die Polar-Coordinaten von P in seiner anfänglichen Lage und r, ϑ diejenigen der auf die durch O gehende Tangentialebene genommenen Projection seiner Lage in der gebogenen Fläche; ferner sei z der Abstand dieser Lage von der Tangentialebene durch O. Dann wird ein Element $a\,d\vartheta$ des undeformirten Kreises auf der gebogenen Fläche

$$(r^2 d\vartheta^2 + dr^2 + dz^2)^{1/2},$$

und wir erhalten somit für die Ausdehnung (d. i. das Verhältniss der Verlängerung zur ursprünglichen Länge) dieses Elements

$$\varepsilon = \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{dr^2}{a^2 d\vartheta^2} + \frac{dz^2}{a^2 d\vartheta^2}\right)^{1/2} - 1. \tag{1}$$

Bezeichnet also E das Verhältniss der Verlängerung des ganzen Umfanges zu der anfänglichen Länge desselben, oder die mittlere Ausdehnung des Umfanges, so ist

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta\left\{\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{dr^2}{a^2 d\vartheta^2} + \frac{dz^2}{a^2 d\vartheta^2}\right)^{1/2} - 1\right\}, \tag{2}$$

wo z und r als bekannte Functionen von ϑ angenommen werden müssen.

Wenn wir uns jetzt auf Abstände von O beschränken, innerhalb welcher die Krümmung der Oberfläche nicht merklich ungleichförmig ist, so ergibt sich

$$(3)\qquad z = \frac{a^2}{2\varrho} \text{ und } r = \varrho \sin\frac{a}{\varrho} = a\left(1 - \tfrac{1}{6}\frac{a^2}{\varrho^2} + \text{ u. s. w.}\right),$$

wenn ϱ der Krümmungsradius des durch O und P gehenden Normalschnitts ist; und wenn wir ϑ in einer der Linien gleich Null setzen, in welchen die Tangentialebene von den Hauptnormalebenen (§ 130) geschnitten wird, so erhalten wir

$$(4)\ \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}\cos^2\vartheta + \frac{1}{\varrho_2}\sin^2\vartheta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\cos 2\vartheta,$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien sind. Folglich verschwindet der Ausdruck $\frac{dr^2}{a^2 d\vartheta^2}$ unter dem Wurzelzeichen, wenn wir keine Glieder nehmen, welche eine höhere als die erste Potenz des kleinen Bruchs $\frac{a^2}{\varrho^2}$ enthalten, und für diesen Grad der Annäherung ist

$$\varepsilon = \left\{1 - \tfrac{1}{3}\frac{a^2}{\varrho^2} + a^2\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)^2 \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\right\}^{1/2} - 1$$

$$= -\tfrac{1}{6}\frac{a^2}{\varrho^2} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)^2 \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta,$$

oder endlich nach (4) und nach einigen Reductionen

$$(5)\quad \varepsilon = -\tfrac{1}{6}a^2\left\{\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_2^2}\right)\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)^2 \cos 4\vartheta\right\}.$$

Wird dies in (2) eingesetzt, so folgt

$$(6)\qquad e = -\tfrac{1}{6}\frac{a^2}{\varrho_1\varrho_2}.$$

Der so ausgedrückte Gesammtbetrag der Ausdehnung wird sich, wie aus (5) hervorgeht, gleichförmig über den Umfang vertheilen, wenn man nicht jeden Punkt P zwingt, in der durch O gehenden zu XOY senkrechten Ebene zu bleiben, sondern ihm gestattet, in der Richtung des Umfanges durch eine Strecke von der Grösse

$$(7)\qquad \frac{a^3}{24}\left\{\left(\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_2^2}\right)\sin 2\vartheta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)^2 \sin 4\vartheta\right\}$$

auszuweichen. Aus (6) schliessen wir Folgendes: —

630. Wenn ein ebenes Flächenstück überall gleichförmig gebogen wird, ohne dass in irgend einem durch einen gewissen Punkt desselben gehenden Radius eine Ausdehnung stattfindet, während in der Peripherie jedes um denselben Punkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreises eine gleichmässige Ausdehnung oder Contraction erfolgt, so ist die Grösse dieser Contraction (die da, wo die Wirkung in einer Ausdehnung besteht, als negativ gerechnet wird) gleich dem Verhältniss von einem Sechstel des Quadrats des Radius

des Kreises zu dem Rechteck aus dem grössten und dem kleinsten Krümmungsradius der Normalschnitte der Fläche; oder, was dasselbe ist, gleich dem Verhältniss von zwei Dritteln des Rechtecks aus der grössten und der kleinsten Deflexion der Peripherie von der im Centrum gelegten Tangentialebene der Oberfläche zum Quadrat des Radius; oder endlich gleich dem Verhältniss von einem Drittel der grössten Deflexion zum grössten Krümmungsradius.

Wenn die so gebogene Fläche die Mittelfläche einer Platte von gleichmässiger Dicke ist, und wenn jede im undeformirten Zustande zu dieser Fläche senkrechte Linie der Substanz auch nach der Biegung auf der Fläche senkrecht steht, so ist die Ausdehnung auf der convexen und die Contraction auf der concaven Seite in jedem Normalschnitt offenbar gleich dem Verhältniss der halben Dicke zum Krümmungsradius. Der Vergleich dieses Ergebnisses mit der letzten Form des vorhergehenden Ausspruchs beweist, dass, wenn die zweite der beiden in § 628 angegebenen Bedingungen erfüllt ist, auch die erstere erfüllt sein wird.

631. Satz von Gauss über die Biegung krummer Flächen. — Wenn eine schon in der angegebenen Weise gebogene Fläche aufs Neue gebogen und auf eine Form gebracht wird, die immer noch den vorgeschriebenen Bedingungen genügt, oder wenn einer gegebenen krummen Oberfläche irgend eine andere Form gegeben wird, dadurch dass man sie denselben Bedingungen gemäss biegt, so ist die in den Umfängen der concentrischen Kreise durch diese Biegung erzeugte Contraction natürlich gleich der Zunahme im Werthe des im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Verhältnisses. Wenn also eine krumme Fläche auf irgend eine andere Form gebracht wird, ohne dass in einem ihrer Theile eine Ausdehnung erfolgt, so bleibt das Rechteck aus den beiden Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte unverändert. Dies ist der berühmte Satz von Gauss über die Biegung von krummen Flächen, den wir in mehr analytischer Weise in dem einleitenden Capitel (§ 150) bewiesen haben.

632. Beschränkungen hinsichtlich der Kräfte und Biegungen in der elementaren Theorie der elastischen Platten. — Wir beginnen jetzt ohne weitere Einleitung die Theorie der Biegung einer ebenen elastischen Platte und lassen zunächst die einschränkenden Bedingungen folgen, die wir in (§ 627) zu geben versprochen haben.

(1) Die irgend einer Linie in der Ebene der Platte parallelen Componenten der Kräfte, welche von aussen her auf irgend

einen von einer Normalfläche [§ 627 (3)] begrenzten Theil der Platte wirken, sind entweder verschwindend oder auf Kräftepaare reducirbar. Mit anderen Worten: Für jeden von einer Normalfläche umgrenzten Theil der Platte ist die algebraische Summe solcher Componenten Null.

(2) Die Hauptkrümmungsradien der Mittelfläche sind überall unendlich grosse Vielfache der Dicke der Platte.

(3) Die Deflexion ist, innerhalb einer endlichen Entfernung vom Anfangspunkt, nirgends mehr als ein unendlich kleiner Bruchtheil der Dicke.

(4) Die Dicke der Platte und die Elasticitätscoefficienten der Substanz brauchen nicht in allen Punkten dieselben zu sein; wenn sie aber überhaupt variiren, so muss dies von Punkt zu Punkt continuirlich geschehen, und es darf innerhalb eines endlichen Flächenstücks der Platte nicht eine dieser Grössen an einer Stelle unvergleichlich grösser als an einer anderen Stelle sein.

633. Angabe der Resultate der allgemeinen Theorie. — Die allgemeine Theorie der elastischen festen Körper, die wir später behandeln werden, zeigt, dass, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, die Vertheilung der Deformation durch die Platte die folgenden Eigenschaften besitzt, deren Angabe an dieser Stelle zwar für das besondere Problem, zu dem wir uns wenden, nicht nöthig ist, aber uns befähigen wird, die darin angewandten Principien vollständig zu verstehen und zu würdigen.

(1) In jedem Theil der Platte, wo die Krümmung von endlicher Grösse ist, ist die Ausdehnung eines Theils der Mittelfläche unendlich klein im Vergleich mit der jeder Seitenfläche.

(2) Die Massenpunkte in jeder geraden Linie, welche zu der Platte senkrecht ist, wenn dieselbe eine Ebene bildet, bleiben in einer Geraden, welche senkrecht zu den gekrümmten Oberflächen ist, die von den Seitenflächen der Platte und den dazwischen liegenden parallelen Ebenen der Substanz nach der Biegung gebildet werden. Folglich haben die Curven, in welchen diese Oberflächen von irgend einer durch diese Linie gehenden Ebene geschnitten werden, einen Punkt dieser Linie zum gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkt.

(3) Die Gesammtdicke der Platte bleibt in jedem Punkte unverändert; aber die halbe Dicke vermindert sich auf einer Seite (es ist dies die convexe Seite, wenn die Krümmung synclastisch ist) und vergrössert sich um ebenso viel auf der anderen Seite der Mittelfläche; diese Ab- und Zunahmen lassen sich mit den Verlän-

gerungen und Verkürzungen von Strecken vergleichen, welche gleich der halben Dicke und auf den beiden Seitenflächen der Platte abgetragen sind.

634. Angabe der Gesetze für die Biegung elastischer Platten. — Die Folgerungen aus der allgemeinen Theorie, auf welche wir die Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung einer elastischen Platte gründen werden, sind folgende: —

Es möge eine von Natur ebene Platte so gebogen werden, dass sie eine Fläche von überall gleichförmiger Krümmung [§ 627 (7)] bildet, während die einwirkenden Kräfte und die Grössen der Verschiebung den Bedingungen und Beschränkungen des § 632 genügen. Unter dieser Voraussetzung gelten folgende Sätze: —

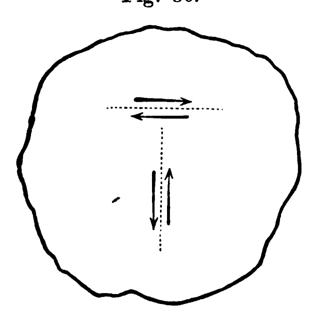
(1) Die Richtung der gegen jeden Schnitt der Platte wirkenden Kraft ist in jedem Punkte der an die benachbarte Mittelfläche gelegten Tangentialebene parallel.

(2) Die gegen irgend welche parallelen Normalschnitte wirkenden Kräfte haben in allen Punkten gleiche Neigung gegen die Richtungen der Normalschnitte (d. h. diese Kräfte wirken in Richtungen, welche parallel sein würden, wenn die Platte ungebogen wäre, und welche thatsächlich nur in Folge der durch die Biegung in den Normalschnitten hervorgebrachten unendlich kleinen Abweichungen vom Parallelismus abweichen.)

(3) Die Grössen der in einem Normalschnitt oder in beliebigen parallelen Normalschnitten auf gleich grosse unendlich kleine Flächenstücke wirkenden Kräfte sind einfach den Abständen dieser Flächenstücke von der Mittelfläche der Platte proportional.

(4) Die Kräftecomponenten längs der Tangentialebenen der Normalschnitte sind gleich und haben in zu einander senkrechten Schnitten entgegengesetzte Richtungen. Den Beweis findet man in § 661. [Die Bedeutung, welche hier der Ausdruck „entgegengesetzte Richtungen" hat, ist aus der Figur 36 zu entnehmen, wo die Pfeilspitzen die Richtungen angeben, in denen die zu beiden Seiten jedes Normalschnitts liegenden Substanztheile sich fortbewegen würden, wenn die Substanz durch jeden der Normalschnitte, welche durch die punktirten Linien dargestellt werden, wirklich durchschnitten würde.]

Fig. 36.

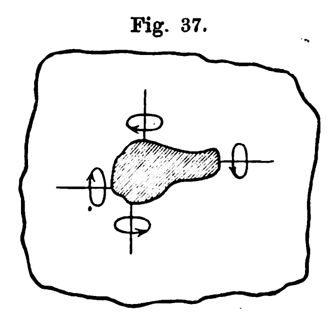


(5) Aus dem Gesetz der Superposition kleiner Verschiebungen erkennen wir, dass, wenn die einwirkenden Kräfte sämmtlich verdoppelt oder in irgend einem anderen Verhältniss geändert werden, sich die Krümmung in jedem Normalschnitt und alle in (1), (2), (3), (4) näher bestimmten inneren Kräfte in demselben Verhältniss ändern, während die Aenderung der potentiellen Energie der inneren Kräfte dem Quadrate dieses Verhältnisses proportional wird.

635. Kräftepaare, gegen einen ganzen Normalschnitt wirkend. — Jeder Theil der Platte, welcher von einem Normalschnitt durch den Umfang eines geschlossenen Polygons oder einer geschlossenen Curve der Mittelfläche begrenzt wird, erleidet von der um ihn her liegenden Masse der Platte die Einwirkung von Kräften, welche, wie aus § 634 (3) unmittelbar hervorgeht, sich auf eine Schaar von Kräftepaaren reduciren lassen, indem man sie für jedes der unendlich kleinen Rechtecke zusammenfasst, in welche man sich den umgrenzenden Normalschnitt durch Normallinien getheilt vorstellen kann. Aus § 634 (2) folgt, dass die so erhaltene Kräftepaar-Vertheilung längs jedes geraden Theils der Umgrenzung (wenn ein solcher vorhanden ist) gleichförmig und in allen parallelen Theilen der Umgrenzung für gleiche Längen von der nämlichen Grösse ist.

636. Die Componenten der Drillung um zwei beliebige zu einander senkrechte Axen sind gleich. — Aus § 634 (4) folgt, dass die Kräftepaar-Componenten, deren Axen senkrecht zur Umgrenzung sind, in auf einander senkrechten Theilen der Umgrenzung gleich gross sind und in Richtungen drehen, deren gegenseitiges Verhältniss die kreisförmigen Pfeile der Figur 37 angeben; d. h. die Richtungen sind solche, dass, wenn die Axe nach der Regel des § 234 für einen Punkt der Umgrenzung von dem betrachteten Theil der Platte aus nach aussen zu gezogen ist, sie für jeden Punkt, in welchem die Umgrenzung senkrecht zu ihrer Richtung in dem ersteren Punkte ist, nach innen zu gezogen werden muss.

Fig. 37.

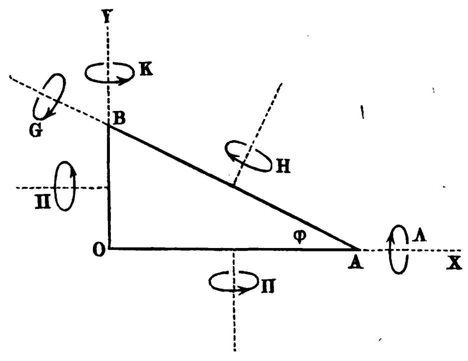


637. Hauptaxen der Biegungsreaction. — Wir können jetzt beweisen, dass es zwei zu einander rechtwinklige Normalschnitte gibt, in welchen die Kräftepaar-Componenten, deren Axen senkrecht auf diesen Schnitten stehen, verschwinden, und dass die

Kräftepaar-Componenten, deren Axen mit diesen Schnitten zusammenfallen, die grössten und die kleinsten Werthe haben:

Es sei OAB ein rechtwinkliges Dreieck der Platte. An den Seiten OA, OB, AB wirken beziehungsweise die Kräftepaare $\varDelta$ und Π, K und Π, G und H. Die Grösse jedes Paares wird gerechnet für die Längen-

Fig. 38.



einheit der Seite, auf die es wirkt, und die Axen und Richtungen der verschiedenen Paare sind, wenn jedes als positiv gerechnet wird, durch die kreisförmigen Pfeile der Fig. 38 angegeben. Ist dann $AB = a$, $BAO = \varphi$, so sind die Gesammtbeträge der Kräftepaare an den drei Seiten beziehungsweise

$$\varDelta a \cos\varphi, \quad \Pi a \cos\varphi,$$
$$K a \sin\varphi, \quad \Pi a \sin\varphi,$$
$$G a, \quad H a.$$

Werden die beiden letzteren nach den Axen OX und OY zerlegt, so erhalten wir

$$G a \cos\varphi - H a \sin\varphi \text{ um } OX,$$
$$G a \sin\varphi + H a \cos\varphi \quad \text{„} \quad OY.$$

Das Gleichgewicht des in Rede stehenden Theils der Platte würde aber nicht gestört werden, wenn derselbe starr werden sollte (§ 564); folglich muss

$$(1) \begin{cases} G a \cos\varphi - H a \sin\varphi = \varDelta a \cos\varphi + \Pi a \sin\varphi & \text{für die Kräftepaare um } OX \\ G a \sin\varphi + H a \cos\varphi = K a \sin\varphi + \Pi a \cos\varphi & \text{„ \quad „ \quad „ \quad „ } OY \end{cases}$$

sein. Hieraus folgt unmittelbar

$$(2) \begin{cases} G = \varDelta \cos^2\varphi + 2\,\Pi \sin\varphi\cos\varphi + K \sin^2\varphi \\ H = (K - \varDelta)\sin\varphi\cos\varphi + \Pi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \end{cases}$$

Mithin geben die Werthe von φ, für welche H verschwindet, G seine grössten und kleinsten Werthe, und da sie durch die Gleichung

$$(3) \qquad \tan 2\varphi = -\frac{\Pi}{\frac{1}{2}(K - \varDelta)}$$

bestimmt werden, so beträgt ihr Unterschied $\frac{1}{2}\pi$.

Eine Modification dieser Formeln, die sich als nützlich erweisen wird, erhalten wir, wenn wir

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}(K + \Delta), \quad \Theta = \tfrac{1}{2}(K - \Delta) \tag{4}$$

setzen. Dann reducirt sich (2) auf

$$\begin{aligned} G &= \Sigma + \Pi \sin 2\varphi - \Theta \cos 2\varphi \\ H &= \qquad \Pi \cos 2\varphi + \Theta \sin 2\varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

und diese Formeln gehen über in

$$\begin{cases} G = \Sigma + \Omega \cos 2(\varphi - \alpha) \\ H = \quad - \Omega \sin 2(\varphi - \alpha), \end{cases} \tag{6}$$

wo α [es ist dies ein durch (3) gegebener Werth von φ] und Ω so gewählt sind, dass

$$\begin{gathered} \Pi = \Omega \sin 2\alpha, \quad \Theta = -\Omega \cos 2\alpha, \\ \text{folglich natürlich } \Omega = (\Pi^2 + \Theta^2)^{1/2} \end{gathered} \tag{7}$$

ist. Diese Untersuchung beweist, dass wir das ganze in Rede stehende System innerer Kräfte auf folgende zweckmässige Weise zusammenfassen dürfen: —

638. Definition der synclastischen und der anticlastischen Reaction. — Die Wirkung, welche jeder Theil der Platte durch die zwischen ihm und der ihn überall umgebenden Masse der Platte wirkenden Kräfte erfährt, nennen wir [in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Gebrauch dieses unten (§ 658) definirten Ausdrucks] eine elastische Reaction. Dieselbe kann als aus zwei verschiedenen Elementen bestehend angesehen werden: — (1) einer synclastischen Reaction und (2) einer anticlastischen Reaction.

(1) Die synclastische Reaction strebt, die Platte um jede in der Ebene derselben gezogene gerade Linie direct und gleich stark zu biegen. Es ist zweckmässig, unter der Grösse der synclastischen Reaction die Grösse Σ des Kräftepaares zu verstehen, welches wechselseitig zwischen den zu beiden Seiten eines beliebigen geraden Normalschnitts von der Einheit der Länge liegenden Substanztheilen wirkt. Ihre Wirkung würde, wenn die Platte in allen Richtungen gleich biegsam wäre, darin bestehen, in allen Normalschnitten gleiche Krümmung zu erzeugen (d. h. die Platte auf die Gestalt einer Kugel zu bringen).

(2) Die anticlastische Reaction besteht aus zwei gleich grossen entgegengesetzt gerichteten einfachen Biegungsreactionen um zwei Reihen paralleler gerader Linien, die in der Ebene der Platte auf einander senkrecht stehen. Ihre Wirkung würde, wenn die Platte in allen Richtungen gleich biegsam wäre, eine gleichförmige anticlastische Krümmung mit gleichen convexen und con-

caven Theilen sein. Ihre Grösse wird gemessen durch die Grösse Ω des Kräftepaares, welches die Wechselwirkung darstellt zwischen den Substanztheilen zu beiden Seiten eines geraden Normalschnitts von der Einheit der Länge, welcher einer jener beiden Schaaren von Linien parallel ist. Sie ruft Kräftepaare von derselben Grösse Ω ins Leben zwischen den Substanztheilen zu jeder Seite eines Normalschnitts von der Einheit der Länge, welcher einer der beiden Linien-Schaaren parallel ist, die den rechten Winkel zwischen den ersteren Linien halbiren; aber diese letzteren Kräftepaare sind nicht senkrecht zur Ebene des Normalschnitts, sondern drehen in derselben. Dies wird bewiesen und erläutert durch die Fig. 39, welche (als ein besonderer Fall der Fig. 38 und der Gleichungen (1) des § 637) das Gleichgewicht eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks darstellt, auf welches um jede Kathete als Axe ein Kräftepaar von der Grösse $\Omega\sqrt{1/2}$ und um eine zur Hypotenuse senkrechte Axe ein drittes Kräftepaar Ω einwirkt.

Fig. 39.

Wenn zwei Paare rechtwinkliger Axen, von denen jedes die durch das andere gebildeten rechten Winkel halbirt, als Coordinatenaxen angenommen werden, so kann, wie die vorhergehenden Formeln [§ 637 (5)] zeigen, eine anticlastische Reaction, welche ein beliebiges drittes Paar rechtwinkliger Linien zu Axen hat, nach der gewöhnlichen Cosinusformel, wenn man darin jeden Winkel verdoppelt, in zwei Reactionen zerlegt werden, deren Axen beziehungsweise mit den beiden Paaren von Coordinatenaxen zusammenfallen. Daraus geht hervor, dass zwei beliebige anticlastische Reactionen durch dieselbe geometrische Construction wie die Kräfte in eine einzige zusammengesetzt werden können. Diese Construction ist an Linien auszuführen, welche einen doppelt so grossen Winkel als die entsprechenden Axen der beiden gegebenen Reactionen einschliessen, und die Lage der Axen der resultirenden Reaction wird bestimmt, indem man jeden Winkel der erhaltenen Figur halbirt.

639. Geometrische Analogien. — Eine ganz entsprechende Reihe von Sätzen gibt es natürlich für die Krümmung einer Oberfläche. So ist dem in § 637 (3) für Biegungsreactionen bewiesenen Satze der oben (§ 130) hergeleitete Satz von Euler über die Krümmung einer Fläche analog, und die Definitionen und Sätze, welche

den auf ihn gegründeten und aus ihm hergeleiteten analog sind, können leicht ohne weitere Erläuterungen oder Beweise verstanden werden.

Es sei

(1) $$z = \frac{1}{2}(\varkappa x^2 + 2\varpi xy + \lambda y^2)$$

die Gleichung einer gekrümmten Oberfläche in unendlich kleiner Entfernung vom Punkte O, wo sie von der Ebene YOX berührt wird. Die Krümmung der Fläche kann man ansehen als zusammengesetzt aus einer cylindrischen Krümmung λ, deren Axe parallel OX ist, einer cylindrischen Krümmung $\varkappa$, deren Axe parallel OY ist, und einer anticlastischen Krümmung ϖ, deren Axe die Winkel XOY, YOX' halbirt. Wenn also jede der Grössen ϖ und λ verschwände, so würde die Oberfläche cylindrisch sein; ihr Krümmungsradius wäre dann $\frac{1}{\varkappa}$ und ihre erzeugenden Linien parallel OY. Wenn jede der Grössen $\varkappa$ und λ verschwänden, so hätten wir eine anticlastische Krümmung; es gäbe dann zwei Schnitte gleicher Maximalkrümmung; die Richtungen dieser Schnitte würden die Winkel XOY und YOX' halbiren und der Krümmungsradius in jedem Schnitt gleich $\frac{1}{\varpi}$ sein.

Setzen wir jetzt

(2) $$\sigma = \frac{1}{2}(\varkappa + \lambda), \quad \vartheta = \frac{1}{2}(\varkappa - \lambda),$$

so geht die Gleichung der Fläche über in

(3) $$z = \frac{1}{2}\{\sigma(x^2 + y^2) + \vartheta(x^2 - y^2) + 2\varpi xy\},$$

oder in

(4) $$\begin{cases} z = \frac{1}{2}\{\sigma + \vartheta \cos 2\varphi + \varpi \sin 2\varphi\} r^2 \\ \text{wenn } x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \text{ ist,} \end{cases}$$

oder endlich in

(5) $$\begin{cases} z = \frac{1}{2}\{\sigma + \omega \cos 2(\varphi - \alpha)\} r^2 \\ \text{wenn } \vartheta = \omega\cos 2\alpha, \ \varpi = \omega \sin 2\alpha \text{ ist.} \end{cases}$$

In diesen Formeln misst σ die sphärische Krümmung; ϑ und ϖ sind die beiden Componenten der anticlastischen Krümmung, genommen in Beziehung auf das Axenpaar $X'X$, $Y'Y$ und das andere Paar, welches die Winkel des ersteren halbirt. Die Resultante von ϑ und ϖ ist eine anticlastische Krümmung ω, deren Axen im Winkel XOY einen Winkel α mit OX und im Winkel YOX' einen gleich grossen Winkel α mit OY bilden.

640. Die beim Biegen einer Platte geleistete Arbeit. — Wenn die Bezeichnungen der §§ 637, 639 beibehalten werden, so ist die auf irgend ein Flächenstück A der Platte, welches unter der Einwirkung einer Reaction $(K, \varDelta, \Pi)$ eine Krümmungsänderung $(\delta\varkappa, \delta\lambda, \delta\varpi)$ erfährt, ausgeübte Arbeit

(1) $$(K\delta\varkappa + \varDelta\delta\lambda + 2\Pi\delta\varpi)A,$$

oder

(2) $$(2\Sigma\delta\sigma + 2\Theta\delta\vartheta + 2\Pi\delta\varpi)A,$$

wenn, wie früher,

(3) $$\begin{cases}\Sigma = \frac{1}{2}(K + \Delta), & \Theta = \frac{1}{2}(K - \Delta),\\ \sigma = \frac{1}{2}(\varkappa + \lambda), & \vartheta = \frac{1}{2}(\varkappa - \lambda)\end{cases}$$

ist.

Es sei nun $PQP'Q'$ ein rechtwinkliger Theil der Platte, dessen Mittelpunkt in O ist, und dessen Seiten $Q'P$, $P'Q$ parallel OX, während $Q'P'$, QP parallel OY sind. Ist dann

$$z = \frac{1}{2}(\varkappa x^2 + 2\varpi xy + \lambda y^2)$$

die Gleichung der gekrümmten Fläche, so erhalten wir

$$\frac{dz}{dx} = \varkappa x + \varpi y, \; \frac{dz}{dy} = \varpi x + \lambda y;$$

folglich weicht die Tangentialebene in (x, y) von der Ebene XOY durch eine unendlich kleine Rotation

(4) $$\begin{cases}\varkappa x + \varpi y \text{ um } OY\\ \varpi x + \lambda y \quad \text{„} \quad OX\end{cases}$$

ab, und die Rotation von XOY bis zur mittleren Tangentialebene für alle Punkte der Seite PQ oder $P'Q'$ beträgt

$$\mp \frac{1}{2}\, Q'P.\varkappa \text{ um } OY \text{ und}$$
$$\mp \frac{1}{2}\, Q'P.\varpi \quad \text{„} \quad OX.$$

Wenn also die Tangentialebene XOY in O fest bleibt, während die Krümmung von $(\varkappa, \varpi, \lambda)$ in $(\varkappa + \delta\varkappa, \varpi + \delta\varpi, \lambda + \delta\lambda)$ übergeht, so wird die Arbeit, welche die über die Seite PQ vertheilten Kräftepaare $PQ.K$ und $PQ.\Pi$ leisten, von denen das erstere um OY, das zweite um OX dreht, gleich

$$\frac{1}{2}\, Q'P.PQ.(K\delta\varkappa + \Pi\delta\varpi)$$

sein. Eine gleich grosse Arbeit werden die gleichen und entgegengesetzten Kräftepaare leisten, welche über die eine gleiche und entgegengesetzte Rotation erleidende Seite $Q'P'$ vertheilt sind. Auf ähnliche Weise erhalten wir für die Gesammtarbeit, welche auf die Seiten $P'Q$ und $Q'P$ ausgeübt ist,

$$PQ.Q'P(\Pi\delta\varpi + \Delta\delta\lambda).$$

Folglich ist die auf alle vier Seiten des Rechtecks ausgeübte Gesammtarbeit

$$PQ.Q'P.(K\delta\varkappa + 2\Pi\delta\varpi + \Delta\delta\lambda),$$

und damit ist der Satz bewiesen; denn man kann jedes gegebene Flächenstück der Platte in unendlich kleine Rechtecke getheilt denken.

Es ist eine lehrreiche Uebung, das Resultat zu bewahrheiten, indem man mit der Betrachtung eines von einer beliebig gegebenen Curve begrenzten Plattentheils beginnt und die Ausdrücke (1) des § 637 anwendet, welche für die auf einen beliebigen unendlich kleinen Theil ds der Umgrenzung, dessen Lage durch (x, y) ausgedrückt ist, wirkenden Kräftepaare

$$(5)\qquad \begin{cases} \left(-\Delta \frac{dx}{ds} + \Pi \frac{dy}{ds}\right) ds \text{ um } OX \\ \left(K \frac{dy}{ds} - \Pi \frac{dx}{ds}\right) ds \quad ,, \quad OY \end{cases}$$

liefern. Wie wir aber soeben (4) gesehen haben, ist die Rotation, welche die im Punkte (x, y) an die Platte gelegte Tangentialebene erfährt, wenn die Krümmung aus $(\varkappa\ \varpi, \lambda)$ in $(\varkappa + \delta\varkappa, \ \varpi + \delta\varpi, \ \lambda + \delta\lambda)$ übergeht,

$$(6)\qquad \begin{cases} x\delta\varkappa + y\delta\varpi \text{ um } OY \\ x\delta\varpi + y\delta\lambda \quad ,, \quad OX, \end{cases}$$

wo vorausgesetzt wird, dass die Tangentialebene an die Platte in O ihre Richtung nicht verändert; folglich ist die auf den Theil ds der Kante ausgeübte Arbeit

$$\left\{\left(K\frac{dy}{ds} - \Pi\frac{dx}{ds}\right)(x\delta\varkappa + y\delta\varpi) + \left(\Pi\frac{dy}{ds} - \Delta\frac{dx}{ds}\right)(x\delta\varpi + y\delta\lambda)\right\} ds.$$

Die gesuchte Arbeit ist das über die ganze umgrenzende Curve genommene Integral dieses Ausdrucks, also gleich

$$(K\delta\varkappa + 2\,\Pi\delta\varpi + \Delta\delta\lambda)\,A;$$

denn es ist

$$\int x\frac{dy}{ds}\,ds = -\int y\frac{dx}{ds}\,ds = A$$

und

$$\int x\frac{dx}{ds}\,ds = 0, \quad \int y\frac{dy}{ds}\,ds = 0,$$

wenn jedes Integral um die ganze geschlossene Curve genommen wird.

641. Partielle Differentialgleichungen der beim Biegen einer elastischen Platte geleisteten Arbeit. — Wir wollen jetzt die Elasticitätskräfte betrachten, welche durch die Biegung $(\varkappa, \varpi, \lambda)$ der Platte ins Leben gerufen werden. Die Biegung wird von der Lage aus gerechnet, in welcher die Platte ungezwängt ist (sie hat dann die Form einer Ebene oder eine nur unendlich wenig davon abweichende Form). Bezeichnet w die für die Flächeneinheit der Platte genommene ganze Grösse der potentiellen Energie jener Kräfte, so erhalten wir, wie im Falle des in § 594 behandelten Drahtes,

$$(7)\qquad K\delta\varkappa = \delta_\varkappa w, \ \Delta\delta\lambda = \delta_\lambda w, \ 2\,\Pi\delta\varpi = \delta_\varpi w,$$

oder nach der anderen Bezeichnung

$$(8)\qquad 2\,\Sigma\delta\sigma = \delta_\sigma w, \ 2\,\Theta\delta\vartheta = \delta_\vartheta w, \ 2\,\Pi\,\delta\varpi = \delta_\varpi w;$$

darin bezeichnen, wie oben dargelegt, K und Δ die einfachen Biegungsreactionen (gemessen durch die für die Längeneinheit genommene Grösse des Biegungskräftepaars) um Linien, welche beziehungsweise OY und OX parallel sind; Π die anticlastische

Reaction, deren Axen mit OX und OY einen Winkel von 45° einschliessen; Σ und Θ, welche zusammen K und Λ äquivalent sind, die synclastische Reaction und die anticlastische Reaction mit den Axen OX und OY. Auch sehen wir, wie in § 595, dass, von welcher Beschaffenheit auch die Substanz der Platte sein mag — dieselbe sei isotrop oder äolotrop (§ 677) — w eine homogene Function zweiten Grades der drei Krümmungscomponenten ($\varkappa$, λ, ϖ) oder (σ, ϑ, ϖ) sein muss. Hieraus und aus (7) oder (8) geht hervor, dass die Coefficienten in den linearen Functionen der drei Krümmungscomponenten, welche die zur Erhaltung dieser Krümmung erforderlichen Reactionscomponenten ausdrücken, den gewöhnlichen Bedingungen genügen müssen, durch welche die Gesammtzahl von neun auf sechs reducirt wird.

Bezeichnen A, B, C, a, b, c sechs von der Beschaffenheit der festen Substanz und der Dicke der Platte abhängende Constanten; so erhalten wir

$$(9)\qquad w = \tfrac{1}{2}\,(A\varkappa^2 + B\lambda^2 + C\varpi^2 + 2a\lambda\varpi + 2b\varpi\varkappa + 2c\varkappa\lambda),$$

folglich nach (7)

$$(10)\qquad \begin{cases} K = A\varkappa + c\lambda + b\varpi \\ \Lambda = c\varkappa + B\lambda + a\varpi \\ 2\Pi = b\varkappa + a\lambda + C\varpi. \end{cases}$$

Werden diese Grössen nach § 640 (3) transformirt, so wird w durch σ, ϑ, ϖ ausgedrückt:

$$(11)\qquad w = \tfrac{1}{2}\,\{(A+B+2c)\sigma^2 + (A+B-2c)\vartheta^2 + C\varpi^2 + 2(b-a)\vartheta\varpi + 2(b+a)\sigma\varpi + 2(A-B)\sigma\vartheta\},$$

und

$$(12)\qquad \begin{cases} 2\Sigma = (A+B+2c)\sigma + (A-B)\vartheta + (b+a)\varpi \\ 2\Theta = (A-B)\sigma + (A+B-2c)\vartheta + (b-a)\varpi \\ 2\Pi = (b+a)\sigma + (b-a)\vartheta + C\varpi. \end{cases}$$

Diese letzteren Formen sind besonders nützlich, indem sie unmittelbar die Relationen zeigen, welchen die Coefficienten in dem im folgenden Paragraphen betrachteten wichtigen Falle genügen müssen.

642. Fall gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen. — Wenn die Platte in allen Richtungen gleich biegsam ist, so muss eine synclastische Reaction eine sphärische Krümmung erzeugen; eine anticlastische Reaction dagegen, welche ein beliebiges Paar in der Platte liegender zu einander senkrechter Linien zu Axen hat, wird eine anticlastische Krümmung erzeugen, welche diese Linien zu Schnitten gleicher Maximalkrümmung auf den entgegengesetzten Seiten der Tangentialebene hat. Bei jeder dieser beiden Wirkungen ist die Grösse der Krümmung einfach der Grösse der

Reaction proportional. Bezeichnen also $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ zwei von der Zusammendrückbarkeit und Starrheit der Substanz, wenn dieselbe isotrop ist (s. unten §§ 677, 680), und von der Dicke der Platte abhängende Coefficienten, so erhalten wir

(13) $$\Sigma = \mathfrak{h}\sigma, \quad \Theta = \mathfrak{k}\vartheta, \quad \Pi = \mathfrak{k}\varpi,$$

folglich [§ 640 (2)]

(14) $$w = \mathfrak{h}\sigma^2 + \mathfrak{k}(\vartheta^2 + \varpi^2).$$

Mithin genügen, wenn in allen Richtungen gleiche Biegsamkeit vorhanden ist, die Coefficienten in den allgemeinen Ausdrücken des § 641 den folgenden Bedingungen: —

(15) $$a = 0, \quad b = 0, \quad A = B, \quad 2(A - c) = C,$$

und zwischen ihnen und den zuletzt eingeführten Coefficienten $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ bestehen die Relationen: —

(16) $$A + c = \mathfrak{h}, \quad \tfrac{1}{2} C = A - c = \mathfrak{k}.$$

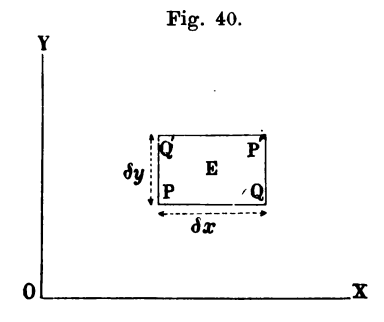
643. Biegung einer Platte durch beliebige Kräfte. — Wir wollen jetzt das Gleichgewicht einer unendlich grossen Platte betrachten, die, von Natur eben, durch irgendwie angreifende, nur den Bedingungen des § 632 unterworfene Kräfte auf eine andere Form gebracht ist. Die Substanz kann, was die Elasticität in verschiedenen Richtungen betrifft, von jeder möglichen Beschaffenheit sein, und die Platte braucht weder hinsichtlich dieser Beschaffenheit, noch hinsichtlich ihrer Dicke in ihren verschiedenen Theilen homogen zu sein, wenn sie nur um jeden Punkt herum innerhalb eines Gebiets, dessen Länge gross ist im Vergleich zur Dicke in jenem Punkte, in beiden Hinsichten annähernd homogen ist [§ 632 (4)].

644. Es seien OX, OY rechtwinklige Coordinatenaxen in der Ebene, welche die Platte anfänglich bildet, und z die unendlich kleine Verschiebung aus dieser Ebene, welche der Plattenpunkt (x, y) unter der Einwirkung beliebiger Kräfte erfährt, deren wirksame Componenten auf folgende Weise bestimmt werden: — Wir betrachten einen Theil E der Platte, der von einer Normalfläche begrenzt ist, welche die Mittelfläche in einer ein unendlich kleines Flächenstück σ in der Nähe des Punktes (x, y) umschliessenden Linie schneidet. Die Summe der senkrecht zu XOY genommenen Componenten der Kräfte, welche auf die ganze in der Nähe des Punktes (x, y) liegende Masse von E wirken, bezeichnen wir mit $Z\sigma$; ferner seien $L\sigma$, $M\sigma$ die Kräftepaarcomponenten um OX und OY, die man erhält, wenn man nach Poinsot die Kräfte aus allen Punkten des für einen Augenblick als starr angesehenen Theils E

in einen Punkt von E versetzt, als welchen man passend den Trägheitsmittelpunkt der Fläche σ des zugehörigen Theils der Mittelfläche annimmt. Diese Kraft und diese Kräftepaare müssen in Verbindung mit den inneren Kräften der Elasticität, welche die umgebende Masse durch die Umgrenzung hindurch auf die Masse von E ausübt, den Bedingungen des Gleichgewichts genügen (§ 564), die man erhält, wenn man E als starren Körper behandelt, und der Theil E, der in Wirklichkeit nicht starr ist, muss die Krümmung annehmen, welche nach § 641 die den letzterwähnten Kräften entsprechende Biegungsreaction hervorruft. Mathematisch ausgedrückt liefern diese Bedingungen fünf Gleichungen, aus denen man durch Elimination der vier die inneren Kräfte bestimmenden Elemente eine einzige partielle Differentialgleichung für z in x und y erhält, welche die gesuchte Gleichung des Gleichgewichts ist.

Gleichungen des Gleichgewichts einer durch irgend welche Kräfte gebogenen Platte. — Es sei σ ein Rechteck $PQP'Q'$, dessen Seiten δx parallel OX und δy parallel OY sind. Ferner seien $\alpha\,\delta y$, $\alpha'\,\delta y$ die nur unendlich wenig von einander verschiedenen zur Platte in den beziehungsweise durch PQ' und QP' gehenden Normalflächen senkrechten Schiebungskräfte; die entsprechenden Grössen für PQ und $P'Q'$ seien β, β'. Dann ist natürlich

Fig. 40.



$$\alpha' - \alpha = \frac{d\alpha}{dx}\,\delta x \text{ und } \beta' - \beta = \frac{d\beta}{dy}\,\delta y.$$

Es hat dies auf den als starr angesehenen Theil E der Platte den Einfluss, dass durch die Mittelpunkte von QP', $Q'P'$ in der Richtung der positiven z die Kräfte $\alpha'\,\delta y$, $\beta'\,\delta x$ und durch die Mittelpunkte von PQ', PQ in der Richtung der negativen z die Kräfte $\alpha\,\delta y$, $\beta\,\delta x$ wirken. Mithin tragen sie zum Gleichgewicht des als starr angesehenen Körpers E

die OZ parallele Kraftcomponente

$$(\alpha' - \alpha)\,\delta y + (\beta' - \beta)\,\delta x \text{ oder } \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right)\delta x\,\delta y,$$

das Kräftepaar $\alpha\,\delta y \,.\, \delta x$ um OY und

„ „ $\beta\,\delta x \,.\, \delta y$ „ OX

bei (in den beiden letzten Ausdrücken ist die Differenz zwischen α und α', sowie zwischen β und β' natürlich vernachlässigt). Drücken weiter K, Λ, Π, nach dem System des § 637, die Biegungsreaction in (x, y) aus, so erhalten wir folgende unendlich wenig von einander verschiedene und entgegengesetzte Kräftepaare, welche auf die Paare entgegengesetzter Seiten wirken, und deren Differenzen, in Componenten um OX und OY

gemessen, das dem Theil E als starren Körper gebliebene Bestreben, sich zu drehen, ausdrücken: —

$$\text{um } OX \begin{cases} \dfrac{d\varDelta}{dy}\,\delta y\,.\,\delta x \text{ von den Seiten } PQ,\ Q'P' \text{ aus} \\ \dfrac{d\varPi}{dx}\,\delta x\,.\,\delta y \quad " \quad " \quad " \quad PQ',\ QP' \quad ", \end{cases}$$

$$\text{um } OY \begin{cases} \dfrac{d\varPi}{dy}\,\delta y\,.\,\delta x \quad " \quad " \quad " \quad PQ,\ Q'P' \quad " \\ \dfrac{dK}{dx}\,\delta x\,.\,\delta y \quad " \quad " \quad " \quad PQ',\ QP' \quad ", \end{cases}$$

oder im Ganzen

$$\text{um } OX \quad \left(\frac{d\varDelta}{dy} + \frac{d\varPi}{dx}\right)\delta x\,\delta y,$$

$$" \quad OY \quad \left(\frac{d\varPi}{dy} + \frac{dK}{dx}\right)\delta x\,\delta y.$$

Folglich liefern die Gleichungen des Gleichgewichts zwischen diesen und den auf E als starren Körper wirkenden äusseren Kräften, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor $\delta x\,\delta y$ fortlassen,

$$(1) \qquad \begin{cases} Z + \dfrac{d\alpha}{dx} + \dfrac{d\beta}{dy} = 0 \\ L + \beta + \dfrac{d\varDelta}{dy} + \dfrac{d\varPi}{dx} = 0 \\ M + \alpha + \dfrac{d\varPi}{dy} + \dfrac{dK}{dx} = 0. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen geht, wenn darin α und β durch ihre aus der zweiten und dritten Gleichung genommenen Werthe ersetzt werden, über in

$$(2) \qquad \frac{d^2K}{dx^2} + 2\,\frac{d^2\varPi}{dx\,dy} + \frac{d^2\varDelta}{dy^2} = Z - \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}.$$

Bezeichnen nun, nach dem System des § 639, $\varkappa$, λ, ϖ die Krümmungscomponenten der Platte, so ist natürlich

$$(3) \qquad \varkappa = \frac{d^2z}{dx^2},\quad \lambda = \frac{d^2z}{dy^2},\quad \varpi = \frac{d^2z}{dx\,dy};$$

folglich liefern die Gleichungen (10) des § 641

$$(4) \qquad \begin{cases} K = A\,\dfrac{d^2z}{dx^2} + c\,\dfrac{d^2z}{dy^2} + b\,\dfrac{d^2z}{dx\,dy} \\ \varDelta = c\,\dfrac{d^2z}{dx^2} + B\,\dfrac{d^2z}{dy^2} + a\,\dfrac{d^2z}{dx\,dy} \\ 2\,\varPi = b\,\dfrac{d^2z}{dx^2} + a\,\dfrac{d^2z}{dy^2} + C\,\dfrac{d^2z}{dx\,dy}. \end{cases}$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in (2) erhalten wir die gesuchte Differentialgleichung der deformirten Oberfläche. Wenn keine beschränkende

Voraussetzung gemacht wird (§ 643), so müssen wir A, B, C, a, b, c als gegebene Functionen von x und y ansehen. In dem für die Praxis wichtigen Falle einer homogenen Platte sind diese Grössen Constanten, und die gesuchte Gleichung wird die lineare partielle Differentialgleichung vierter Ordnung mit constanten Coefficienten: —

$$(5)\quad \begin{cases} A\dfrac{d^4z}{dx^4}+2b\dfrac{d^4z}{dx^3dy}+(C+2c)\dfrac{d^4z}{dx^2dy^2}+2a\dfrac{d^4z}{dxdy^3}+B\dfrac{d^4z}{dy^4} \\ \qquad\qquad = Z-\dfrac{dM}{dx}-\dfrac{dL}{dy}. \end{cases}$$

Für den Fall gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen geht diese Gleichung nach § 642 (13) über in

$$(6)\quad \begin{cases} A\left(\dfrac{d^4z}{dx^4}+2\dfrac{d^4z}{dx^2dy^2}+\dfrac{d^4z}{dy^4}\right)=Z-\dfrac{dM}{dx}-\dfrac{dL}{dy} \\ \text{oder } A\left(\dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{d^2}{dy^2}\right)^2 z = Z-\dfrac{dM}{dx}-\dfrac{dL}{dy}. \end{cases}$$

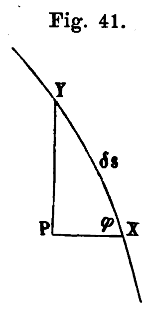
645. Grenzbedingungen. — Um die Grenzbedingungen für eine Platte von endlichen Dimensionen zu ermitteln, können wir dieselbe zunächst als einen Theil einer unendlichen Platte betrachten, welcher von einer Normalfläche begrenzt wird, die durch eine auf der Mittelfläche gezogene geschlossene Curve geht. Die vorhergehende Untersuchung führt uns unmittelbar zu Ausdrücken für die Kraft und das Kräftepaar, die auf irgend einen Theil der umgrenzenden Normalfläche wirken. Wenn dann der in Rede stehende Theil aus der Platte wirklich ausgeschnitten wird, und an seinem Rande Kräfte und Kräftepaare angebracht werden, die mit den erhaltenen identisch sind, so wird sein Elasticitätszustand in allen Punkten bis zum normalen Rande hin absolut unverändert bleiben. Die Erfüllung dieser Bedingung erfordert drei Gleichungen, welche ausdrücken, (1) dass die am Rande angebrachte Schiebungskraft (d. i. die Tangentialkraft in der den Rand bildenden Normalfläche), welche nothwendigerweise die Richtung der Normallinie an die Platte hat, von der erforderlichen Grösse sei, und (2. und 3.) dass die um zwei beliebige Linien in der Ebene der Platte genommenen Componenten des auf jeden kleinen Theil des Randes wirkenden Kräftepaars von der erforderlichen Grösse seien. Diese drei Gleichungen wurden von Poisson als für den vollständigen Ausdruck der Grenzbedingungen nothwendig gegeben. Kirchhoff hat aber gezeigt, dass sie zu Viel ausdrücken, und dass zwei Gleichungen genügen. Wir werden dies dadurch beweisen, dass wir Folgendes zeigen: Wenn eine Platte von endlicher Grösse in einem beliebigen Reactionszustande oder frei von Reaction gege-



ben ist, so können wir auf dieselbe um Axen, die überall zu ihrer normalen Randfläche senkrecht sind, beliebig vertheilte Kräftepaare wirken lassen, ohne dass die Platte, ausser in unendlich kleinen Abständen vom Rande, eine Aenderung erlitte, vorausgesetzt dass zugleich senkrecht zur Platte in bestimmter Weise vertheilte Kräfte auf den Rand wirken, deren Grösse und Vertheilung sich aus der Vertheilung der Kräftepaare berechnen lassen.

Es sei $XY = \delta s$ ein in einem Punkte (x, y) liegendes unendlich kleines Element einer auf der Mittelfläche einer unendlichen Platte gezogenen Curve. Ferner seien PX und PY beziehungsweise parallel der x und der y Axe und $\measuredangle\, YXP = \varphi$. Bezeichnet dann $\zeta\,\delta s$ die Schiebungskraft in der durch δs gehenden Normalfläche der Platte, und sind, wie oben (§ 644), $\alpha . PY$ und $\beta . PX$ die Schiebungskräfte in den Normalflächen durch PY und PX, so muss, wenn das als starr vorausgesetzte Dreieck YPX im Gleichgewicht sein soll (§ 564),

Fig. 41.



$$\zeta\,\delta s = \alpha . PY + \beta . PX, \text{ folglich } \zeta = \alpha \sin\varphi + \beta\cos\varphi$$

sein. Substituiren wir für α und β ihre Werthe aus § 644 (1), so erhalten wir

$$(1) \qquad \zeta = -\left(M + \frac{d\,\Pi}{d\,y} + \frac{d\,K}{d\,x}\right) \sin\varphi - \left(L + \frac{d\,\mathit{\Lambda}}{d\,y} + \frac{d\,\Pi}{d\,x}\right) \cos\varphi.$$

Bezeichnen weiter $G\,\delta s$ und $H\,\delta s$ die um XY und um eine zu XY senkrechte in der Ebene der Platte liegende Axe genommenen Componenten des Kräftepaars, welches durch die δs enthaltende Normalfläche wirkt, so folgt [§ 637 (2)]

$$(2) \qquad G = \mathit{\Lambda} \cos^2\varphi + 2\,\Pi \sin\varphi\cos\varphi + K\sin^2\varphi,$$

$$(3) \qquad H = (K - \mathit{\Lambda}) \sin\varphi\cos\varphi + \Pi\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Wenn man hier unter (ζ, G, H) die Einwirkungen entsprechender äusserer Kräfte auf den Rand verstände, nachdem die Platte bis auf den von einer geschlossenen Curve, von welcher δs ein Element ist, umgrenzten Theil entfernt wäre, so würden diese drei Gleichungen dasselbe ausdrücken wie die Gleichungen, durch welche Poisson die Grenzbedingungen darstellt. Endlich mögen $\mathfrak{Z}\,\delta s$, $\mathfrak{G}\,\delta s$, $\mathfrak{H}\,\delta s$ die zur Platte senkrechte Kraft und die Componenten des Kräftepaars bezeichnen, welches man in irgend einem Punkte (x, y) eines freien Randes auf die Länge δs der Mittelcurve wirklich einwirken lässt. Wie wir alsbald (§ 648) sehen werden, wird dann, wenn

$$(4) \qquad \mathfrak{Z} - \zeta + \frac{d(\mathfrak{H} - H)}{d s} = 0$$

ist, die Platte überall, ausser in den dem Rande unendlich nahe liegenden Theilen, in demselben Reactionszustande sein, als wenn (ζ, G, H) die Wirkung auf den Rand ist. Wenn wir also ζ und H aus diesen vier Glei-

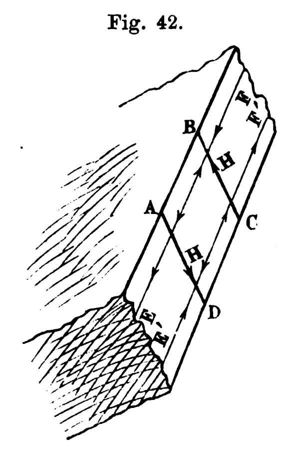
chungen eliminiren, so bleiben uns zwei Gleichungen [die Gleichung (2) unverändert und eine neue Gleichung], nämlich

$$(5)\quad \begin{cases} G = \Delta \cos^2\varphi + 2\,\Pi \sin\varphi \cos\varphi + K \sin^2\varphi \\ \mathfrak{Z} + \dfrac{d\mathfrak{H}}{ds} = -\left(M + \dfrac{d\Pi}{dy} + \dfrac{dK}{dx}\right)\sin\varphi - \left(L + \dfrac{d\Delta}{dy} + \dfrac{d\Pi}{dx}\right)\cos\varphi \\ \qquad + \dfrac{d}{ds}\left[(K - \Delta)\sin\varphi\cos\varphi + \Pi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right], \end{cases}$$

und dies sind **Kirchhoff's** Grenzgleichungen.

646. Vertheilung von Schiebungskräften, welche dieselbe Biegung erzeugen wie eine gegebene Vertheilung von Kräftepaaren, deren Axen zur Umgrenzung senkrecht sind. — Der am Ende des letzten Paragraphen ausgesprochene Satz ist mit dem folgenden äquivalent: — Es lässt sich eine gewisse Vertheilung normaler Schiebungskräfte auf den Rand einer endlichen Platte bestimmen, welche dieselbe Wirkung erzeugt, wie eine beliebig gegebene Vertheilung von Kräftepaaren um Axen, die überall zu der den Rand bildenden Normalfläche senkrecht sind. Dies zu beweisen, wollen wir annehmen, dass in entgegengesetzten Richtungen zu beiden Seiten der Mittellinie und parallel zu derselben in den Linien EF, $E'F'$ gleiche Kräfte wirken, welche die vorausgesetzte Kräftepaarvertheilung ausmachen. Dabei ist festzuhalten, dass die Kräfte längs ihrer Wirkungslinien wirklich vertheilt und nicht, wie in der abstracten Dynamik idealer starrer Körper, in beliebigen, gleichgiltig welchen, Punkten dieser Linien angebracht sind; die für die Einheit der Länge genommene Grösse der Kraft ist in den benachbarten Theilen der beiden Linien zwar dieselbe, muss jedoch den Rand entlang sich von Punkt zu Punkt ändern, damit die Kräftepaarvertheilung nicht gleichförmig sei. Endlich können wir voraussetzen, dass die in den entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte nicht, wie es Fig. 42 zeigt, auf zwei Linien beschränkt, sondern über die beiden Hälften des Randes zu beiden Seiten seiner Mittellinie verbreitet sind. Weiter muss, wie in § 634 (3) angegeben ist, die Grösse dieser Kräfte in gleichen unendlich kleinen Brei-

Fig. 42.



ten für verschiedene Abstände von der Mittellinie diesen Abständen proportional sein, wenn die gegebene Kräftepaarvertheilung mit der in § 645 mit H bezeichneten vollständig übereinstimmen soll.

Wir denken uns jetzt Linien quer durch den Rand gezogen, welche auf seinen Grenzlinien senkrecht stehen; dadurch werde der ganze Rand in unendlich kleine Rechtecke zertheilt; eins derselben sei $ABCD$ (Fig. 42). In einem dieser Rechtecke bringen wir ein System von Kräftepaaren an, die einander das Gleichgewicht halten; das System bestehe aus passend vertheilten Kräftepaaren, welche dem der Fläche des Rechtecks zugehörigen Theil der gegebenen Kräftepaarvertheilung gleich und entgegengesetzt sind, und einem Paar einzelner Kräfte in den Linien AD, CB, die gleiche und entgegengesetzte Momente haben. Dieses System kann offenbar keine merkliche Störung (Reaction oder Deformation) in der Platte verursachen, ausser innerhalb eines mit den Seiten des Rechtecks vergleichbaren Abstandes. Wenn also in allen Rechtecken, in die man den Rand zertheilt hat, dasselbe geschehen ist, so wird die Platte nur ringsherum nach innen zu bis zu einem unendlich kleinen Abstande vom Rande hin gestört. Auf diese Weise ist aber die gegebene Kräftepaarvertheilung entfernt (da ihr durch ein System passend vertheilter Kräfte direct das Gleichgewicht gehalten wird, welche überall den Kräften, aus denen sie besteht, gleich und entgegengesetzt sind), und es bleibt nur die Reihe der in den Querlinien angebrachten Kräfte. In jeder Querlinie wirken zwei dieser Kräfte, die aus den in den beiden Rechtecken, für welche diese Linie eine gemeinschaftliche Seite ist, ausgeführten Operationen herrühren, und nur die Differenz beider Kräfte bleibt wirksam. Wir sehen somit, dass die gegebene Kräftepaarvertheilung, wenn sie den Rand entlang gleichförmig ist, entfernt werden kann, ohne dass der Zustand der Platte, ausser in dem dem Rande unendlich nahe liegenden Theile, gestört würde. Mit anderen Worten: —

647. Gleichförmig vertheilte Torsionskräftepaare erzeugen keine Biegung. — Eine gleichförmige Vertheilung von Kräftepaaren längs des ganzen Randes einer endlichen Platte, überall um Axen in der Ebene der Platte und senkrecht zum Rande, erzeugt keine Verzerrung oder Reaction der Platte im Ganzen, sondern eine Verzerrung, die sich ringsherum vom Rand aus nach innen zu nur auf unendlich kleine Entfernungen erstreckt. Die Wahrheit dieses bemerkenswerthen Satzes erhellt auch, wenn wir erwägen,

dass das Streben einer solchen Kräftepaarvertheilung nur darin bestehen kann, die beiden Grenzlinien des Randes unendlich wenig in entgegengesetzten Richtungen um die Fläche der Platte zu ziehen. Später werden wir die dadurch in der Nähe des Randes erzeugte Deformation genau bestimmen und finden, dass dieselbe vom Rande aus einwärts äusserst rasch abnimmt und in Abständen, welche grösser als die doppelte Dicke der Platte sind, praktisch unmerklich wird.

648. Vertheilung der Schiebungskräfte, welche dieselbe Biegung wie Torsionskräftepaare erzeugen. — Es seien auf dem Rande einer Platte um Axen, die überall in der Ebene der Platte und senkrecht zum Rande sind, Kräftepaare vertheilt, welche für die Einheit der Länge des Randes eine beliebig gegebene Grösse haben. Dann wird die Biegung der Platte im Ganzen unverändert bleiben und, ausser in den dem Rande unendlich naheliegenden Theilen, auch keine Störung der Reaction oder der Deformation erzeugt werden, wenn man die Kräftepaare entfernt und statt eines jeden eine zur Platte senkrechte Kraft anbringt, deren Grösse, genommen für die Einheit der Länge des Randes, gleich ist der für dieselbe Einheit genommenen Grösse der Aenderung des entsprechenden Kräftepaars.

In Fig. 42 (§ 646) sei $AB = \delta s$. Ist dann H die für die Längeneinheit des Randes genommene Grösse des zwischen AB und BC gegebenen Kräftepaars, so ist der Betrag desselben für das Rechteck $ABCD$ gleich $H\delta s$; folglich muss H die Grösse der längs AD, CB eingeführten Kräfte sein, damit dieselben ein Kräftepaar von dem geforderten Moment ausmachen. Bezeichnet in ähnlicher Weise $H'\delta s$ die Grösse des Kräftepaars in dem auf der anderen Seite von BC liegenden anstossenden Rechteck, so wird H' die aus demselben herrührende Kraft sein, welche in BC und H entgegengesetzt wirkt. Es bleibt also in BC nur eine der Differenz $H' - H$ gleiche Kraft wirksam.

Wenn wir voraussetzen, dass s (eine längs des Randes von einem beliebigen Nullpunkte aus gemessene Grösse) in der Richtung von A nach B wächst, so erhalten wir

$$H' - H = \frac{dH}{ds}\,\delta s.$$

Es bleiben uns also einzelne Kräfte übrig, die gleich $\frac{dH}{ds}\,\delta s$ sind, und deren Richtungen senkrecht quer durch den Rand gehen; jede ist von der folgenden um die Strecke δs entfernt. Diese Kräfte können wir, ohne eine Störung (ausgenommen in unendlicher Nähe des Randes)

hervorzubringen, durch continuirlich vertheilte Querkräfte ersetzen, welche für die Längeneinheit $\frac{dH}{ds}$ betragen. Damit ist unser Satz bewiesen. Wenn $\frac{dH}{ds}$ positiv ist, so wirken diese Kräfte in der Richtung der negativen z; daraus ergibt sich unmittelbar die in § 645 (4) ausgedrückte Form des Satzes.

649. Kreisförmige Deformation. — Als erstes Beispiel der Anwendung dieser Gleichungen wollen wir den einfachen Fall einer gleichförmigen Platte von endlicher oder unendlicher Ausdehnung betrachten, auf welche eine in concentrischen Kreisen symmetrisch vertheilte Last und, wenn es nöthig ist, am Rande passend angebrachte Kräfte symmetrisch einwirken.

Es sei der symmetrische Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten gewählt, und ein beliebiger Punkt P habe die Polar-Coordinaten r, ϑ, so dass

$$x = r \cos \vartheta, \; y = r \sin \vartheta$$

ist. Das zweite Glied der Formel (6) des § 644 wird eine Function von r sein, die wir jetzt der Kürze wegen einfach durch Z bezeichnen wollen (es ist dies die Grösse der Last für die Einheit der Fläche, wenn die auf jeden kleinen Theil wirkenden Kräfte sich auf eine einzige durch irgend einen Punkt dieses Theils gehende Normalkraft reduciren lassen). Da jetzt z eine Function von r und, wenn u eine beliebige Function von r bezeichnet, wie wir früher [§ 491 (e)] gesehen haben,

$$\Delta^2 u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{du}{dr}\right)$$

ist, so geht die Gleichung (6) des § 644 über in

$$\text{(1)} \qquad \frac{A}{r} \frac{d}{dr}\left\{r \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dz}{dr}\right)\right]\right\} = Z.$$

Daraus folgt

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} z = \frac{1}{A}\int \frac{dr}{r}\int r\,dr \int \frac{dr}{r}\int r\,Z\,dr \\ \quad + \frac{1}{4}\, C\,(\log r - 1)\, r^2 + \frac{1}{4}\, C' r^2 + C'' \log r + C'''; \end{cases}$$

dies ist das vollständige Integral mit den vier willkürlichen Constanten. Die folgenden Ausdrücke, die aus Zwischenintegralen hergeleitet sind, verdienen schon jetzt unsere Beachtung, insofern sie für das vollständige Verständniss der Lösung förderlich sind; zudem werden wir uns später einiger derselben bedienen, um die Grenzbedingungen auszudrücken. Die in (7) gebrauchte Bezeichnung wird in § 650 erklärt werden: — Es ist

(3) (Die Inclination, dividirt durch den Radius; oder die Krümmung in einem zum Radius senkrechten Normalschnitt)

$$\frac{1}{r}\frac{dz}{dr} = \frac{1}{A r^2}\int r\,dr \int \frac{dr}{r}\int r\,Z\,dr + \frac{1}{2}\, C\,(\log r - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\, C' + \frac{C''}{r^2}$$

(4) (Die Krümmung in einem den Radius enthaltenden Schnitt)
$$\frac{d^2 z}{d r^2} = -\frac{1}{A r^2}\int r\,d r \int \frac{d r}{r}\int r\,Z\,d r + \frac{1}{A}\int\frac{d r}{r}\int r\,Z\,d r + \tfrac{1}{2}\,C\,(\log r + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\,C' - \frac{C''}{r^2}.$$

(5) (Die Summe der Krümmungen in zu einander senkrechten Schnitten)
$$\nabla^2 z = \frac{1}{A}\int\frac{d r}{r}\int r\,Z\,d r + C\log r + C'.$$

(6)
$$\begin{cases} A\,\dfrac{d^2 z}{d r^2} + c\,\dfrac{d z}{r\,d r} = G \\ = -\dfrac{A-c}{A r^2}\displaystyle\int r\,d\int\frac{d r}{r}\int r\,Z\,d r + \int\frac{d r}{r}\int r\,Z\,d r \\ \quad + \tfrac{1}{2}\,C\,\{(A+c)\log r + \tfrac{1}{2}(A-c)\} \\ \quad + \tfrac{1}{2}\,C'\,(A+c) - C''\,(A-c)\,\dfrac{1}{r^2}, \\ H = 0. \end{cases}$$

(7)
$$L = c\,\frac{d^2 z}{d r^2} + A\,\frac{d z}{r\,d r}.$$

(8)
$$\begin{cases} (A-c)\,\dfrac{d}{d r}\left(\dfrac{1}{r}\,\dfrac{d z}{d r}\right) + \dfrac{d G}{d r} = A\,\dfrac{d}{d r}\,\nabla^2 z = -\zeta \\ \quad = \dfrac{1}{r}\displaystyle\int r\,Z\,d r + C\,\dfrac{A}{r}. \end{cases}$$

Die Formeln (6) und (8) drücken der Bezeichnung des § 645 gemäss das Kräftepaar und die Schiebungskraft aus, welche auf die Normalfläche wirken, die die Mittelfläche der Platte im Kreise vom Radius r schneidet. Sie lassen sich analytisch aus unserer Lösung (2) herleiten vermittels der Formeln (2), (3) und (1) des § 645, wenn man § 644 (4) und § 642 (15) zu Hülfe nimmt. Die Arbeit wird natürlich bedeutend abgekürzt, wenn man $y = 0$ und $x = r$ annimmt und die Formeln (3) und (4) des vorliegenden Paragraphen benutzt. Der Leser mag diese Rechnung, mit der angegebenen Abkürzung oder ohne dieselbe, zu seiner Uebung ausführen. Es ist aber lehrreicher, das Gleichgewicht einer in concentrischen Kreisen symmetrisch deformirten Platte direct und ohne Benutzung bereits erhaltener Formeln zu bestimmen und so in der Darlegung eines unabhängigen Beweises der Formel (6) des § 644 für diesen Fall, oder der Formel (1) des § 649 Ausdrücke für die Biegungs- und Schiebungsreactionen zu finden.

650. Directe Bestimmung der kreisförmigen Deformation. — Es ist klar, dass in jedem Theil der Platte die Normalschnitte (§ 637) der grössten und kleinsten, oder der kleinsten und grössten Biegungskräftepaare diejenigen sind, welche durch den vom symmetrischen Mittelpunkt O aus gezogenen Radius und senkrecht zu demselben gehen. Es seien in dem Abstande r von O in

dem durch den Radius gehenden Schnitte und in dem zum Radius senkrechten Schnitte beziehungsweise die Kräftepaare L und G thätig, so dass, wenn λ und $\varkappa$ die Krümmungen in diesen Schnitten sind, nach § 641 (10) und § 642 (15)

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} L = A\lambda + c\varkappa \\ G = c\lambda + A\varkappa \end{cases}$$

ist. Ferner sei ζ die Schiebungskraft (§ 616, Anmerkung) in dem kreisförmigen Normalschnitt vom Radius r. Die Symmetrie erfordert, dass in radial gerichteten Normalschnitten keine Schiebungskräfte vorhanden seien.

Betrachten wir jetzt ein Element E, welches von zwei Radien, die einen unendlich kleinen Winkel $\delta\vartheta$ mit einander bilden, und von zwei concentrischen Kreisen, deren Radien $r - \frac{1}{2}\,\delta r$ und $r + \frac{1}{2}\,\delta r$ sind, begrenzt wird, so sehen wir, dass die gleichen Kräftepaare $L\delta r$, welche auf seine radialen Normalschnitte um Axen wirken, deren Richtungen entgegengesetzt und um den unendlich kleinen Winkel $\delta\vartheta$ verschieden sind, eine Resultante von der Grösse $L\delta r\,\delta\vartheta$ um eine Axe haben, welche senkrecht zum mittleren Radius und im Falle eines positiven L nach der negativen Seite zu gerichtet ist. Ferner haben die an Grösse nur unendlich wenig verschiedenen Kräftepaare, welche auf den äusseren und den inneren kreisförmigen Rand von E wirken, eine um dieselbe Axe drehende Resultante von der Grösse $\frac{d\,(Gr\,\delta\vartheta)}{dr}\,\delta r$; es ist dies die Differenz der Werthe, welche $Gr\,\delta\vartheta$ annimmt, wenn man $r - \frac{1}{2}\,\delta r$ und $r + \frac{1}{2}\,\delta r$ für r setzt. Endlich haben wir noch das Kräftepaar der auf den äusseren und den inneren Rand wirkenden Schiebungskräfte, von denen jede nur unendlich wenig von $\zeta r\,\delta\vartheta$ verschieden ist; das Moment dieses Kräftepaars ist $\zeta r\,\delta\vartheta\,\delta r$. Wenn also E unter der Einwirkung dieser Kräftepaare im Gleichgewicht sein soll, so muss

$$- L\delta r\delta\vartheta + \frac{d(Gr)}{dr}\,\delta r\delta\vartheta + \zeta r\delta r\delta\vartheta = 0,$$

oder

$$\text{(10)} \qquad - L + \frac{d\,(Gr)}{dr} + \zeta r = 0$$

sein, wenn wir voraussetzen, was wir jetzt zweckmässig thun dürfen, dass auf keinen Theil der Platte, ihre Ränder ausgenommen, Kräftepaare von aussen einwirken. Betrachten wir weiter die auf

E wirkenden Normalkräfte, so erhalten wir $\frac{d(\zeta r \delta \vartheta)}{dr} \delta r$ für die Summe derjenigen, welche von den anstossenden Theilen der Platte ausgeübt werden, und $Zr\delta\vartheta\delta r$ für diejenigen, welche von anderen Körpern herrührt, wenn Z wie früher die für die Einheit der Fläche der Platte genommene Grösse der von aussen einwirkenden Normalkraft bezeichnet. Das Gleichgewicht dieser Kräfte fordert also

$$(11) \qquad \frac{d(\zeta r)}{dr} + Zr = 0.$$

Substituirt man in (11) für ζ den aus (10) sich ergebenden Werth, in dem Resultat die Ausdrücke (9) von L und G und in dem letzterhaltenen Resultat die Ausdrücke, welche die Differentialrechnung für λ und $\varkappa$ liefert (es sind dies $\frac{dz}{r\,dr}$ und $\frac{d^2z}{dr^2}$, da die Platte eine Rotationsfläche ist, welche sich unendlich wenig von einer zur Axe senkrechten Ebene unterscheidet), so gelangen wir schliesslich zur Differentialgleichung (1) des Problems. Was die übrigen Formeln des § 649 betrifft, so ergeben sich (6), (7), (8) unmittelbar aus den Formeln (9) und (10), die wir jetzt bewiesen haben. $H = 0$ folgt aus der Thatsache, dass die radialen und kreisförmigen Normalschnitte die Schnitte grösster und kleinster oder kleinster und grösster Krümmung sind.

651. Bedeutung der einzelnen Theile des Integrals. — Wir sind jetzt im Stande, die Bedeutung jeder der vier willkürlichen Constanten zu erkennen.

(1) C''' ist natürlich bloss eine Verschiebung der Platte, die von keiner Deformation begleitet ist.

(2) $C'' \log r$ ist eine Verschiebung, welche überall eine anticlastische Krümmung erzeugt, und zwar sind die Krümmungen in den beiden Hauptschnitten $\pm \frac{C''}{r^2}$; dem entsprechend sind die Biegungskräftepaare L und G gleich $\pm (A - c) \frac{C''}{r^2}$. Diese Einwirkung würde eine unendliche ebene Platte mit kreisförmiger Oeffnung erfahren, auf deren Rand gleichmässig Biegungskräftepaare vertheilt wären, welche in jedem Punkte um die Tangente als Axe drehten. Wir erkennen dies aus der Thatsache, dass die von C'' hervorgerufene elastische Reaction in der Platte nach dem umgekehrten Quadrate des Abstandes vom Mittelpunkte ihrer Symmetrie

abnimmt. Es ist beachtenswerth, dass, obgleich der absolute Werth $C'' \log r$ der Deflexion für unendliche Werthe von r unendlich ist, die einschränkende Bedingung (3) des § 632 doch nicht verletzt wird, vorausgesetzt dass C'' im Vergleich zur Dicke unendlich klein ist. Auch lässt sich ohne Mühe beweisen, dass das Gesetz (1) des § 633 in der That durch diese Deflexion erfüllt wird, sogar wenn die ganze Verschiebung genau diesen Werth $C'' \log r$ und eine zur Ebene in ihrem ungestörten Zustande genau senkrechte Richtung hat. Für diesen Fall ist $\zeta = 0$, oder es findet keine Schiebung statt.

(3) $\frac{1}{4} C' r^2$ ist eine Verschiebung, die einer sphärischen Krümmung entspricht und daher einfach eine gleichmässige synclastische Reaction [§ 638 (2)] erzeugt, deren Grösse natürlich [§ 641 (10) oder (11)] gleich $A + c$, dividirt durch den Krümmungsradius, oder gleich $(A + c) \times \frac{1}{2} C'$ ist und mit den gleichen Werthen übereinstimmt, welche die Formeln (6) und (7) des § 649 für L und G geben. Auch in diesem Falle ist $\zeta = 0$, oder es ist keine Schiebungskraft vorhanden. Eine endliche Platte von irgend welcher Form, auf deren ganzen Rand ein gleichmässiges Biegungskräftepaar wirkt, wird auf diese Weise sphärisch gebogen.

(4) $\frac{1}{4} C (\log r - 1) r^2$ ist eine Deflexion in dem Kreise, der vom symmetrischen Mittelpunkt den Abstand r hat, welche eine Schiebungskraft von der Grösse $-A\frac{C}{r}$ und ein Biegungskräftepaar

$$\frac{1}{2} C\{(A + c) \log r + \frac{1}{2} (A - c)\}$$

hervorruft.

652. Biegung eines flachen Ringes, an dessen Rändern symmetrisch vertheilte Kräfte angreifen. — Es ist jetzt nur noch eine einfach algebraische Aufgabe, die Biegung eines flachen Ringes oder eines von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Theils einer ebenen Platte zu ermitteln, auf welchen beliebig gegebene Biegungskräftepaare und Querkräfte wirken, die auf seinen äusseren und inneren Rand gleichmässig vertheilt sind. Damit Gleichgewicht stattfinde, müssen die Kräfte auf dem äusseren und dem inneren Rande entgegengesetzte Richtungen und gleiche Grössen haben. Wir haben also drei willkürliche Daten: Die Grössen des auf jedem Rande angebrachten Kräftepaars, genommen für die Einheit der Länge, und den Gesammtbetrag F der auf jeden Rand wirkenden Kraft. Aus § 651 (4) oder § 649 (8) sehen wir, dass

$$(12) \qquad -C = \frac{F}{2\pi A}$$

ist; es bleiben also nur die beiden Constanten C' und C'' unbekannt, und diese bestimmen sich aus den beiden Gleichungen, die man erhält, wenn man den Ausdruck von G [§ 649 (6)] gleich den Werthen setzt, die beziehungsweise für die Werthe, welche r im äusseren und inneren Rande hat, gegeben sind.

Beispiel. — Ein kreisförmiger Tisch (von isotropischem Material) mit einer concentrischen kreisförmigen Oeffnung wird von seinem äusseren Rande getragen, der einfach auf einem horizontalen Kreise ruht; über seinen inneren Rand ist eine Last gleichmässig vertheilt. [Die Aufgabe bleibt im Wesentlichen dieselbe, wenn man den inneren und den äusseren Rand gegen einander vertauscht.] Man soll die von dieser Last bewirkte Deflexion bestimmen (dieselbe wird natürlich zu der unten bestimmten, aus dem Gewicht herrührenden Deflexion einfach addirt). Hier muss G an jedem Rande verschwinden.

Sind a und a' die Radien des inneren und des äusseren Randes, so haben wir

$$\tfrac{1}{2} C\{(A+c)\log a + \tfrac{1}{2}(A-c)\} + \tfrac{1}{2} C'(A+c) - C''(A-c)\frac{1}{a^2} = 0$$

und eine zweite Gleichung, die aus der letzten entsteht, wenn man a' statt a schreibt. Folglich ist

$$C''(A-c)\left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a^2}\right) = -\tfrac{1}{2} C (A+c) \log\frac{a}{a'}$$

und

$$\tfrac{1}{2} C'(A+c)(a^2 - a'^2) = -\tfrac{1}{2} C[(A+c)(a^2\log a - a'^2 \log a') + \tfrac{1}{2}(A-c)(a^2 - a'^2)];$$

wenn wir für C den Werth (12) benutzen, so erhalten wir auf diese Weise [§ 649 (2)]

$$z = \frac{F}{2\pi A}\left[\tfrac{1}{4}\left(-\log r + 1 + \frac{a^2\log a - a'^2\log a'}{a^2 - a'^2} + \tfrac{1}{2}\frac{A-c}{A+c}\right) r^2 + \tfrac{1}{2}\frac{A+c}{A-c}\,\frac{a^2 a'^2 \log\frac{a}{a'}}{a^2 - a'^2}\log r + C'''\right].$$

Wenn wir den Factor von r^2 auf eine passendere Form bringen und C''' so wählen, dass die Deflexion von der Fläche des inneren Randes aus gerechnet werde, so folgt endlich

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} z = \frac{F}{2\pi A}\Bigg\{ & \tfrac{1}{4}\left(-\log\frac{r}{a'} + \frac{a^2}{a^2 - a'^2}\log\frac{a}{a'} + \tfrac{1}{2}\frac{3A+c}{A+c}\right) r^2 \\ & + \tfrac{1}{2}\frac{A+c}{A-c}\,\frac{a^2 a'^2\log\frac{a}{a'}}{a^2 - a'^2}\log\frac{r}{a'} - \tfrac{1}{4}\frac{a^2 a'^2}{a^2 - a'^2}\log\frac{a}{a'} - \tfrac{1}{8}\frac{3A+c}{A+c}a'^2\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Um zu zeigen, wie sich die elastische Reaction durch die Breite des Ringes vertheilt, schliessen wir hieraus nach § 649 (6)

$$(14) \quad G = \frac{F}{2\pi A} \cdot {}^1\!/_2 (A + c) \left(\frac{a^2}{a^2 - a'^2} \log \frac{a}{a'} - \log \frac{r}{a'} - \frac{a^2 a'^2}{a^2 - a'^2} \log \frac{a}{a'} \frac{1}{r^2} \right),$$

welcher Ausdruck, wie es der Fall sein muss, für $r = a'$ und für $r = a$ verschwindet. Weiter ergibt sich nach § 649 (8)

$$(15) \qquad \zeta = \frac{F}{2\pi r}$$

(dies liefert das offenbar richtige Resultat, dass die Gesammtgrösse der Querkraft in jedem concentrischen Kreise des Ringes gleich F ist).

653. Biegung eines flachen Ringes, auf dessen ganze Fläche eine Last symmetrisch vertheilt ist. — Die Aufgabe des § 652, ausgedehnt auf den Fall, in welchem die Last nicht auf einen Rand beschränkt, sondern auf irgend eine symmetrische Weise über die Oberfläche des Ringes vertheilt ist, wird algebraisch ganz ebenso gelöst, wenn die von Z abhängigen und in den verschiedenen Ausdrücken des § 649 dargestellten Grössen durch Integration gefunden sind. Wir haben aber eine wichtige Bemerkung zu machen: In Fällen, in denen es mehr als einer continuirlichen algebraischen oder transcendenten Function bedürfte, um die Vertheilung der Last über den ganzen Theil der betrachteten Platte auszudrücken, wird viel unnütze Arbeit dadurch vermieden, dass man in diesen Integrationen Z als eine discontinuirliche Function behandelt. Wenn man diesen Plan nicht befolgt, so hat man die Ausdrücke für z, $\frac{dz}{dr}$, G und ζ für jeden ringförmigen Theil der Platte, für welchen Z continuirlich ist, einzeln herzuleiten und ihre Werthe zu beiden Seiten jedes Kreises, der zwei solche Theile trennt, gleich zu setzen. Wären also i ringförmige Theile vorhanden, die in dieser Weise einzeln behandelt werden müssten, so würden $4i$ willkürliche Constanten auftreten, welche man durch die $4(i-1)$ so erhaltenen Gleichungen und die 4 Gleichungen zu bestimmen hätte, welche ausdrücken, dass G in dem äusseren und dem inneren kreisförmigen Rand die für die einwirkenden Biegungskräftepaare vorgeschriebenen Werthe (die Null oder von Null verschieden sind) hat, und dass jeder der Grössen z, ζ in dem einen oder anderen dieser Kreise ein vorgeschriebener Werth zukommt. Die bei Anwendung der oben erwähnten geschickteren Methode in Folge der Discontinuität von Z erforderliche Mehrarbeit beschränkt sich auf die successiven Integrationen, wobei die willkürlichen Constanten,

deren es jetzt nur vier gibt, durch die Bedingungen für die beiden äussersten Ränder bestimmt werden.

Beispiel. — Ein kreisrunder Tisch (von isotropischem Material) mit einer kreisrunden concentrischen Oeffnung wird von seinem äusseren oder inneren Rande getragen, welcher einfach auf einer horizontalen kreisförmigen Stütze ruht, und ist mit einer gleichförmig über einen ringförmigen Theil seiner Oberfläche vertheilten Masse belastet; dieser Ring erstreckt sich von dem inneren Rande des Tisches nach aussen zu bis zu einem concentrischen Kreise von einem gegebenen Radius c. Man soll die Biegung bestimmen.

Wir nehmen erstens an, die Oeffnung des Tisches sei ausgefüllt, und derselbe bilde eine vom äusseren Rande bis zum Centrum gleichförmige Platte. Wird dann der ganze Kreis vom Radius c belastet, so dass auf die Einheit seiner Fläche eine constante Last w kommt, so erhalten wir

	$Z=$	$\int r Z dr =$	$\int \frac{dr}{r}\int r Z dr =$	$\int r dr \int \frac{dr}{r}\int r Z dr =$	$\int \frac{dr}{r}\int r dr \int \frac{dr}{r}\int r Z dr =$
wenn $r=0$	w	0	0	0	0
„ $<c$	w	$\frac{1}{2} w r^2$	$\frac{1}{4} w r^2$	$\frac{1}{16} w r^4$	$\frac{1}{64} w r^4$
„ $>c$	0	$\frac{1}{2} w c^2$	$\frac{w c^2}{4}\left(2 \log \frac{r}{c} + 1\right)$	$\frac{w c^2}{16}\left(4 r^2 \log \frac{r}{c} + c^2\right)$	$\frac{w c^2}{16}\left(2 r^2 \log \frac{r}{c} - r^2 + c^2 \log \frac{r}{c} + \frac{5}{4} c^2\right)$
	I.	II.	III.	IV.	V.

Das Resultat V., in (2) eingesetzt, gibt die allgemeine Lösung, und die Resultate IV., III. und II., in (6) und (8) eingesetzt, liefern die entsprechenden Ausdrücke für G und ζ. Wenn wir zunächst voraussetzen, der so erhaltene Ausdruck von G habe für jeden der beiden Werthe r', r'' von r einen beliebig gegebenen Werth, und ζ habe für einen dieser Werthe von r einen beliebig gegebenen Werth, so erhalten wir drei einfache algebraische Gleichungen zur Bestimmung von C, C', C'' und lösen ein Problem, welches allgemeiner als das vorgelegte ist; zu letzterem gelangen wir, wenn wir die vorgeschriebenen Werthe von G und ζ Null machen. Ein auffallendes Beispiel für die Macht, welche die mathematische Analysis durch Einführung discontinuirlicher Functionen erlangt, ist die Anwendbarkeit des Resultats nicht bloss auf den betrachteten Fall, in welchem c zwischen r' und r'' liegt, sondern auch auf Fälle, in denen c kleiner als jede dieser Grössen (dann kommen wir wieder zu dem im vorhergehenden Paragraphen behandelten Fall), oder grösser als jede derselben ist (dann erhalten wir eine Lösung, die wir directer finden können, wenn wir für alle Werthe von r $Z=w$ annehmen).

Wenn die Platte in Wirklichkeit bis zu ihrem Mittelpunkt continuirlich und in der ganzen Fläche des Kreises vom Radius c gleichmässig

belastet ist, so muss $C = 0$ und $C'' = 0$ sein, damit die Werthe von ζ und G im Mittelpunkt nicht unendlich gross werden; die Gleichung $G = 0$ für die äussere Grenze der Scheibe liefert dann sofort C' und vervollständigt dadurch die Lösung. Wenn wir endlich voraussetzen, c sei nicht kleiner als der Radius der Scheibe, so erhalten wir die Lösung für eine gleichförmige Kreisscheibe, welche an ihrem Rande gleichmässig unterstützt und nur durch ihr eigenes Gewicht deformirt wird.

654. Reduction des allgemeinen Problems auf den Fall, in welchem die Platte ganz unbelastet ist. — Betrachten wir jetzt das allgemeine Problem: — Ueber eine Platte von beliebiger Form ist in irgend einer Weise eine Last vertheilt, und am Rande sind beliebige Kräfte angebracht. Dabei ist natürlich die Bedingung erfüllt, dass alle von aussen einwirkenden Kräfte, wenn die Data sich nur auf solche beziehen, ein System ausmachen, das sich im Gleichgewicht befindet. Man soll die Biegung der Platte bestimmen — so können wir dasselbe unmittelbar auf das einfachere Problem reduciren, in welchem keine Last über die Fläche vertheilt ist, sondern nur am Rande beliebige Kräfte wirken. Wir wollen den Gang der mathematischen Behandlung bloss skizziren.

Zunächst lässt sich, wie für einen entsprechenden Ausdruck für drei unabhängig Veränderliche in § 491 (c), leicht beweisen, dass

$$(1) \qquad \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)\int\!\!\int \varrho' \log D \, dx' \, dy' = 2\pi\varrho$$

ist; darin ist ϱ' eine beliebige Function zweier unabhängig Veränderlichen x', y';

ϱ ist dieselbe Function von x, y;

D bezeichnet $\sqrt{\{(x-x')^2 + (y-y')^2\}}$,

und $\int\!\int$ bezeichnet die Integration über eine Fläche, welche alle Werthe von x', y' enthält, für die ϱ' nicht verschwindet. Folglich ist

$$(2) \qquad \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)^2 u = Z,$$

wenn

$$(3) \qquad u = \frac{1}{4\pi^2}\int\!\!\int dx' \, dy' \log D \int\!\!\int dx'' \, dy'' \, Z'' \log D'$$

ist, wo $D' = \sqrt{\{(x''-x')^2 + (y''-y')^2\}}$ ist und Z'', Z die Werthe einer beliebigen Function zweier unabhängig Veränderlichen für (x'', y''), (x, y) bezeichnen. Diese Function möge die Grösse der Last für die Flächeneinheit bezeichnen und für alle nicht in der Platte liegenden Werthe der Coordinaten verschwinden; auch nehmen wir, um der Mühe, die Grenzen bestimmen zu müssen, aus dem Wege zu gehen, an, alle Integrale erstreckten sich von $-\infty$ bis $+\infty$. Dann ist $z = u$ eine Lösung unserer Gleichung (2); folglich muss $z - u$ derselben Gleichung

genügen, wenn das zweite Glied weggelassen wird; oder, wenn $\mathfrak{z}$ eine allgemeine Lösung von

$$(4)\qquad \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)^2 \mathfrak{z} = 0$$

bezeichnet, so ist

$$(5)\qquad z = u + \mathfrak{z}$$

die allgemeine Lösung von (2). Die Grenzbedingungen für $\mathfrak{z}$ erhält man natürlich, wenn man $u + \mathfrak{z}$ für z in die direct vorgeschriebenen Grenzgleichungen substituirt, welches dieselben auch sein mögen.

655. Das Problem ist bisher allgemein nur für einen kreisförmigen Ring gelöst. — Es ist den Mathematikern bis jetzt nicht gelungen, dies Problem mit völliger Allgemeinheit für eine andere Form der Platte, als für einen kreisförmigen Ring (oder eine kreisförmige Scheibe mit einer concentrischen kreisförmigen Oeffnung) zu lösen. Nachdem wir eine ausführliche, der Beschränkung einer symmetrischen Vertheilung der Last unterworfene Lösung des Problems für diesen Fall gegeben haben (§§ 640, 653), wollen wir die Erweiterung bloss andeuten, welche die Analysis erfahren muss, um für jede mögliche nicht symmetrische Vertheilung der Biegung zu passen. Dieselbe Untersuchung wird uns unter viel einfacheren Bedingungen noch öfters begegnen und in Betreff einiger Punkte sorgfältig detaillirt ausgeführt werden, wenn wir mit wichtigen practischen Problemen beschäftigt sein werden, welche die elektrische Wirkung, die Bewegung einer Flüssigkeit und die Elektricitäts- und Wärmeleitung durch cylindrische Räume betreffen.

Wir nehmen den Mittelpunkt der kreisförmigen Grenzränder als Anfangspunkt für Polarcoordinaten an, und es sei

$$x = r\cos\theta,\quad y = \sin\theta.$$

Dann folgt leicht durch Transformation

$$(6)\qquad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2}+\frac{d^2\mathfrak{z}}{dy^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mathfrak{z}}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\theta^2}.$$

Setzen wir

$$(7)\qquad \log r = \vartheta,\quad \text{oder}\quad r = e^{\vartheta},$$

so geht dies über in

$$(8)\qquad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2}+\frac{d^2\mathfrak{z}}{dy^2} = e^{-2\vartheta}\left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\vartheta^2}+\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\theta^2}\right).$$

Wird also wie früher $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}$ mit ∇^2 bezeichnet, so ist

$$(9)\qquad \nabla^4\mathfrak{z} = e^{-2\vartheta}\left(\frac{d^2}{d\vartheta^2}+\frac{d^2}{d\theta^2}\right)e^{-2\vartheta}\left(\frac{d^2}{d\vartheta^2}+\frac{d^2}{d\theta^2}\right)\mathfrak{z}.$$

Setzt man dies gleich Null, so erhält man

$$\text{(10)} \qquad \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d \vartheta^2} + \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d \theta^2} = e^{2\vartheta} v,$$

wenn v irgend eine Lösung von

$$\text{(11)} \qquad \frac{d^2 v}{d \vartheta^2} + \frac{d^2 v}{d \theta^2} = 0$$

bezeichnet. Wenn wir uns mit den elektrischen und den übrigen oben erwähnten Problemen beschäftigen werden, wird sich zeigen, dass eine für die vorliegende wie für alle Aufgaben, welche den Ausdruck willkürlicher Functionen von θ für besondere Werthe von ϑ enthalten, passende allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$\text{(12)} \qquad v = \sum_0^\infty \{ (A_i \cos i\,\theta + B_i \sin i\,\theta) e^{i\vartheta} + (\mathfrak{A}_i \cos i\,\theta + \mathfrak{B}_i \sin i\,\theta) e^{-i\vartheta} \}$$

ist, wo A_i, B_i, $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ Constanten sind. Dass dies eine Lösung ist, lässt sich augenblicklich durch Differentiation bewahrheiten. Daraus ergibt sich leicht (und das Resultat lässt sich natürlich auch durch Differentiation bewahrheiten)

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{z} = \sum\limits_{i=0}^{i=\infty} \left\{ \dfrac{1}{(i+2)^2 - i^2} (A_i \cos i\theta + B_i \sin i\theta)\, e^{(i+2)\vartheta} \right\} \\ + \sum\limits_{i=2}^{i=\infty} \left\{ \dfrac{-1}{i^2 - (i-2)^2} (\mathfrak{A}_i \cos i\theta + \mathfrak{B}_i \sin i\theta)\, e^{-(i-2)\vartheta} \right\} \\ - \tfrac{1}{2} (\mathfrak{A}_1 \cos\theta + \mathfrak{B}_1 \sin\theta)\, \vartheta e^{\vartheta} + v', \end{cases}$$

wo v' irgend eine Lösung von (11) ist, die man zweckmässig als durch (12) gegeben annehmen kann, wenn darin die accentuirten Buchstaben A'_i u. s. w. zur Bezeichnung von vier neuen Constanten gebraucht werden. Wenn nun die willkürlichen periodischen Functionen von θ mit der Periode 2π, welche als die Werthe einer Verschiebung, oder einer Schiebungskraft, oder eines Kräftepaars für den äusseren und inneren kreisförmigen Rand gegeben sind, durch den Fourier'schen Satz [§ 77 (14)] in einfachen harmonischen Reihen ausgedrückt werden, so liefern die beiden Gleichungen [§ 645 (5)] für jeden Rand, wenn man sie einzeln auf die Coefficienten von $\cos i\,\theta$ und $\sin i\theta$ in den so erhaltenen Ausdrücken anwendet, acht Gleichungen zur Bestimmung der acht Constanten A_i, $\mathfrak{A}_i$, B_i, $\mathfrak{B}_i$, A'_i, $\mathfrak{A}'_i$, B'_i, $\mathfrak{B}'_i$.

656. Rechteckige Platte an abwechselnden Ecken belastet und unterstützt. — Obgleich das Problem, willkürliche Grenzbedingungen zu erfüllen, für rechteckige Platten noch nicht gelöst worden ist, so gibt es doch einen besonderen Fall desselben, welcher besondere Aufmerksamkeit verdient, insofern er nicht bloss an sich interessant und für praktische Anwendungen wichtig ist, sondern auch einen der schwierigsten Punkte [§§ 646, 648] der allgemeinen Theorie in eigenthümlicher Weise erläutert. An den vier Ecken einer

rechtwinkligen Platte greifen vier gleiche parallele Kräfte an, die senkrecht zur Platte wirken und einander das Gleichgewicht halten.

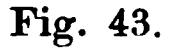
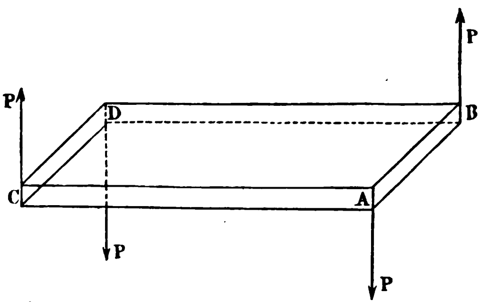


Fig. 43.



Dadurch wird die Platte so deformirt, dass sie überall eine gleichförmige anticlastische Krümmung hat; die Schnitte, in denen keine Biegung erfolgt, sind den Seiten parallel, und folglich liegen die Schnitte, welchen gleiche und entgegengesetzte Maxima der Krümmung entsprechen, in den Normalebenen, welche mit den Seiten einen Winkel von 45° einschliessen. Dies folgt unmittelbar aus § 648, wenn man voraussetzt, die Ecken seien, wenn auch noch so wenig, abgerundet, und die Kräfte über sie hin zerstreut.

Man erhält dies Resultat auch auf folgende Weise: — Wir denken uns im Rande AB eine unendliche Anzahl Normallinien gezogen und in jeder derselben ein Paar entgegengesetzter Kräfte, von denen jede gleich $\frac{1}{2} P$ ist, angebracht. Dadurch kann der Zustand der Platte nicht gestört werden. Diese Kräfte machen mit den Hälften der in den Ecken A und B nach entgegengesetzten Richtungen hin wirkenden einzelnen Kräfte P ein über den ganzen Rand AB verbreitetes Kräftepaar aus, dessen Axen senkrecht zur Ebene des Randes sind, und dessen Moment für die Einheit der Länge $\frac{1}{2} P$ beträgt. Ebenso machen die zweiten Hälften der Kräfte P in den Ecken A, B mit den Hälften derjenigen in C und D und den über CA und DB vertheilten einander das Gleichgewicht haltenden Kräften Kräftepaare aus, die über die Ränder CA und DB verbreitet sind. Endlich bilden die zweiten Hälften der Kräfte in den Ecken C und D im Verein mit den auf CD vertheilten neuen Kräften ein über CD verbreitetes Kräftepaar. Das Moment jedes dieser Kräftepaare beträgt für die Längeneinheit des Randes, über den es verbreitet ist, $\frac{1}{2} P$. Ihre Richtungen stehen in der in § 638 (2) angegebenen Beziehung zu einander; wenn man daher diese Kräftepaare sämmtlich vereinigt, so verursachen sie eine anticlastische Reaction von der Grösse $\Omega = \frac{1}{2} P$. Das Ergebniss ist folglich (§ 642) eine gleichförmige anticlastische Deformation vom Betrage $\frac{1}{2} \frac{P}{k}$, deren Axen gegen die Ränder die Neigung 45° haben, d. h. (§ 639) eine Biegung, bei welcher die

grössten Krümmungen $1/2 \frac{P}{k}$ betragen und nach verschiedenen Seiten der Tangentialebene hin in den Normalschnitten von den angegebenen Neigungen liegen.

657. Uebergang zu Biegungen von endlicher Grösse. — Der Uebergang von dieser Lösung, welche sich auf die Voraussetzung stützt, dass die grösste Deflexion nur ein kleiner Bruchtheil der Dicke der Platte ist, zur Lösung für grössere Biegungen, bei welchen Ecktheile nahezu in abwickelbare (thatsächlich cylindrische) Flächen umgebogen werden und ein viereckiger Centraltheil sich nur unendlich wenig von der Form einer Ebene entfernt, und ebenso der Uebergang von hier zu dem äussersten Falle eines unendlich dünnen vollkommen biegsamen Rechtecks von unausdehnbarem Stoffe führen zu Problemen, die zu den merkwürdigsten der physikalischen Mathematik gehören. Den erwähnten äussersten Fall kann man leicht darstellen und beobachten, wenn man ein sorgfältig geschnittenes (§ 145) Rechteck von Papier nimmt und es an feinen Fäden aufhängt, die an zwei gegenüberstehenden Ecken befestigt sind und parallel gehalten werden, während von den beiden anderen Ecken zwei gleiche Gewichte an Fäden herabhängen.

658. Elastische Reaction oder Zwang von Körpern. — Die in §§ 154 bis 190 gegebenen Definitionen und Untersuchungen über Deformation der Volumenelemente bilden eine kinematische Einleitung zur Theorie der elastischen festen Körper. Wir müssen jetzt, wo wir die elementare Dynamik des Gegenstandes beginnen, die Kräfte betrachten, welche im Innern eines festen Körpers ins Leben gerufen werden, wenn man denselben einer Deformation unterwirft.

[Um diese Kräfte zu bezeichnen, wollen wir im Deutschen statt des von Rankine (Cambridge and Dublin Mathematical Journal 1850) vorgeschlagenen und von den englischen Verfassern adoptirten Wortes „stress" den Ausdruck „elastische Reaction oder Gegenwirkung" (nämlich gegen die Formveränderung) brauchen, zum Unterschied von dem früher (§ 154) eingeführten Ausdruck „Deformation" (engl. strain), welcher den bloss geometrischen Begriff einer Volumen- oder Formänderung enthält.

Denselben Ausdruck „stress" werden wir zuweilen auch durch „Zwang" wiedergeben, wenn es sich nämlich um die Bezeichnung nicht der durch die Deformation in einem Körper hervorgerufenen Kräfte, sondern des Zustandes handelt, in welchen der Körper durch das Dasein oder Fehlen dieser Kräfte versetzt ist. Demge-

mäss werden wir einen Körper, jenachdem er einen elastischen Widerstand leistet oder nicht, gezwängt (stressed) oder ungezwängt (unstressed) nennen.] (Die Uebersetzer.)

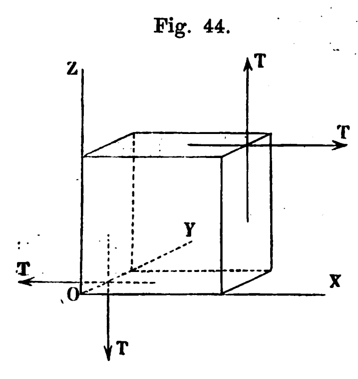
659. Homogener Zwang. — Wenn in irgend einem Theile eines unter der Einwirkung von Kräften stehenden Körpers die Wechselwirkung zwischen den Massentheilen, die zu beiden Seiten eines beliebigen ebenen Flächenstücks liegen, gleich und parallel der Wechselwirkung zwischen den zu beiden Seiten jedes congruenten und parallelen ebenen Flächenstücks liegenden Massentheilen ist, so nennen wir die elastische Reaction in jenem Körpertheil homogen. Mit anderen Worten: der von einer Masse erlittene Zwang ist innerhalb eines Raumes homogen, wenn alle congruenten und ähnlich gelegenen Massentheile innerhalb dieses Raumes in demselben Sinne und mit derselben Intensität von Kräften beeinflusst werden.

660. Vertheilung der Kraft durch feste elastische Körper. — Um die Kraftvertheilung über die Oberfläche irgend eines Theils einer homogen gezwängten Masse finden zu können, müssen wir die Richtung und die für die Flächeneinheit genommene Grösse der Kraft kennen, welche durch ein den Theil in beliebiger Richtung durchschneidendes ebenes Flächenstück wirkt. Wenn wir diese Elemente für drei beliebige in drei verschiedenen Richtungen liegende Ebenen kennen, so können wir sie für eine Ebene von einer beliebigen anderen Richtung bestimmen. Das sieht man sofort, wenn man betrachtet, was für das Gleichgewicht eines Tetraëders der Substanz erforderlich ist. Die Resultante der auf eine seiner Seitenflächen wirkenden Kräfte muss gleich und entgegengesetzt sein der Resultante der Kräfte, welche auf die drei anderen Seiten wirken, und diese letztere Resultante ist bekannt, wenn die Seitenflächen den drei Ebenen parallel sind, für deren jede die Kraft gegeben ist.

661. Elemente, welche eine elastische Reaction bestimmen. — Danach ist die elastische Reaction in einem homogen gezwängten Körper vollständig ausgedrückt, wenn die Richtung und die für die Flächeneinheit genommene Grösse der Kraft gegeben ist, die auf jede von drei verschiedenen Ebenen wirkt. In der analytischen Behandlung des Gegenstandes ist es im Allgemeinen zweckmässig, diese Coordinatenebenen rechtwinklig zu einander anzunehmen. Wir würden aber sofort in einen Irrthum gerathen, wenn wir nicht bemerkten, dass die hier angegebene Bestimmung der Reaction nicht neun, sondern thatsächlich nur sechs unabhängige Elemente enthält. Denn wenn jede der einander das Gleichgewicht haltenden Kräfte, welche auf die sechs Flächen eines Würfels

wirken, in drei den drei Kanten OX, OY, OZ parallele Componenten zerlegt wird, so erhalten wir im Ganzen 18 Kräfte. Senkrecht zu jedem Paar gegenüberliegender Flächen wirken zwei gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte, die einander folglich das Gleichgewicht halten. Die zwölf übrig bleibenden tangentialen Componenten machen drei Paar Kräftepaare aus, deren Axen die Richtung der drei Kanten haben, und von denen je zwei einzeln im Gleichgewicht sein müssen. Die Fig. 44 stellt die beiden einander das Gleichgewicht haltenden Kräftepaare dar, welche OY zur Axe haben. Aus der Betrachtung derselben schliessen wir, dass die auf die Flächen (zy) parallel OZ wirkenden Kräfte gleich den auf die Flächen (yx) parallel OX wirkenden Kräften sind. Auf ähnliche Weise erkennt man, dass die auf die Flächen (yx) parallel OY wirkenden Kräfte gleich den auf die Flächen (xz) parallel OZ wirkenden, und endlich dass die auf (xz) parallel OX wirkenden Kräfte gleich den auf (zy) parallel OY wirkenden sind.

Fig. 44.



662. Wenn also drei beliebige zu einander senkrechte Coordinatenebenen gewählt sind, so können wir, um eine elastische Gegenwirkung auszudrücken, folgende sechs Elemente nehmen: die normalen Componenten P, Q, R der auf diese Ebenen wirkenden Kräfte und die drei beziehungsweise zu OX, OY, OZ senkrechten tangentialen Componenten S, T, U der Kräfte, welche auf die beiden Ebenen wirken, welche beziehungsweise in OX, OY, OZ zusammentreffen; dabei wird jede der sechs Kräfte für die Flächeneinheit genommen. Eine normale Componente wird als positiv gerechnet werden, wenn sie die zu beiden Seiten ihrer Ebene liegenden Substanztheile zu trennen strebt. P, Q, R werden zuweilen einfache Longitudinalreactionen, S, T, U einfache Schiebungsreactionen genannt.

Wir wollen jetzt aus diesen Daten auf die in § 660 angegebene Weise die Kraft bestimmen, welche auf irgend eine durch die Richtungscosinus l, m, n ihrer Normale bestimmte Ebene wirkt. Eine solche Ebene schneide OX, OY, OZ in den drei Punkten X, Y, Z. Wenn dann die Fläche XYZ für einen Augenblick mit A bezeichnet wird, so sind die Projectionen von A auf die Coordinatenebenen, nämlich die

Flächen YOZ, ZOX, XOY, beziehungsweise gleich Al, Am, An. Wir erhalten folglich für das Gleichgewicht des von jenen vier Dreiecken begrenzten materiellen Tetraeders, wenn F, G, H die Componenten der Kraft bezeichnen, welche auf die Flächeneinheit des ersten Dreiecks XYZ, wirkt,

$$F.A = P.lA + U.mA + T.nA$$

und zwei symmetrische Gleichungen für die OY und OZ parallelen Componenten. Durch Division mit A ergibt sich daher

$$(1) \qquad \begin{cases} F = Pl + Um + Tn \\ G = Ul + Qm + Sn \\ H = Tl + Sm + Rn. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke stehen zu dem Ellipsoid

$$(2) \qquad Px^2 + Qy^2 + Rz^2 + 2\,(Syz + Tzx + Uxy) = 1$$

in der bekannten Relation, nach welcher, wenn wir

$$x = lr, \quad y = mr, \quad z = nr$$

nehmen, und wenn λ, μ, ν die Richtungscosinus und p die Länge des Lothes vom Centrum auf die im Punkte (x, y, z) an die Oberfläche des Ellipsoides gelegte Tangentialebene bezeichnen,

$$F = \frac{\lambda}{pr}, \quad G = \frac{\mu}{pr}, \quad H = \frac{\nu}{pr}$$

ist. Wir schliessen daraus Folgendes: —

663. Bestimmung der elastischen Reaction mittels einer Fläche zweiten Grades. — Für jede vollständig bestimmte elastische Reaction in einem festen Körper lässt sich stets eine Fläche zweiten Grades ermitteln, welche den Zwang auf folgende Weise graphisch darstellt: —

Um die Richtung und die für die Flächeneinheit genommene Grösse der Kraft zu finden, welche durch irgend eine Ebene in dem festen Körper wirkt, ziehe man senkrecht zu dieser Ebene eine Linie vom Mittelpunkt der Fläche zweiten Grades bis an ihre Oberfläche. Die gesuchte Kraft ist dann, was ihre Grösse betrifft, gleich dem reciproken Werth des Products aus der Länge dieser Linie in die Senkrechte vom Mittelpunkt auf die durch den Schnittpunkt gelegte Tangentialebene, und, was ihre Richtung betrifft, senkrecht zur letzteren Ebene.

664. Normalebenen und Axen einer elastischen Reaction. — Daraus geht hervor, dass es für jeden beliebigen Reactionszustand drei bestimmte zu einander senkrechte Ebenen von der Beschaffenheit gibt, dass die im festen Körper durch jede derselben wirkende Kraft genau senkrecht zu ihr ist. Diese Ebenen heissen

die Haupt- oder Normalebenen der Reaction, die auf sie wirkenden für die Flächeneinheit genommenen Kräfte die Haupt- oder Normalzugkräfte und die zu ihnen senkrechten Linien die Haupt- oder Normalaxen oder einfach die Axen der Reaction. Die drei halben Hauptaxen der Fläche zweiten Grades sind gleich den reciproken Werthen der Quadratwurzeln aus den Normalzugkräften. Wenn jedoch in irgend einem Falle jede der drei Normalzugkräfte negativ ist, so empfiehlt es sich, dieselben als positive Druckkräfte anzusehen; die reciproken Werthe der Quadratwurzeln dieser Druckkräfte sind dann die Halbaxen eines reellen Reactionsellipsoids, welches die Vertheilung der Kraft in der oben dargelegten Weise darstellt, wenn man die Zugkräfte überall durch Druckkräfte ersetzt.

665. Varietäten der Reactionsfläche zweiten Grades. — Wenn die drei normalen Zugkräfte sämmtlich dasselbe Zeichen haben, so ist die Reactionsfläche zweiten Grades ein Ellipsoid; sind im Besonderen zwei jener Kräfte oder alle drei einander gleich, so ist die Fläche ein Rotationsellipsoid oder eine Kugel. Wenn eine jener drei Kräfte negativ ist, während die beiden anderen positiv sind, so ist die Fläche ein einflächiges Hyperboloid. Ist dagegen eine der normalen Zugkräfte positiv, während die beiden anderen negativ sind, so ist die Fläche ein zweiflächiges Hyperboloid.

666. Wenn eine der drei Hauptzugkräfte verschwindet, während die beiden anderen von endlicher Grösse sind, so wird die Reactionsfläche zweiten Grades ein Cylinder, der einen Kreis, eine Ellipse oder eine Hyperbel zur Basis hat, je nachdem die beiden von Null verschiedenen Zugkräfte gleich, ungleich und mit demselben Vorzeichen versehen, oder ungleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind. Wenn von den drei Hauptzugkräften zwei verschwinden, so degenerirt die Fläche in zwei Ebenen, und die Reaction heisst in diesem Falle (§ 662) eine einfache longitudinale Reaction. Die oben (§ 664) angegebene Theorie der Hauptebenen und Normalzugkräfte lässt sich dann in folgenden Satz zusammenfassen: Jede beliebige Reaction kann angesehen werden als aus drei einfachen longitudinalen Reactionen in drei zu einander senkrechten Richtungen bestehend. In allen diesen Fällen bieten die geometrischen Interpretationen keine Schwierigkeit dar.

667. Zusammensetzung elastischer Reactionen. — Die Zusammensetzung von Reactionen geschieht natürlich dadurch, dass man die componirenden Zugkräfte auf folgende Weise addirt: — Wenn $(P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1, U_1)$, $(P_2, Q_2, R_2, S_2, T_2, U_2)$, u. s. w.

nach § 662 eine beliebig gegebene Anzahl von Reactionen bezeichnen, die gleichzeitig in einer Substanz wirken, so ist ihre Gesammtwirkung dieselbe, wie die einer einzigen Reaction, welche, in entsprechender Form ausgedrückt, (ΣP, ΣQ, ΣR, ΣS, ΣT, ΣU) ist.

668. Vergleich der Gesetze der Deformation und der Reaction. — Jeder der jetzt in Betreff der elastischen Reactionen ausgesprochenen Sätze (§§ 659, 667) lässt sich auf unendlich kleine Deformationen anwenden, wenn man für eine zu irgend einer Ebene senkrechte, für die Einheit der Fläche genommene Zugkraft eine für die Längeneinheit genommene Elongation in den Linien der Zugkraft und für die einer beliebigen Richtung parallele Hälfte der tangentialen Zugkraft eine auf die in § 175 dargelegte Weise gerechnete Schiebung in derselben Richtung substituirt. Es wird eine nützliche Uebung für den Leser sein, diese Uebertragung für jeden einzelnen jener Sätze eingehend zu studiren und zu rechtfertigen, indem er die Resultate der §§ 171, 172, 173, 174, 175, 185 in geeigneter Weise modificirt, so dass sie für unendlich kleine Deformationen passen. Wir bemerken, dass die nach der Regel des § 663 gebildete Fläche zweiten Grades, welche eine der in §§ 665, 666 erwähnten Varietäten sein kann, nicht dasselbe wie das Deformationsellipsoid des § 160 ist, welches seiner Natur nach immer ein Ellipsoid ist und für eine unendlich kleine Deformation unendlich wenig von einer Kugel abweicht.

Der Vergleich des § 172 mit dem (§ 661) in Betreff der tangentialen Zugkräfte erhaltenen Resultate ist besonders interessant und wichtig.

669. Die folgende tabellarische Zusammenstellung der einander entsprechenden Elemente, welche für rechtwinklige Coordinaten eine Deformation und eine elastische Reaction auf die in den vorhergehenden Paragraphen dargelegte Weise bestimmen, wird das Verständniss der Sache befördern: —

Componenten der		Ebenen, deren relative Bewegung, oder durch welche die Kraft gerechnet wird.	Richtung der relativen Bewegung oder der Kraft.
Deformation.	Reaction.		
e	P	yz	x
f	Q	zx	y
g	R	xy	z
a	S	$\begin{cases} yx \\ zx \end{cases}$	y z
b	T	$\begin{cases} zy \\ xy \end{cases}$	z x
c	U	$\begin{cases} xz \\ yz \end{cases}$	x y

670. Die gegen die Reaction eines nachgiebigen Körpers in seinem Innern geleistete Arbeit. — Wenn ein Würfel, dessen Volumen gleich Eins ist, unter irgend einer Reaction (P, Q, R, S, T, U) die unendlich kleine einfache longitudinale Deformation e allein erfährt, so ist die auf ihn ausgeübte Arbeit Pe; denn von den OX parallelen Kräftecomponenten P, U, T leisten bei dieser Deformation U und T keine Arbeit. Ebenso sind Qf, Rg die Ausdrücke für die Arbeit, wenn unter der Einwirkung derselben elastischen Reaction beziehungsweise die einfachen longitudinalen Deformationen f oder g erlitten werden. Wenn der Würfel weiter eine einfache Schiebung a erfährt, so sehen wir, dass die geleistete Arbeit Sa ist, mag die Schiebung nun (§ 172) als ein unendlich kleines Gleiten der Ebenen yx parallel y oder der Ebenen zx parallel z angesehen werden; die geleistete Arbeit ist Tb, wenn die Deformation einfach eine Schiebung b ist, welche entweder in den Ebenen zy parallel OZ oder in den Ebenen xy parallel OX erfolgt; die Arbeit ist endlich Uc, wenn die Deformation eine Schiebung c der Ebenen xz oder yz ist, welche beziehungsweise parallel OX oder OY erfolgt. Folglich ist die Gesammtarbeit, welche die Reaction (P, Q, R, S, T, U) auf die würfelförmige Masseneinheit ausübt, indem sie die Deformation (e, f, g, a, b, c) hervorbringt,

$$(3) \qquad Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc.$$

Es ist zu bemerken, dass die Wirkung einer solchen elastischen Reaction, insofern diese ein System von Kräften ist, welche, wenn der angegriffene Massentheil starr ist, einander das Gleichgewicht halten,

keine Arbeit leisten kann (§ 551), wenn sich die Masse auf irgend eine Weise bewegt, ohne eine Formänderung zu erfahren. Daher kann keine Verschiebung oder Rotation des Würfels, welche zugleich mit der Deformation erfolgt, die eben gefundene Grösse der geleisteten Arbeit verändern.

Wenn jede Kante des Würfels nicht die Länge Eins, sondern eine beliebige Länge p hat, so ist jede Kraft p^2 mal, jede relative Verschiebung p mal, folglich die verrichtete Arbeit p^3 mal so gross, als oben gerechnet wurde. Mithin wird auf einen Körper von irgend einer Form und vom Cubikinhalt C, welcher überall einem gleichmässigen Zwange (P, Q, R, S, T, U) unterworfen ist, während er überall gleichmässig eine Deformation (e, f, g, a, b, c) erfährt, eine Arbeit von der Grösse

$$(4) \qquad (Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc)\, C$$

ausgeübt.

Die Arbeitsleistung längs der Oberfläche eines nachgiebigen Körpers. — Man beachte, dass dies gleich der Arbeit sein muss, welche die von aussen einwirkenden Kräfte auf die Grenzfläche des Körpers ausüben. Denn die auf irgend einen Massentheil innerhalb des Körpers ausgeübte Arbeit ist einfach die Arbeit, welche die den Theil ringsherum berührende Masse auf seine Oberfläche leistet, da keine Kraft von aussen her auf die innere Substanz eine Fernwirkung äussert. Wenn wir uns also den ganzen Körper in eine beliebige Anzahl Theile zerlegt denken, von denen jeder eine beliebige Form hat, so reducirt sich die Summe der auf alle diese Theile ausgeübten Arbeiten auf die Gesammtarbeit, welche die von aussen auf die ganze äussere Oberfläche des Körpers einwirkenden Kräfte leisten; denn es verschwinden die gleichen positiven und negativen Grössen, welche die Theile der Arbeit ausdrücken, die auf jedes Theilchen von den ringsherum liegenden Theilen ausgeübt und von den letzteren Theilen bei dieser Wirkung verbraucht werden.

Die analytische Bewahrheitung dieses Ergebnisses ist lehrreich für die Syntax der mathematischen Sprache, durch welche die Theorie der Ueberleitung der Kraft mathematisch ausgedrückt wird. Es seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes innerhalb des Körpers, W der Gesammtbetrag der unter den oben angegebenen Umständen geleisteten Arbeit, und $\iiint$ eine Integration, welche sich durch den ganzen vom Körper eingenommenen Raum erstreckt, so dass

$$(5) \qquad W = \iiint (Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc)\, dx\, dy\, dz$$

ist. Bezeichnen nun α, β, γ die Componenten der Verschiebung, welche

irgend ein unendlich nahe an (x, y, z) liegender Punkt der Substanz erfährt, wenn die Deformation (e, f, g, a, b, c) erfolgt, sei dieselbe nun eine rotationslose (§ 182), bei welcher ein gewisser Punkt des Körpers fest bleibt, oder eine beliebige mit einer unendlich kleinen Rotation verbundene Translation, so erhalten wir, wenn wir die Formeln (5) des § 181 so ändern, dass sie für unendlich kleine Deformationen passen, und darin § 190 (e) benutzen, mit Rücksicht auf unsere jetzige (§ 669) Bezeichnung

$$\text{(6)} \quad \begin{cases} e = \frac{d\alpha}{dx}, \quad f = \frac{d\beta}{dy}, \quad g = \frac{d\gamma}{dz}, \\ a = \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}, \quad b = \frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz}, \quad c = \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}. \end{cases}$$

Werden diese Ausdrücke in (5) eingesetzt, so folgt

$$\text{(7)} \quad \begin{cases} W = \int\int\int \Big(P\frac{d\alpha}{dx} + U\frac{d\beta}{dx} + T\frac{d\gamma}{dx} + U\frac{d\alpha}{dy} \\ \qquad + Q\frac{d\beta}{dy} + S\frac{d\gamma}{dy} + T\frac{d\alpha}{dz} + S\frac{d\beta}{dz} + R\frac{d\gamma}{dz}\Big)\, dx\, dy\, dz. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich durch Integration

$$\text{(8)} \quad \begin{cases} W = \int\int[(P\alpha + U\beta + T\gamma)\, dy\, dz + (U\alpha + Q\beta + S\gamma)\, dz\, dx \\ \qquad + (T\alpha + S\beta + R\gamma)\, dx\, dy]. \end{cases}$$

Darin sind die Grenzen der Integrationen so anzunehmen, dass, wenn $d\sigma$ ein Element der umgrenzenden Oberfläche, $\int\int$ eine sich über dieselbe erstreckende Integration und l, m, n die Richtungscosinus der in irgend einem ihrer Punkte errichteten Normale bezeichnen, der Ausdruck dasselbe bedeutet, wie der Ausdruck

$$\text{(9)} \quad \begin{cases} W = \int\int\{(P\alpha + U\beta + T\gamma)\, l + (U\alpha + Q\beta + S\gamma)\, m \\ \qquad + (T\alpha + S\beta + R\gamma)\, n\}\, d\sigma, \end{cases}$$

welcher, wenn man die Glieder anders gruppirt, in

$$\text{(10)} \quad \begin{cases} W = \int\int\{(Pl + Um + Tn)\,\alpha + (Ul + Qm + Sn)\,\beta \\ \qquad + (Tl + Sm + Rn)\,\gamma\}\, d\sigma \end{cases}$$

übergeht. Das zweite Glied dieser Formel drückt nach (1) direct die Arbeit aus, welche von den von aussen auf die Grenzfläche wirkenden Kräften geleistet wird.

671. Differentialgleichung der durch elastische Reaction geleisteten Arbeit. — Wenn wir jetzt voraussetzen, der Körper gebe irgend einem Zwange (P, Q, R, S, T, U) nach und setze demselben nur den ihm innewohnenden Widerstand gegen eine Formänderung entgegen, so wird [nach (4), wenn de, df, u. s. w. statt e, f, u. s. w. gesetzt wird] die Differentialgleichung der geleisteten Arbeit

$$\text{(11)} \quad dw = P de + Q df + R dg + S da + T db + U dc$$

sein, wenn w die für die Volumeneinheit genommene Gesammtarbeit bezeichnet, die in irgend einem Theil des Körpers verrichtet wird, während die Substanz dieses Theils eine Deformation (e, f, g, a, b, c) von einem anfänglichen Zustande aus erfährt, den man als deformationslos betrachtet. Wie wir später in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie sehen werden, drückt diese Gleichung die Arbeit aus, die in einer Flüssigkeit durch die Verzerrungsreaction (oder die Differenz des Drucks in verschiedenen Richtungen) geleistet wird, wenn dieselbe gegen die allen natürlichen Flüssigkeiten innewohnende Zähigkeit arbeitet, und w ist dann nach Joule's Entdeckung der dynamische Werth der in dem Process erzeugten Wärme. Die Gleichung kann auch dazu angewandt werden, die Arbeit auszudrücken, welche bei der Deformation eines unvollkommen elastischen festen Körpers oder eines elastischen festen Körpers geleistet wird, dessen Temperatur sich während des Processes ändert. In allen solchen Anwendungen hängt die Reaction zum Theil von der Geschwindigkeit der deformirenden Bewegung, oder von der variirenden Temperatur, und gar nicht oder doch nicht ausschliesslich von dem in irgend einem Augenblicke vorhandenen Deformationszustande ab, und das System ist nicht dynamisch conservativ.

672. Vollkommene Elasticität. — Definition. Ein vollkommen elastischer Körper ist ein Körper, welcher, wenn er in irgend einen Deformationszustand gebracht ist, zu allen Zeiten denselben Zwang erfordert, um in diesem Zustande zu bleiben, wie lange er auch deformirt geblieben sein mag, oder wie schnell er auch aus einem Zustande anderer Deformation oder aus seinem undeformirten Zustande in den betrachteten Zustand versetzt sein mag. Nach dem in §§ 443, 448 angegebenen Plane für die Behandlung der abstracten Dynamik ignoriren wir hier die Temperaturänderungen im Körper. Wenn wir jedoch die Bedingung hinzufügen, dass die Temperatur absolut unverändert bleibe, oder dass der Körper nach den Aenderungen seiner Deformation eine bestimmte Temperatur wieder annehme, so erhalten wir eine Definition der als vollkommene Elasticität bezeichneten Eigenschaft, welche hervorragend elastische Körper in hohem Grade besitzen; in aller Strenge genügen dieser Definition alle Flüssigkeiten; es genügen ihr vielleicht auch einige reale feste Körper, wie homogene Krystalle. Insofern aber die elastische Reaction jeder Art, welche der Körper einer Deformation entgegensetzt, mit seiner Temperatur variirt, und da sogar jede Zu-

oder Abnahme der Deformation in einem elastischen Körper nothwendig*) auch von einer Aenderung seiner Temperatur begleitet ist (ein Ergebniss der Thermodynamik, das wir später herleiten werden), so kann selbst ein vollkommen elastischer Körper, wenn er nach einander eine Reihe von Deformationen erfährt, nicht als ein völlig conservatives System wirken, sondern muss im Gegentheil durch die Fortleitung und Ausstrahlung der durch diese Temperaturänderungen erzeugten Wärme einen Verlust von Energie veranlassen.

Wenn man aber die Deformationsänderungen so schnell macht, dass eine merkliche Temperaturausgleichung durch Leitung oder Strahlung verhindert werde (das geschieht z. B., wie Stokes gezeigt hat, bei der Ausbreitung musikalischer Töne durch die Luft), oder wenn man dieselben so verlangsamt, dass man durch geeignete Mittel die Temperatur constant**) erhalten kann, so kann man bewirken, dass jeder in hohem Grade oder vollkommen elastische Körper in Wirklichkeit nur sehr wenig verschieden von einem conservativen System wirke.

673. Potentielle Energie eines im deformirten Zustande erhaltenen Körpers. — In der Natur ist daher die Gesammtgrösse w der Arbeit, wie wir sie oben definirt haben, für einen vollkommen elastischen Körper unabhängig (§ 274) von der Reihe der Configurationen oder Deformationszustände, durch welche der Körper aus der ersten in die zweite der angegebenen Lagen gebracht sein mag, wenn ihm nur nicht gestattet ist, seine Temperatur während des Processes merklich zu ändern.

Analytisch ausgedrückt heisst dies:— Der Ausdruck (11) für dw muss das Differential einer Function der als unabhängig Veränderliche angesehenen Grössen e, f, g, a, b, c sein, oder, was dasselbe ist, w ist eine Function dieser Elemente und

$$(12) \qquad \begin{cases} P = \dfrac{dw}{de}, \quad Q = \dfrac{dw}{df}, \quad R = \dfrac{dw}{dg}, \\ S = \dfrac{dw}{da}, \quad T = \dfrac{dw}{db}, \quad U = \dfrac{dw}{dc}. \end{cases}$$

Im Anhang C werden wir zu dieser Theorie zurückkehren und eine umfassende analytische Behandlung derselben geben, indem wir sie nicht auf unendlich kleine Deformationen beschränken, für welche die Bezeichnung $(e, f, \ldots)$, wie sie in § 669 definirt wurde, allein passend ist. Inzwischen bemerken wir nur, dass, wenn der Gesammtbetrag der Defor-

*) „On the Thermoelastic and Thermomagnetic Properties of Matter" (W. Thomson). Quarterly Journal of Mathematics. April 1855.
**) Ibid.



mation unendlich klein ist, wenn also die Componenten der elastischen Reaction sich sämmtlich in gleichem Verhältniss wie die Deformationscomponenten ändern, so oft diese letzteren sämmtlich in demselben bestimmten Verhältniss geändert werden, w eine homogene quadratische Function der sechs Veränderlichen e, f, g, a, b, c sein muss, welche, wenn (e, e), $(f, f), \ldots, (e, f), \ldots$ Constanten bezeichnen, die von der Beschaffenheit der Substanz und den als Coordinatenaxen angenommenen Richtungen abhängen, folgendermaassen geschrieben werden kann: —

$$(13)\quad \begin{cases} w = \tfrac{1}{2}\{(e,e)e^2 + (f,f)f^2 + (g,g)g^2 + (a,a)a^2 + (b,b)b^2 + (c,c)c^2 \\ \qquad + 2(e,f)ef + 2(e,g)eg + 2(e,a)ea + 2(e,b)eb + 2(e,c)ec \\ \qquad + 2(f,g)fg + 2(f,a)fa + 2(f,b)fb + 2(f,c)fc \\ \qquad + 2(g,a)ga + 2(g,b)gb + 2(g,c)gc \\ \qquad + 2(a,b)ab + 2(a,c)ac \\ \qquad + 2(b,c)bc\} \end{cases}$$

Die 21 Coefficienten (e,e), $(f,f), \ldots, (b,c)$ dieses Ausdrucks sind die 21 „Elasticitätscoefficienten", von denen Green zuerst gezeigt hat, dass sie für eine vollständige Theorie der Dynamik eines unendlich kleinen Deformationen unterworfenen elastischen festen Körpers geeignet und unentbehrlich sind. Die einzige Bedingung, der man diese Coefficienten theoretisch unterwerfen kann, besteht darin, dass sie w für beliebige, positive oder negative, Werthe der Deformationscomponenten $e, f, \ldots$ nicht negativ werden lassen dürfen. In dem Capitel über die Eigenschaften der Materie werden wir sehen, dass eine von Mathematikern falsch ausgearbeitete falsche Theorie (von Boscovich) zu Relationen zwischen den Elasticitätscoefficienten geführt hat, die experimentell als unrichtig erwiesen worden sind.

Wird mittels der Formel (13) w aus (12) eliminirt, so erhalten wir

$$(14)\quad \begin{cases} P = (e,e)e + (e,f)f + (e,g)g + (e,a)a + (e,b)b + (e,c)c \\ Q = (f,e)e + (f,f)f + (f,g)g + (f,a)a + (f,b)b + (f,c)c \\ \qquad \text{u. s. w.} \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Diese Gleichungen drücken die sechs Componenten der elastischen Reaction (P, Q, R, S, T, U) als lineare Functionen der sechs Deformationscomponenten (e, f, g, a, b, c) aus. Zwischen den 36 Coefficienten dieser Functionen bestehen 15 Gleichungen*), so dass nur 21 derselben unabhängig bleiben. Das blosse Princip der Superposition (welches wir oben zum Beweise der quadratischen Form von w benutzt haben) hätte direct angewendet werden können, um lineare Formeln für die Componenten der elastischen Reaction herzuleiten. Auf diese Weise sind einige Schriftsteller dazu gekommen, als die Grundlage einer ganz allgemeinen Theorie der Elasticität sechs Gleichungen aufzustellen, welche 36 als unabhängig vorausgesetzte Coefficienten enthalten. Nur mittelst des Princips der Energie kann man aber, wie zuerst Green entdeckte, die 15 Paare dieser Coefficienten als gleich erweisen.

*) Nämlich

$$(15)\qquad (e,f) = (f,e), \ldots (e,a) = (a,e), \ldots (b,c) = (c,b).$$

Die algebraische Transformation der Gleichungen (14), welche den Zweck hat, die Deformationscomponenten einzeln als lineare Functionen der Componenten der elastischen Reaction auszudrücken, lässt sich natürlich direct ausführen, dadurch dass man aus den 36 Coefficienten die nöthigen Determinanten bildet und die 36 erforderlichen Quotienten nimmt. Aus einem bekannten Satze über Determinanten, den wir oben [§ 313 (d)] schon angewandt haben, folgt, dass wegen der 15 Gleichheiten, die zwischen je zweien der Coefficienten von e, f, u. s. w. in (14) bestehen, 15 Gleichheiten zwischen je zweien dieser Quotienten stattfinden. Bezeichnen wir demnach mit

$$[P, P],\ [Q, Q],\ \ldots,\ [P, Q], \ldots,\ [Q, P], \ldots$$

die durch jenes Verfahren gefundenen 36 Determinantenquotienten [welche somit bekannte algebraische Functionen der anfänglichen Coefficienten (e, e), (f, f), ... sind], so erhalten wir

$$(16)\begin{cases} e = [P,P]\,P + [P,Q]\,Q + [P,R]\,R + [P,S]\,S + [P,T]\,T + [P,U]\,U \\ f = [Q,P]\,P + [Q,Q]\,Q + [Q,R]\,R + [Q,S]\,S + [Q,T]\,T + [Q,U]\,U \\ \qquad\text{u. s. w.} \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

und diese neuen Coefficienten genügen den 15 Gleichungen

$$(17) \qquad [P, Q] = [Q, P],\ [P, R] = [R, P], \ldots$$

Aus dem, was wir in § 313 (d) bewiesen haben, wo wir es mit genau derselben algebraischen Transformation zu thun hatten, erkennen wir, dass $[P, P]$, $[Q, Q]$, ..., $[P, Q]$, ... einfach die Coefficienten von $P^2, Q^2, \ldots$, $2PQ, \ldots$ in dem Ausdruck für $2w$ sind, den man erhält, wenn man $e, f, \ldots$ aus (13) eliminirt. Es ist also

$$(18)\ w = \tfrac{1}{2}\{[P,P]\,P^2 + [Q,Q]\,Q^2 + \cdots + 2\,[P,Q]\,PQ + 2\,[P,R]\,PR + \cdots\},$$

und

$$(19)\quad \begin{cases} e = \left[\dfrac{dw}{dP}\right],\ f = \left[\dfrac{dw}{dQ}\right],\ g = \left[\dfrac{dw}{dR}\right], \\ a = \left[\dfrac{dw}{dS}\right],\ b = \left[\dfrac{dw}{dT}\right],\ c = \left[\dfrac{dw}{dU}\right]; \end{cases}$$

die hier gebrauchten Klammern sollen die unter der Voraussetzung, dass w als Function von P, Q, u. s. w. ausgedrückt ist [wie in (18)], genommenen partiellen Differentialquotienten von denjenigen der Gleichungen (12) unterscheiden, welche unter der Voraussetzung genommen werden, dass w, wie in (13), als eine Function von $e, f, \ldots$ ausgedrückt ist. Wir erhalten auch, wie in § 313 (d),

$$(20) \qquad w = \tfrac{1}{2}\,(Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc),$$

welche Formel wir gleich anfangs hätten aufstellen können, da sie einfach den folgenden Satz ausdrückt: —

674. Mittelwerth der Reaction. — Der Mittelwerth der Reaction, welche von der Elasticität des festen Körpers hervorgerufen wird, sobald dieser aus seinem natürlichen Zustande in einen Zustand gebracht wird, in welchem die Deformation (e, f, g, a, b, c) beträgt, ist (wie aus der vorausgesetzten Anwendbarkeit des Princips

der Superposition mit Nothwendigkeit hervorgeht) genau gleich der Hälfte des Zwanges, dessen es bedarf, um den Körper in diesem deformirten Zustande zu erhalten.

675. Homogenität. Moleculare Constitution der Körper. — Ein Körper wird homogen genannt, wenn zwei beliebige congruente Theile desselben, deren einander entsprechende Linien parallel nach gleicher Richtung gewendet sind, nicht die geringste qualitative Verschiedenheit zeigen. Dass diese Bedingung ohne jede Beschränkung hinsichtlich der Kleinheit der Theile vollkommen erfüllt werde, lässt sich zwar vorstellen, wird aber nicht allgemein von irgend einem der uns bekannten festen oder flüssigen Körper als wahrscheinlich angenommen, wie sehr dieselben auch homogen zu sein scheinen. Alle Naturforscher sind, glauben wir, der Ansicht, dass die Structur der Körper eine moleculare ist, d. h. dass in zusammengesetzten Körpern, wie Wasser, Eis, Bergkrystall u. s. w., die sie bildenden elementaren Substanzen neben einander liegen oder in Gruppen von endlichen Dimensionen geordnet sind, und dass selbst in Körpern, die wir einfache nennen (d. h. die wir chemisch nicht in andere Substanzen zerlegen können), keine wahre Homogenität besteht. Mit anderen Worten, die herrschende Ansicht ist die, dass jede uns bekannte Art Materie ein mehr oder weniger grobkörniges Gefüge hat, sei es nun, dass ihre Molecüle sichtbar sind, ähnlich einem Mauerwerk aus Ziegeln oder Hausteinen, oder auch wie natürlicher Granit und Sandstein; oder aber dass ihre Molecüle zu klein [aber nicht unendlich klein*)] sind, als dass man sie sehen oder direct messen könnte, wie die scheinbar homogenen Metalle, die continuirlichen Krystalle, die Flüssigkeiten und die Gase. Wir müssen natürlich zu diesem Gegenstande in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie zurückkehren und brauchen inzwischen nur zu bemerken, dass die Definition der Homogenität in praktischer Hinsicht für Massen von sehr grossem Umfange selbst auf Bausteine oder grobkörnige Felsmassen, bei geringerem Umfange noch auf Blöcke gewöhnlichen Sandsteins, bei einem sehr kleinen Umfange auf die anscheinend homogenen Metalle**), endlich, wenn man Gefüge von äusserster Feinheit und

---

*) Wahrscheinlich nicht unbestimmbar klein, obgleich ihre Dimensionen uns jetzt noch nicht bekannt sind.

**) Dieselben sind aber, wie neuerdings Deville und Van Troost gezeigt haben, bei hohen Temperaturen porös genug, einen sehr freien Durchgang der Gase zu gestatten.



unwahrnehmbarer Ungleichmässigkeit verlangt, auf die glasartigen Körper, die continuirlichen Krystalle, die festgewordenen Gummi, wie Gummi elasticum, Gummi arabicum, u. s. w. und auf die Flüssigkeiten angewandt werden kann.

676. **Isotrope und äolotrope Substanzen.** — Die Substanz eines homogenen festen Körpers heisst isotrop, wenn ein kugelförmiger Theil derselben unter der Einwirkung eines beliebigen physischen Agens keine qualitative Verschiedenheit zeigt, wie er auch gedreht werden möge. Oder, was auf dasselbe hinausläuft, ein aus irgend einer Lage in einem isotropen Körper herausgeschnittener Würfel zeigt in Beziehung auf jedes Paar paralleler Flächen dieselben Eigenschaften. Oder zwei aus beliebigen Lagen im Körper herausgeschnittene congruente Theile, die nicht der Bedingung der Parallelität unterworfen sind (§ 675), lassen sich nicht von einander unterscheiden. Eine Substanz, welche nicht isotrop ist, sondern in verschiedenen Richtungen qualitative Unterschiede zeigt, heisst äolotrop.

677. Ein Körper oder die Substanz eines homogenen festen Körpers kann in Beziehung auf eine Eigenschaft oder eine Classe von Eigenschaften isotrop, in Beziehung auf andere äolotrop sein.

So besitzt in der abstracten Dynamik ein starrer Körper oder eine Gruppe starr mit einander verbundener Körper, die innerhalb einer starren Kugelfläche enthalten und an derselben starr befestigt sind, kinetische Symmetrie (§ 285), wenn der Trägheitsmittelpunkt im Centrum der Kugel liegt und die Trägheitsmomente für alle Durchmesser gleich sind. Der Körper ist auch isotrop in Beziehung auf die Schwerkraft, wenn er centrobarisch (§ 526) ist, so dass das Centrum seiner Figur nicht bloss ein Trägheitsmittelpunkt, sondern ein wirkliches Attractionscentrum ist. Oder eine durchsichtige Substanz kann in verschiedenen ihrer Richtungen das Licht verschieden schnell durchlassen (d. h. doppelbrechend sein) und doch kann (bei den Krystallen, die wir kennen, geschieht dies auch allgemein) ein Würfel derselben den nämlichen Theil eines Büschels weissen Lichtes absorbiren, das senkrecht zu einem beliebigen Paar der Seitenflächen hindurchgeht. Oder die Substanz kann (wie ein Krystall, welches Dichroismus zeigt) in Beziehung auf die letzte oder auf beide angegebene optische Eigenschaften äolotrop sein und doch die Wärme in allen Richtungen auf gleiche Weise leiten.

678. Praktische Beschränkung des Begriffs der Isotropie. — Die Bemerkungen des § 675 hinsichtlich der Homogenität der Körper und des heterogenen Gefüges, das wir im Grunde genommen allen Substanzen zuzuschreiben haben, wie sehr sie auch homogen zu sein scheinen, ergeben einerseits entsprechende Beschränkungen, andererseits für die Praxis zulässige weitere Interpretationen des Begriffes „isotrop“.

679. Bedingungen der elastischen Isotropie. — Damit ein fester Körper elastisch isotrop sei, darf, wie wir erstens sehen, ein sphärischer oder würfelförmiger Theil desselben, wenn er einem (positiven oder negativen) überall gleichförmigen und zu seiner Oberfläche senkrechten Druck unterworfen wird, beim Nachgeben keine ungleichmässige Formänderung erleiden; d. h. er muss in allen Richtungen gleich stark zusammengedrückt oder ausgedehnt werden. Weiter muss ein aus irgend einem Theil des Körpers geschnittener Würfel, auf welchen in Ebenen, die zwei Paaren seiner Seiten parallel sind, eine tangentiale oder verzerrende Reaction (§ 662) wirkt, eine einfache Deformation oder Schiebung (§ 171) in derselben Richtung erleiden. Diese Deformation ist von keiner Verdichtung oder Ausdehnung begleitet*) und der Grösse nach sowohl für alle drei Wege, auf denen eine Reaction in dieser Weise auf einen Würfel einwirken kann, als auch für verschiedene aus verschiedenen Lagen des festen Körpers geschnittene Würfel dieselbe.

680. Maass des Widerstandes gegen eine Compression und gegen eine Verzerrung. — Die elastische Eigenschaft eines vollkommen elastischen, homogenen, isotropen Körpers wird also vollständig durch zwei Elemente definirt: durch seinen Widerstand gegen eine Compression und seinen Widerstand gegen eine Verzerrung. Die für die Einheit der Fläche des Körpers genommene Grösse des in allen Richtungen gleichförmigen Drucks, welcher erfordert wird, um eine festgesetzte sehr kleine Compression zu erzeugen, misst das erstere Element; die Grösse des verschieben-

*) Wir erinnern daran, dass die Form- und Volumenänderungen, mit denen wir es zu thun haben, so klein sind, dass wir sie als vollkommen superponirbar ansehen können; wenn also irgend ein verschiebender Zwang eine Verdichtung erzeugte, so würde ein entgegengesetzter verschiebender Zwang eine Ausdehnung hervorrufen, was eine Verletzung der Bedingung der Isotropie ist. Es ist aber möglich, dass ein verschiebender Zwang in einem wirklich isotropischen festen Körper eine dem Quadrate seiner Grösse proportionale Verdichtung oder Ausdehnung erzeugt, und es ist wahrscheinlich, dass solche Wirkungen beim Gummi elasticum, oder beim Kork, oder bei anderen Körpern, die grosse Deformationen oder Volumenänderungen bei bleibender Elasticität erleiden können, sehr merklich sind.

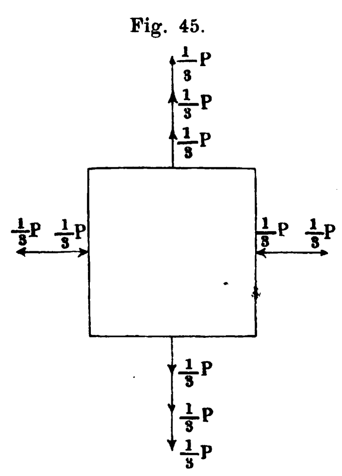
den Zwanges, welcher erfordert wird, um eine Verzerrung von festgesetzter Grösse zu erzeugen, misst das zweite Element. Das numerische Maass des ersten Elements ist der die Compression erzeugende Druck, dividirt durch die Volumenverminderung eines Theils der Substanz, welcher die Volumeneinheit ausfüllt, so lange keine Compression stattgefunden hat. Dieses Maass wird zuweilen die Volumenelasticität oder der Widerstand gegen Compression genannt. Sein reciproker Werth, d. i. die Grösse der Compression, welche die Volumeneinheit erfährt, dividirt durch den Druck, welcher die Compression erzeugt, oder, wie wir passend sagen können, die Compression der Volumeneinheit, genommen für die Einheit des Drucks, heisst gewöhnlich die Zusammendrückbarkeit. Das zweite Element, oder der Widerstand gegen eine Formänderung wird gemessen durch die (wie in § 662 gerechnete) tangentiale Reaction, dividirt durch die Grösse der Verzerrung oder Schiebung (§ 175), die sie erzeugt, und heisst die Starrheit oder die Gestaltselasticität der Substanz.

681. Aus § 169 folgt, dass eine Deformation, die aus einer einfachen Ausdehnung in einer Schaar paralleler Linien und einer gleich grossen einfachen Contraction in irgend einer anderen Schaar paralleler, zu den ersteren senkrechter Linien besteht, dasselbe ist, wie eine einfache Schiebung in jeder der beiden Schaaren von Ebenen, welche die beiden Parallelenschaaren unter einem Winkel von 45^0 schneiden, und das numerische Maass (§ 175) dieser Schiebung oder einfachen Verzerrung ist gleich dem Doppelten der Grösse der Elongation oder Contraction (jede natürlich für die Längeneinheit genommen). Auf ähnliche Weise sehen wir (§ 668), dass ein longitudinaler Zug (oder negativer Druck), welcher einer Linie parallel erfolgt, und ein gleich grosser longitudinaler positiver Druck, welcher irgend einer zur ersteren senkrechten Linie parallel erfolgt, einer verschiebenden Reaction tangentialer Zugkräfte (§ 661) äquivalent sind, welche den Ebenen, die jene Linien unter einem Winkel von 45^0 schneiden, parallel sind. Das numerische Maass dieser verschiebenden Reaction, welches (§ 662) die Grösse des tangentialen Zuges in jeder der beiden Ebenenschaaren ist, ist gleich der einfachen (nicht doppelten) Grösse des positiven oder negativen Drucks in Richtung der Normalen.

682. Die durch eine einzige longitudinale Deformation erzeugte Reaction. — Da demnach jede beliebige Reaction in einfache longitudinale Reactionen zerlegt werden kann, so haben

wir, um den Zusammenhang zwischen irgend einer Reaction und der sie erzeugenden Deformation zu finden, nur die Deformation zu bestimmen, welche eine einzelne longitudinale Reaction erzeugt. Das kann leicht auf folgende Weise geschehen: — Eine einfache longitudinale Reaction P ist einer gleichmässigen Spannung $^1/_3$ P in allen Richtungen äquivalent, die mit zwei verschiebenden Reactionen verbunden ist, von denen jede gleich $^1/_3$ P ist; beide Reactionen haben eine gemeinschaftliche Axe in der Linie der gegebenen longitudinalen Reaction, und ihre beiden anderen Axen sind zwei beliebige zu einander und zur ersteren senkrechte Linien. Die Fig. 45, welche in einer die erstere Axe und eine der beiden letzteren Axen enthaltenden Ebene gezogen ist, zeigt hinlänglich die Zusammensetzung an; es sind darin nur die Kräfte nicht angegeben, welche zur Ebene der Zeichnung senkrecht sind.

Fig. 45.



Wenn also n die Starrheit und k den Widerstand gegen eine Ausdehnung [es ist dies dasselbe, wie der reciproke Werth der Zusammendrückbarkeit (§ 680)] bezeichnet, so wird die Wirkung eine in allen Richtungen gleiche Ausdehnung sein, welche sich für die Einheit des Volumens auf

$$\frac{^1/_3\,P}{k} \tag{1}$$

beläuft, verbunden mit zwei gleichen Verzerrungen, deren jede

$$\frac{^1/_3\,P}{n} \tag{2}$$

beträgt und zu Axen (§ 679) die Richtungen hat, die wir eben als die Axen der verschiebenden Reactionen angegeben haben.

683. Durch Benutzung der Angaben des § 681 kann man die Ausdehnung und die beiden Schiebungen, die wir so bestimmt haben, auf folgende Weise passend auf einfache longitudinale Deformationen reduciren: —

Die beiden Schiebungen zusammen machen eine Elongation in der Richtung der gegebenen Kraft P von der Grösse $\frac{\frac{1}{3} P}{n}$ und eine gleiche Contraction von der Grösse $\frac{\frac{1}{6} P}{n}$ in allen zur ersteren senkrechten Richtungen aus. Ferner ist die cubische Ausdehnung $\frac{\frac{1}{3} P}{k}$ mit einer in allen Richtungen gleichen linearen Ausdehnung $\frac{1}{9} \frac{P}{k}$ gleichbedeutend. Wir erhalten also im Ganzen

(3) die lineare Ausdehnung ist $= P\left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{9k}\right)$ in der Richtung der einwirkenden Reaction, und

die lineare Contraction ist $= P\left(\frac{1}{6n} - \frac{1}{9k}\right)$ in allen zur einwirkenden Reaction senkrechten Richtungen.

684. **Verhältniss der seitlichen Contraction zur longitudinalen Ausdehnung.** — Wenn demnach die Enden einer Säule, eines Stabes oder eines Drahtes von isotropischem Material von gleichen und entgegengesetzten Kräften angegriffen werden, so erleidet der Körper eine seitliche lineare Contraction, welche $\frac{3k - 2n}{2(3k + n)}$ der longitudinalen Ausdehnung beträgt, wo Contraction und Ausdehnung wie gewöhnlich für die Einheit des Längenmaasses genommen sind. Ein Beispiel der oben (§ 673) erwähnten falschen mathematischen Ergebnisse ist der berühmte Schluss von Navier und Poisson, dass dieses Verhältniss $\frac{1}{4}$ sei, was erfordern würde, dass die Starrheit bei allen festen Körpern $\frac{3}{5}$ des Widerstandes gegen eine Compression wäre. Dass dieser Satz falsch ist, hat zuerst Stokes*) aus vielen Beobachtungen geschlossen, welche bedeutende Abweichungen von demselben in vielen sehr bekannten Körpern zeigen und es höchst unwahrscheinlich machen, dass in irgend einer Classe von festen Körpern das Verhältniss zwischen der Starrheit und dem Widerstande gegen eine Compression sich einer constanten Grenze nähere. So bieten uns helle elastische Gallerte und Gummi elasticum bekannte Beispiele isotroper homogener fester Körper, deren Zusammendrückbarkeit wahrscheinlich nur äusserst wenig von der des Wassers verschieden ist, während sie

*) On the Friction of Fluids in Motion, and the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. — Trans. Camb. Phil. Jour., April 1845. Siehe auch Camb. and Dub. Math. Jour., March 1848.

sich hinsichtlich der Starrheit („Steifheit") bedeutend von einander unterscheiden. Die Zusammendrückbarkeit des Wassers ist $^1/_{308000}$ für jedes (engl.) Pfund, was auf den (engl.) Quadratzoll drückt (oder $^1/_{216555}$ per Gramm und Quadratmillimeter); der durch den reciproken Werth dieser Grösse gemessene Widerstand gegen eine Compression ist offenbar viele hundertmal so gross, als der absolute Betrag der Starrheit des steifesten jener Stoffe. Wenn demnach eine Säule aus einer dieser Substanzen durch einander das Gleichgewicht haltende, an ihren Enden angebrachte Kräfte zusammengepresst oder ausgezogen wird (oder wenn ein Band von Gummi elasticum ausgezogen wird), ohne dass die Grenzen der Elasticität überschritten werden, so erleidet sie keine merkliche Volumenänderung, obschon ihre Länge eine bedeutend andere wird. Daher muss die entsprechende Ausdehnung oder Contraction irgend eines Querdurchmessers wenig von der Hälfte der longitudinalen Contraction oder Ausdehnung verschieden sein, und die Substanzen dieser Art können hinsichtlich aller gewöhnlichen Reactionen in praktischer Beziehung als unzusammendrückbare elastische feste Körper angesehen werden. Stokes gab Gründe an, die zu der Meinung führten, dass auch die Metalle im Allgemeinen einen im Verhältniss zu ihrer Starrheit grösseren Widerstand gegen eine Compression besitzen, als aus der falschen Theorie sich ergeben würde, obgleich die Abweichung für sie viel geringer als für die gallertartigen Körper ist. Was Stokes nur wahrscheinlich gemacht hatte, wurde bald darauf experimentell von Wertheim bewiesen, welcher fand, dass in Stäben, die nur von longitudinalen Kräften angegriffen werden, das Verhältniss der seitlichen zur longitudinalen Aenderung der linearen Dimensionen für Glas und Messing ungefähr $^1/_3$ ist; ebenso erhielt Kirchhoff durch eine wohl ersonnene experimentelle Methode 0,387 als Werth dieses Verhältnisses für Messing und 0,294 für Eisen. Als wir selbst neuerdings*) die Torsions- und die longitudinale Starrheit (§§ 596, 599, 686) eines Kupferdrahtes maassen, ergab sich, dass jenes Verhältniss für Kupfer wahrscheinlich zwischen 0,226 und 0,441 liegt.

685. Alle diese Resultate zeigen an, dass die Starrheit kleiner ist im Verhältniss zur Zusammendrückbarkeit, als sie nach Navier's und Poisson's Theorie sein sollte. Viele Naturforscher, welche die Nothwendigkeit einsahen, jene Theorie als unanwendbar

---

*) On the Elasticity and Viscosity of Metals (W. Thomson). Proc. R. S. May 1865.



auf die gewöhnlichen festen Körper aufzugeben, vermutheten nun, dieselbe könne als correct angesehen werden für einen idealen vollkommenen festen Körper, und sie gebe eine Grösse der Starrheit an, die von keiner realen Substanz ganz erreicht werde, der aber einige der starrsten festen Körper (wie z. B. Eisen) sich näherten. Es ist aber kaum möglich, ein Stück Kork in der Hand zu halten, ohne die Verkehrtheit dieses letzten Versuchs zur Aufrechthaltung einer Theorie zu bemerken, die nie eine gute Grundlage hatte. Wir haben Korksäulen verschiedener Formen (darunter befanden sich cylindrische Stücke, die auf die gewöhnliche Weise für Flaschen geschnitten waren) mittels einer hydraulischen Presse in der Richtung ihrer Länge zusammengepresst und sowohl vor wie nach dieser Operation sorgfältige Messungen ausgeführt: Es stellte sich heraus, dass die Aenderung der seitlichen Dimensionen unmerklich ist, sowohl wenn innerhalb der Grenzen der Elasticität eine kleine longitudinale Contraction und darauf eine Rückkehr zur früheren Länge erfolgt, als auch wenn man so beträchtliche longitudinale Contractionen vornimmt, dass der Körper nur $^1/_6$ oder $^1/_8$ seiner anfänglichen Länge behält. Es ist auf diese Weise entscheidend bewiesen, dass im Verhältniss zum Widerstande gegen eine Compression Kork weit starrer, während Metalle, Glas und Gallerte sämmtlich weniger starr sind, als der vorausgesetzte „vollkommen feste Körper", und damit ist die gänzliche Werthlosigkeit jener Theorie experimentell dargelegt.

686. Young's Modulus. — Der Elasticitätsmodulus eines Stabes, Drahtes, einer Faser, eines dünnen Fadens, eines Bandes oder einer Schnur von irgend einem Material (dessen Substanz nicht isotrop, ja nicht einmal homogen innerhalb eines Normalschnittes zu sein braucht) [wie z. B. ein Glas- oder Holzstab, ein Metalldraht, ein Gummiband, ein Zwirnsfaden, eine Schnur, ein Band] ist ein von Dr. Thomas Young eingeführter Ausdruck, mit dem das bezeichnet werden soll, was wir zuweilen auch die longitudinale Starrheit nennen, d. i. der Quotient, den man erhält, wenn man die einfach longitudinal wirkende Kraft, welche zur Erzeugung einer unendlich kleinen Ausdehnung oder Zusammenziehung erfordert wird, durch die, wie gewöhnlich, für die Längeneinheit gerechnete Grösse dieser Ausdehnung oder Zusammenziehung dividirt.

687. Gewichtsmodulus und Länge des Modulus. — Manchmal empfiehlt es sich, den Modulus nicht in Gewichtseinheiten anzugeben, sondern ihn durch das Gewicht der Längeneinheit

des Stabes, Drahtes oder Fadens auszudrücken. Den so gerechneten Modulus oder, wie er von einigen Schriftstellern genannt wird, die Länge des Modulus erhält man natürlich, indem man den Gewichtsmodulus durch das Gewicht der Längeneinheit dividirt. Er ist in vielen Anwendungen der Theorie der Elasticität von Nutzen, wie z. B. in dem folgenden Resultat, welches später bewiesen werden wird: — Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung longitudinaler Vibrationen (wie der Schallwellen) längs eines Stabes oder einer Schnur ist gleich der Geschwindigkeit, welche ein Körper erreicht hat, der von einer der halben Länge des Modulus gleichen Höhe herabgefallen ist*).

688. Der specifische Modulus eines isotropen Körpers. Volumen- und Krafteinheiten zur Bestimmung desselben. — Der specifische Elasticitätsmodulus einer isotropen Substanz, oder, wie er meist einfach genannt wird, der Elasticitätsmodulus der Substanz ist der Elasticitätsmodulus eines Stabes der Substanz, welcher irgend eine festgesetzte Grösse des Querschnitts hat. Wenn diese so gross ist, dass das Gewicht der Längeneinheit die Gewichtseinheit ist, so ist der Modulus der Substanz nichts anderes, als die Länge des Modulus irgend eines Stabes derselben: eine Berechnungsweise, deren Anwendung, wie wir gesehen haben, manche Vortheile gewährt. Es ist jedoch gebräuchlicher, eine gewöhnliche Flächeneinheit als die Schnittfläche des in der Definition benutzten Stabes anzunehmen. Es muss auch eine bestimmte Festsetzung in Betreff der Einheit getroffen werden, durch welche die Kraft gemessen werden soll; es kann dies entweder die absolute Einheit (§ 223) oder die Gravitationseinheit für einen bestimmten Ort, d. h. (§ 226) das Gewicht sein, welches

*) Die in Rede stehenden Vibrationen müssen eine Wellenlänge haben, welche sehr gross gegen die Dicke des Stabes ist, so dass die Trägheit keinen merklichen Einfluss auf die senkrecht zur Längsrichtung erfolgenden Zusammenziehungen und Ausdehnungen ausübt, welche (wofern nicht die Substanz in dieser Hinsicht die eigenthümliche Beschaffenheit hat, welche der Kork zeigt, § 684) zugleich mit den Vibrationen erfolgen. Auch werden wir in der Thermodynamik sehen, dass die durch die variirenden Deformationen erzeugten Elasticitätsänderungen Temperaturänderungen hervorrufen, welche in den gewöhnlichen festen Körpern die Geschwindigkeit der Fortleitung longitudinaler Vibrationen merklich grösser machen, als die nach der im Text angegebenen Regel, unter Benutzung des dort definirten statischen Modulus, berechnete Geschwindigkeit ist. Wir werden die Wärmewirkung dadurch in Rechnung zu ziehen lernen, dass wir einen bestimmten statischen Modulus oder kinetischen Modulus je nach den Umständen jedes gegebenen Falles in Anwendung bringen.

die Masseneinheit an diesem Orte hat. Die Experimentatoren haben bisher bei der Mittheilung ihrer Resultate die Gravitationseinheit angewandt, jeder für seinen eigenen Beobachtungsort. Uebrigens ist die bis jetzt erzielte Genauigkeit kaum in einem Falle so gross, dass man wegen der Verschiedenheit der Schwere an den verschiedenen Beobachtungsorten Correctionen anzubringen hätte.

689. Die nützlichste und allgemein passende Bestimmung des Elasticitätsmodulus einer Substanz ist die Bestimmung in Grammgewicht per Quadratcentimeter. Ist der Modulus auf diese Weise ausgedrückt, so hat man ihn nur durch das specifische Gewicht der Substanz zu dividiren, um die Länge des Modulus zu erhalten. Da jedoch unglücklicher Weise bei der Angabe praktischer und sogar wissenschaftlicher Resultate manchmal noch britische Maasse angewendet werden, so werden wir Gelegenheit haben, den Modulus in Pfunden per Quadratzoll oder Quadratfuss und die Länge des Modulus in Fuss auszudrücken.

690. Meistens ist in englischen Lehrbüchern der Mechanik nach Pfunden per Quadratzoll gerechnet. Den so ausgedrückten Modulus muss man durch das Gewicht von 12 Cubikzoll des festen Körpers, oder durch das Product seines specifischen Gewichts in 0,4337 *) dividiren, um die Länge des Modulus in englischen Fuss zu erhalten.

Um von Pfund per Quadratzoll auf Gramm per Quadratcentimeter zu reduciren, hat man mit 70,31 zu multipliciren oder durch

*) Dieser Decimalbruch ist das Gewicht von 12 Cubikzoll Wasser, angegeben in englischen Pfunden. Der eine grosse Vorzug des französischen Maasssystems ist der, dass die Masse der Volumeneinheit (1 Cbcm.) Wasser bei der Temperatur seiner grössten Dichtigkeit (3,945° C.) bis zu einem für fast alle Zwecke der Praxis genügenden Grad der Genauigkeit die Einheit (1 Gramm) ist. Nach diesem System haben also die Dichtigkeit und das specifische Gewicht eines Körpers dieselbe Bedeutung, während nach dem britischen System die Dichtigkeit durch eine Zahl ausgedrückt wird, die man erhält, wenn man das specifische Gewicht mit einer Zahl multiplicirt, welche von der gewählten Volumeneinheit (Cubikzoll, Cubikfuss, Cubikelle, Cubikmeile) und der gewählten Masseneinheit (Gran, Scrupel, Drachme, Unze, Pfund, Stein, Centner, Tonne, u. s. w.) abhängig ist. Es ist eine bemerkenswerthe Erscheinung, welche mehr in das Bereich der moralischen und der socialen, als der Naturwissenschaft, gehört, dass ein Volk, dem doch gesunder Menschenverstand nicht abzusprechen ist, sich freiwillig, wie die Engländer so lange gethan haben, in jeder mit Messungen verbundenen Handlung des täglichen Geschäfts oder der wissenschaftlichen Arbeit zu unnöthiger schwerer Arbeit verdammt hat, von der alle übrigen europäischen Nationen sich frei gemacht haben. Herr Professor W. H. Miller in Cambridge hatte die Güte, uns mitzutheilen, dass ein sehr sorgfältiger Vergleich der Normalmaasse, den Kupffer aus Petersburg angestellt, für das Gewicht eines Cbdm. Wassers bei der Temperatur seiner grössten Dichtigkeit 1000,013 Gramm ergeben hat.



0,014223 zu dividiren. Die französischen Ingenieure drücken ihre Resultate allgemein in Kilogramm per Quadratmillimeter aus und bringen dieselben so auf passendere Zahlen; letztere sind $^1/_{100000}$ der unbequemen (grossen) Zahlen, welche die Moduln in Gramm per Quadratcentimeter geben.

691. Dieselben Betrachtungen hinsichtlich der Einheiten, reducirenden Factoren und Benennungen lassen sich auf den Widerstand eines elastischen festen oder flüssigen Körpers gegen Compression und auf die Starrheit (§ 680) eines isotropen Körpers, oder allgemein auf jeden der 21 Coefficienten, welche [§ 673 (14)] die Reactionen durch die Deformationen ausdrücken, sowie auf den reciproken Werth jedes dieser 21 Coefficienten, wodurch [§ 673 (16)] die Deformation durch die Reaction ausgedrückt wird, endlich auch auf den Young'schen Modulus anwenden.

692. Die bei einer einfachen longitudinalen Deformation stattfindende Reaction. — In §§ 681, 682 untersuchten wir die Wirkung einer einfachen longitudinalen Kraft, die eine Ausdehnung in ihrer eigenen Richtung und eine Zusammenziehung in den Linien erzeugt, die zu ihrer Richtung senkrecht sind. Wenn wir statt der Deformationen Reactionen und statt der Reactionen Deformationen setzen, so können wir dasselbe Verfahren zur Bestimmung der longitudinalen und der seitlichen Zugkräfte anwenden, die erfordert werden, um in einem Stabe oder einem festen Körper von beliebiger Form eine einfache longitudinale Deformation (d. i. eine in einer Richtung erfolgende Ausdehnung, die von keiner Aenderung der Dimensionen in den zu dieser Richtung senkrechten Linien begleitet ist) zu erzeugen.

So ist eine einfache longitudinale Deformation e einer von keiner Formänderung begleiteten cubischen Ausdehnung e (oder einer in allen Richtungen gleichen linearen Ausdehnung $^1/_3\, e$) und zwei Schiebungen äquivalent, von denen jede aus der Ausdehnung $^1/_3\, e$ in der gegebenen Richtung und der Zusammenziehung $^1/_3\, e$ in einer der beiden Richtungen besteht, die zur ersteren Richtung und zu einander senkrecht sind. Um die cubische Ausdehnung e allein zu erzeugen, ist (§ 680) ein in allen Richtungen gleicher Zug ke in der Richtung der Normalen erforderlich, und zur Hervorbringung jeder der beiden Schiebungen bedarf es, da das Maass (§ 175) einer jeden $^2/_3\, e$ ist, eines verschiebenden Zwanges von der Grösse $n \cdot {}^2/_3\, e$, welcher aus tangentialen Zugkräften besteht, von denen jede $n \cdot {}^2/_3\, e$

beträgt, und von denen die eine positiv (nach aussen hin ziehend) ist und in der Linie der gegebenen Elongation wirkt, während die andere negativ (nach innen zu drückend) ist und senkrecht zur ersteren wirkt. Wir erhalten also im Ganzen: —

(4) Der normale Zug ist $= (k + \frac{4}{3} n) e$ in der Richtung der gegebenen Dehnung, und
der normale Zug ist $= (k - \frac{2}{3} n) e$ in jeder zur gegebenen Dehnung senkrechten Richtung.

693. Reactionscomponenten, ausgedrückt durch die Deformation. — Setzen wir jetzt voraus, es sei einem Körper irgend eine nach § 669 ausgedrückte mögliche unendlich kleine Deformation (e, f, g, a, b, c) gegeben, so wird die Reaction (P, Q, R, S, T, U), deren es bedarf, um den Körper in diesem deformirten Zustande zu erhalten, durch die folgenden Formeln ausgedrückt, die man erhält, indem man successive § 692 (4) auf die Componenten e, f, g und § 680 auf a, b, c einzeln anwendet: —

$$(5)\quad \begin{cases} S = na, \quad T = nb, \quad U = nc, \\ P = \mathfrak{A}e + \mathfrak{B}(f + g), \\ Q = \mathfrak{A}f + \mathfrak{B}(g + e), \\ R = \mathfrak{A}g + \mathfrak{B}(e + f), \\ \text{wo} \\ \left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} = k + \dfrac{4n}{3} \\ \mathfrak{B} = k - \dfrac{2n}{3} \text{ ist} \end{array}\right\} n = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}). \end{cases}$$

694. Deformationscomponenten, ausgedrückt durch die Reaction. — Auf ähnliche Weise erhalten wir durch § 680 und § 682 (3)

$$(6)\quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{n} S, \quad b = \dfrac{1}{n} T, \quad c = \dfrac{1}{n} U, \\ Me = \{P - \sigma(Q + R)\}, \\ Mf = \{Q - \sigma(R + P)\}, \\ Mg = \{R - \sigma(P + Q)\}, \\ \text{wo } M = \dfrac{9nk}{3k + n} \\ \text{und } \dfrac{m - n}{2m} = \sigma = \dfrac{3k - 2n}{2(3k + n)} = \frac{1}{2}\dfrac{M}{n} - 1 \text{ ist,} \end{cases}$$

als die Formeln, welche die Deformation (e, f, g, a, b, c) durch die Reaction (P, Q, R, S, T, U) ausdrücken. Dieselben sind natürlich bloss die algebraischen Umkehrungen der Formeln (5) und hätten (§ 673) durch Auflösung der Gleichungen (5) für e, f, g, a, b, c als Unbekannte gefunden werden können. M ist hier eingeführt, um Young's Modulus (§ 683) zu bezeichnen, und m wird unten in § 698 (5) definirt werden.

695. Gleichung der Energie für einen isotropen Körper. — Um die Gleichung der Energie für eine isotrope Substanz aufzustellen, können wir die allgemeine Formel [§ 673 (20)]

$$w = \tfrac{1}{2}(Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc)$$

nehmen und aus derselben mittels § 693 (5) P, Q, u. s. w., oder auch mittels § 694 (6) e, f, u. s. w. eliminiren. Wir finden auf diese Weise

$$(7)\quad \begin{cases} 2w = \left(k + \dfrac{4n}{3}\right)(e^2 + f^2 + g^2) + 2\left(k - \dfrac{2n}{3}\right)(fg + ge + ef) \\ \qquad\qquad + n(a^2 + b^2 + c^2) \\ \quad = \tfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{3k}\right)(P^2 + Q^2 + R^2) - 2\left(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{3k}\right)(QR + RP + PQ)\right\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{n}(S^2 + T^2 + U^2). \end{cases}$$

696. Fundamentalprobleme der mathematischen Theorie. — Die mathematische Theorie des Gleichgewichts eines elastischen festen Körpers bietet die folgenden allgemeinen Probleme dar: —

Auf die Substanz eines festen Körpers, der im ungestörten Zustande eine beliebig gegebene Form hat, wirken Kräfte ein, die auf eine beliebig gegebene Weise in ihm vertheilt sind, und auf seiner Oberfläche werden willkürlich Verschiebungen erzeugt oder Kräfte angebracht. Man soll die Verschiebung jedes Punktes der Substanz bestimmen.

Dies Problem ist vollständig für eine Schale von homogener isotroper Substanz gelöst worden, die im ungestörten Zustande von concentrischen Kugelflächen begrenzt wird (§ 735), aber noch nicht für einen Körper von einer anderen Form. Die Beschränkungen, unter denen Lösungen für andere Fälle (dünne Platten und Stäbe) erlangt sind, die, wie wir gesehen haben, zu praktisch wich-

tigen Resultaten führen, sind oben (§§ 588, 632) angegeben worden. Der Beweis der oben anticipirten Gesetze (§§ 591, 633) wird auch eine unserer Anwendungen der allgemeinen Gleichungen für das innere Gleichgewicht eines elastischen festen Körpers sein, zu deren Bestimmung wir uns jetzt wenden.

697. **Bedingungen des inneren Gleichgewichts.** — Man kann von jedem Theil im Innern eines elastischen festen Körpers annehmen, er werde vollkommen starr (§ 564); durch diese Annahme wird das Gleichgewicht weder des Theils selbst, noch der um ihn her liegenden Masse gestört. Folglich muss der von der ihn einschliessenden Masse ausgeübte Zug, den man als ein auf seine Oberfläche vertheiltes Kraftsystem anzusehen hat, im Verein mit den auf die Substanz des betrachteten Theils von aussen einwirkenden Kräften den Bedingungen des Gleichgewichts der Kräfte genügen, die auf einen starren Körper wirken. Drückt man dies für ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepiped des Körpers aus, so erhält man die allgemeine Differentialgleichung des inneren Gleichgewichts eines elastischen festen Körpers. Es ist zu beachten, dass hier drei Gleichungen genügen, da die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräftepaare wegen der oben (§ 661) hergeleiteten Relation zwischen den sechs Paaren tangentialer Zugcomponenten, die auf die sechs Seitenflächen des Parallelepipeds wirken, von selbst erfüllt sind.

Es sei (x, y, z) irgend ein Punkt im Innern des festen Körpers und δx, δy, δz die den rechtwinkligen Coordinatenaxen beziehungsweise parallelen Kanten eines unendlich kleinen Parallelepipeds des Körpers, welches jenen Punkt zum Centrum hat.

Wenn P, Q, R, S, T, U die Reaction in (x, y, z) bezeichnen (§ 662), so werden die Mittelwerthe der auf die Flächen des Parallelepipeds wirkenden Zugcomponenten (siehe die Tabelle des § 669) folgende sein: —

$$\text{auf die beiden Flächen } \delta y\,\delta z \text{ wirken} \left\{ \begin{array}{ll} \pm\left(P \pm \dfrac{dP}{dx} \cdot \tfrac{1}{2}\,\delta x\right) \delta y\,\delta z & \text{parallel } OX, \\ \pm\left(U \pm \dfrac{dU}{dx} \cdot \tfrac{1}{2}\,\delta x\right) \delta y\,\delta z & \quad\text{"}\quad OY, \\ \pm\left(T \pm \dfrac{dT}{dx} \cdot \tfrac{1}{2}\,\delta x\right) \delta y\,\delta z & \quad\text{"}\quad OZ. \end{array} \right.$$

Nehmen wir die symmetrischen Ausdrücke für die auf die beiden anderen Flächenpaare wirkenden Zugkräfte und summiren für alle Flächen alle den drei Axen einzeln parallelen Componenten, so erhalten wir

$$\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dU}{dy}+\frac{dT}{dz}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z \text{ parallel } OX$$

$$\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dS}{dz}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z \quad \text{„} \quad OY,$$

$$\left(\frac{dT}{dx}+\frac{dS}{dy}+\frac{dR}{dz}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z \quad \text{„} \quad OZ.$$

Es mögen nun X, Y, Z die für die Volumeneinheit genommenen Componenten der auf die Substanz im Punkte (x, y, z) einwirkenden Kraft bezeichnen; für den kleinen betrachteten Theil sind dann diese Componenten $X\delta x\delta y\delta z$, $Y\delta x\delta y\delta z$, $Z\delta x\delta y\delta z$. Wenn wir diese Ausdrücke zu den oben gefundenen entsprechenden Componenten der Zugkräfte addiren, die erhaltenen Summen gleich Null setzen und den Factor $\delta x\;\delta y\;\delta z$ unterdrücken, so ergibt sich

$$2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dP}{dx}+\dfrac{dU}{dy}+\dfrac{dT}{dz}+X=0 \\ \dfrac{dU}{dx}+\dfrac{dQ}{dy}+\dfrac{dS}{dz}+Y=0 \\ \dfrac{dT}{dx}+\dfrac{dS}{dy}+\dfrac{dR}{dz}+Z=0; \end{cases}$$

dies sind die allgemeinen Gleichungen der zum Bestehen des Gleichgewichts erforderten inneren Reaction.

Wenn wir für P, Q, R, S, T, U die linearen Functionen von e, f, g, a, b, c einsetzen, welche wir in § 673 (14) für jene Grössen hergeleitet haben, so erhalten wir die Gleichungen der inneren Deformation. Und wenn wir vermittels § 670 (6) e, f, g, a, b, c eliminiren, so erhalten wir für die Componenten (α, β, γ) der Verschiebung eines beliebigen inneren Punktes, ausgedrückt durch die Coordinaten (x, y, z) seiner anfänglichen Lage im Körper, drei lineare partielle Differentialgleichungen zweiten Grades, welche die Gleichungen des inneren Gleichgewichts in ihrer letzten Form sind. Wir bemerken noch, dass, wenn die Coefficienten (e, e), (e, f), u. s. w. nicht als Constante, sondern als gegebene Functionen von x, y, z angesehen werden, die Betrachtung nicht auf einen homogenen Körper beschränkt bleibt.

698. Die Gleichungen des inneren Gleichgewichts involviren, dass die auf jeden als starr angesehenen Theil wirkenden Kräfte den sechs Gleichungen des Gleichgewichts in einem starren Körper genügen. — Da diese Gleichungen für das Gleichgewicht des Körpers erforderlich und hinreichend sind, so muss, ihre Gültigkeit vorausgesetzt, die Bedingung des § 697 für jeden beliebigen Körper und jeden nicht unendlich grossen Theil desselben erfüllt sein; dies lässt sich leicht bewahrheiten.

Es bezeichne $\iiint$ eine Integration durch den Raum eines beliebigen Theils des festen Körpers, $d\sigma$ ein Element der diesen Theil um-

grenzenden Fläche und $\left[\int\int\right]$ eine Integration, die sich über diese ganze Fläche erstreckt. Es ist dann

$$\int\int\int X\,dx\,dy\,dz = -\int\int\int\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dU}{dy} + \frac{dT}{dz}\right) dx\,dy\,dz.$$

Wenn wir jedes Glied der rechten Seite einmal integriren, die Grenzen wie im Zusatz A gehörig berücksichtigen und die Richtungscosinus der durch $d\sigma$ gehenden Normalen mit l, m, n bezeichnen, so folgt

$$\int\int\int X\,dx\,dy\,dz = -\left[\int\int(P\,dy\,dz + U\,dz\,dx + T\,dx\,dy)\right]$$
$$= -\left[\int\int(Pl + Um + Tn)\,d\sigma\right],$$

mithin [§ 662 (1)]

$$(3) \qquad \int\int\int X\,dx\,dy\,dz + \left[\int\int F\,d\sigma\right] = 0.$$

Weiter erhalten wir

$$\int\int\int(yZ - zY)\,dx\,dy\,dz$$
$$= -\int\int\int\left\{y\left(\frac{dT}{dx} + \frac{dS}{dy} + \frac{dR}{dz}\right) - z\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dS}{dz}\right)\right\} dx\,dy\,dz.$$

Wenn wir jetzt partiell integriren und weiter wie im Zusatz A) verfahren, so ergibt sich

$$\int\int\int y\,\frac{dS}{dy}\,dx\,dy\,dz = \left[\int\int yS m\,d\sigma\right] - \int\int\int S\,dx\,dy\,dz$$

und

$$\int\int\int z\,\frac{dS}{dz}\,dx\,dy\,dz = \left[\int\int zS n\,d\sigma\right] - \int\int\int S\,dx\,dy\,dz.$$

Daraus folgt

$$\int\int\int\left(y\,\frac{dS}{dy} - z\,\frac{dS}{dz}\right)dx\,dy\,dz = \left[\int\int(ySm - zSn)\,d\sigma\right].$$

Wenn man dies im vorhergehenden Ausdruck benutzt, jedes der übrigen Glieder wie oben einmal einfach integrirt und auf § 662 (1) Rücksicht nimmt, so erhält man

$$(4) \qquad \int\int\int(yZ - zY)\,dx\,dy\,dz + \left[\int\int(yH - zG)\,d\sigma\right] = 0.$$

Damit sind die sechs Gleichgewichtsgleichungen hergeleitet. Es sind dies (3), (4) und die symmetrischen Gleichungen in y und z.

Vereinfachung der Gleichungen für einen isotropen festen Körper. — Für einen isotropen festen Körper werden die Gleichungen (2) natürlich viel einfacher. Wenn man unter Anwendung von § 693 (5) e, f, g, a, b, c vermittels § 670 (6) eliminirt, die erhaltenen Glieder passend gruppirt und

$$(5) \qquad m = k + \tfrac{1}{3}n$$

setzt, so ergibt sich

$$(6)\quad \begin{cases} m\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\alpha}{dx}+\dfrac{d\beta}{dy}+\dfrac{d\gamma}{dz}\right)+n\left(\dfrac{d^2\alpha}{dx^2}+\dfrac{d^2\alpha}{dy^2}+\dfrac{d^2\alpha}{dz^2}\right)+X=0\\ m\,\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\alpha}{dx}+\dfrac{d\beta}{dy}+\dfrac{d\gamma}{dz}\right)+n\left(\dfrac{d^2\beta}{dx^2}+\dfrac{d^2\beta}{dy^2}+\dfrac{d^2\beta}{dz^2}\right)+Y=0\\ m\,\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{d\alpha}{dx}+\dfrac{d\beta}{dy}+\dfrac{d\gamma}{dz}\right)+n\left(\dfrac{d^2\gamma}{dx^2}+\dfrac{d^2\gamma}{dy^2}+\dfrac{d^2\gamma}{dz^2}\right)+Z=0, \end{cases}$$

oder, wie wir kurz schreiben können,

$$(7)\quad \begin{cases} m\,\dfrac{d\delta}{dx}+n\,\nabla^2\alpha+X=0\\ m\,\dfrac{d\delta}{dy}+n\,\nabla^2\beta+Y=0\\ m\,\dfrac{d\delta}{dz}+n\,\nabla^2\gamma+Z=0, \end{cases}$$

wenn wir

$$(8)\quad \frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\gamma}{dz}=\delta$$

und

$$(9)\quad \frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}=\nabla^2$$

setzen, so dass δ die Grösse der von der Substanz erlittenen Ausdehnung und ∇^2 das schon oben [Zusatz A und B, §§ 491, 492, 499, u. s. w.] benutzte Symbol ist.

699. St. Venant's Anwendung auf Torsionsprobleme. — Eine der schönsten Anwendungen, die bis jetzt von den allgemeinen Gleichungen des inneren Gleichgewichts eines elastisch-festen Körpers gemacht worden sind, ist die von St. Venant „über die Torsion der Prismen" *). Auf das eine Ende eines langen geraden prismatischen Stabes, Drahtes oder eines vollen oder hohlen Cylinders von beliebiger Form wirkt in einer zur Länge senkrechten Ebene ein gegebenes Kräftepaar ein, während das andere Ende festgehalten wird: man soll die Grösse der erzeugten Drillung (§ 120) und die Vertheilung der Deformation und elastischen Reaction durch das Prisma bestimmen. Die Bedingungen, die hier erfüllt werden müssen, bestehen darin, dass die resultirende Wirkung zwischen den zu beiden Seiten eines jeden Normalschnitts liegenden Substanztheilen ein dem gegebenen Kräftepaar gleiches Kräftepaar in der Normalebene ist. Die zur Lösung des Problems erforderliche Arbeit wird bedeutend vereinfacht, wenn wir erst die folgenden einleitenden Sätze beweisen: —

---

*) Mémoires des Savants Etrangers. 1855. „De la Torsion des Prismes, avec des Considérations sur leur Flexion", etc.

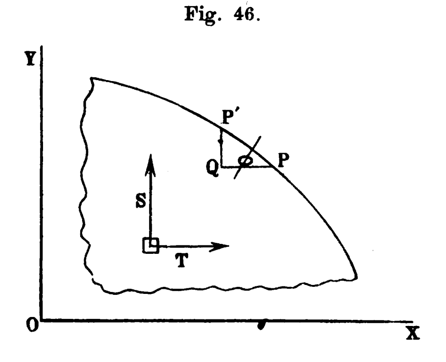
700. Hülfssätze. — Auf die Umgrenzung eines (äolotropen oder isotropen) Körpers wirken von aussen her Kräfte in einer solchen Weise ein, dass in seinem Innern kein Zug in Richtung der Normalen auf eine der Ebenen stattfindet, welche einer gegebenen Ebene XOY parallel oder zu derselben senkrecht sind; dies involvirt natürlich, dass keine verschiebende Reaction auftritt, deren Axen in dieser Ebene oder ihr parallel sind, und dass die ganze Reaction in jedem Punkte des Körpers eine einfache verschiebende Reaction ist, welche aus tangentialen Kräften in einer gewissen Richtung in der XOY parallelen Ebene und in der zu dieser Richtung senkrechten Ebene besteht. Dann gelten folgende Sätze: —

(I.) Die innere verschiebende Reaction muss in allen Theilen des festen Körpers, welche in irgend einer zur Ebene XOY senkrechten Linie liegen, gleich und gleichgerichtet sein.

(II.) Wenn, wie vorausgesetzt wird, der Zug in jedem Punkte jeder zur Ebene XOY senkrechten Fläche eine Kraftvertheilung in Linien ist, die zu dieser Ebene senkrecht sind, so muss der Gesammtbetrag derselben für jede zu XOY senkrechte prismatische oder cylindrische Oberfläche, die von XOY parallelen Ebenen geschlossen wird, Null sein.

(III.) Wenn man die innerhalb der prismatischen Fläche und der in (II.) angegebenen Grenzebenen enthaltene Masse für einen Augenblick (§ 564) als starr ansieht, so wird das System der in (II.) erwähnten Zugkräfte ein Kräftepaar ausmachen, dessen Moment, dividirt durch den Abstand jener Grenzebenen von einander, gleich der Resultante der auf die Fläche einer jeden dieser Ebenen wirkenden Zugkräfte, und dessen Ebene den Linien dieser resultirenden Kräfte parallel ist. Mit anderen Worten: das in Beziehung auf irgend eine Linie (OY oder OX) in der Ebene XOY genommene Moment des über die in (II.) beschriebene prismatische Fläche vertheilten Kraftsystems ist gleich der Summe der zu derselben Linie senkrechten Componenten (T oder S) des Zuges in

Fig. 46.



jeder der beiden Grenzebenen, multiplicirt mit dem Abstande zwischen diesen Ebenen.

Um (I.) zu beweisen, sehen wir für einen Augenblick (§ 564) ein unendlich kleines Prisma AB (von der Schnittfläche ω), das zu XOY senkrecht ist, und dessen ebene Endflächen A, B der Ebene XOY parallel sind, als starr an. Da auf seine Seiten (oder die cylindrische Grenzfläche) keine zu seiner Länge senkrechten Kräfte wirken, so erfordert (§ 551, I.) sein Gleichgewicht, soweit es sich um eine Bewegung in der Richtung irgend einer zu seiner Länge senkrechten Linie OX handelt, dass die Componenten der auf seine Enden wirkenden Zugkräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet seien. Folglich müssen, um uns der Bezeichnung des § 662 zu bedienen, die Componenten T der verschiebenden Reaction in A und B und aus demselben Grunde die Reactionscomponenten S gleich sein.

Fig. 47.

Um (II.) und (III.) zu beweisen, haben wir nur zu bemerken, dass das Gleichgewicht des in (III.) beschriebenen starren Prismas nach § 551, I. und II. das Bestehen dieser Sätze fordert.

Analytisch gelangen wir zu diesen Sätzen auf folgende Weise: — Da nach der Voraussetzung $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $P=0$, $Q=0$, $R=0$, $U=0$ ist, so liefern die allgemeinen Gleichungen (2) des § 697

$$\frac{dT}{dz}=0,\quad \frac{dS}{dz}=0 \tag{1}$$

und

$$\frac{dT}{dx}+\frac{dS}{dy}=0. \tag{2}$$

Nun zeigt (1), dass S und T Functionen von x und y allein (von z unabhängig) sind, und damit ist der Satz (I.) bewiesen.

Bezeichnet weiter $\int\int$ eine Integration durch irgend eine in XOY liegende geschlossene Fläche, so erhalten wir

$$\int\int\left(\frac{dT}{dx}+\frac{dS}{dy}\right)dx\,dy=\left[\int(T\,dy+S\,dx)\right]^{*}).$$

Wenn im zweiten Gliede dieser Formel die Grenzen der ausgeführten und

*) Die Klammern [ ] bezeichnen hier, dass das eingeschlossene Integral für die ganze Curve genommen werden soll, welche die in Rede stehende Fläche umgrenzt.



der angedeuteten Integration richtig bestimmt werden, so ergibt sich, dass dasselbe gleich

$$\int (T \sin \varphi + S \cos \varphi)\, ds$$

ist, wo $\int$ eine Integration, die sich über die ganze Grenzcurve, ds ein Element der Länge dieser Curve und φ die Neigung von ds gegen XO bezeichnen. Nach § 662 (1) ist aber, wenn $l = \sin \varphi$, $m = \cos \varphi$, $n = 0$ angenommen wird,

$$H = T \sin \varphi + S \cos \varphi, \tag{3}$$

wo H den wie gewöhnlich für die Flächeneinheit gerechneten (OZ parallelen) Zug bezeichnet, den die umgrenzende prismatische Oberfläche erfährt. Folglich ist

$$\int\int \left(\frac{dT}{dx} + \frac{dS}{dy}\right) dx\, dy = \int H\, ds, \tag{4}$$

also nach (2)

$$\int H\, ds = 0, \tag{5}$$

und dies ist der analytische Ausdruck des Satzes (II).

Wird jetzt partiell integrirt und (nach 2) $\frac{dS}{dy}$ statt $-\frac{dT}{dx}$ geschrieben, so erhält man

$$(6) \begin{cases} \int\int T\, dx\, dy = \left[\int Tx\, dy\right]^* - \int\int x \frac{dT}{dx}\, dx\, dy \\ = \left[\int Tx\, dy\right]^* + \int\int x \frac{dS}{dy}\, dx\, dy = \left[\int Tx\, dy\right]^* + \left[\int Sx\, dx\right]^* \\ = \int x\, (T \sin \varphi + S \cos \varphi)\, ds = \int x H\, ds, \end{cases}$$

und dies beweist den Satz (III).

701. Torsion eines Cylinders mit kreisförmiger Basis. — Für einen vollen oder hohlen Cylinder von kreisförmiger Basis ist die (unseres Wissens zuerst von Coulomb gegebene) Lösung des in § 699 aufgestellten Problems offenbar die, dass jeder kreisförmige Normalschnitt in seinen Dimensionen, seiner Gestalt und seiner inneren Anordnung unverändert bleibt (so dass jede gerade Linie seiner Massenpunkte eine Gerade von derselben Länge bleibt), aber um die Axe des Cylinders durch einen solchen Winkel sich dreht, dass eine gleichförmige Drillung (§ 120) erzeugt wird, welche gleich ist dem einwirkenden Kräftepaar, dividirt durch das Product des Trägheitsmoments der kreisförmigen Fläche (sei dieselbe nun ringförmig oder eine bis zum Centrum hin vollständige Kreisfläche) in die Starrheit der Substanz.

Denn wenn wir voraussetzen, die angegebene Deformation werde durch Einführung des erforderlichen Zwanges wirklich erzeugt, so haben wir in jedem Theile der Substanz eine einfache Schiebung parallel dem Normalschnitt und senkrecht zu dem durch denselben gehenden Radius. Um der elastischen Reaction dieser Schiebung das Gleichgewicht zu halten, ist (§§ 679, 682) ein einfach schiebender Zwang erforderlich, welcher aus Kräften im Normalschnitt, die der Schiebung gleichgerichtet sind, und aus Kräften in den durch die Axe gehenden Ebenen besteht, welche der Axe parallel gerichtet sind. Die Grösse der Schiebung ist für die Theile der Substanz, welche den Abstand r von der Axe haben, offenbar gleich τr, wenn τ die Grösse der Drillung ist. Folglich ist die Grösse der Tangentialkraft in jeder der beiden Ebenenschaaren für die Einheit der Fläche $n \tau r$, wenn n die Starrheit der Substanz ist. Es wirkt daher keine Kraft zwischen den Substanztheilen zu beiden Seiten eines Elements eines jeden Cylinders von kreisförmiger Basis, der mit dem Grenzcylinder oder den Grenzcylindern die Axe gemeinschaftlich hat; und somit braucht auf die cylindrische Grenzfläche keine Kraft einzuwirken, um den vorausgesetzten Deformationszustand zu erhalten. Die Wechselwirkung zwischen den Substanztheilen zu beiden Seiten eines jeden ebenen Normalschnitts besteht aus der Kraft in dieser Ebene; diese Kraft ist senkrecht zu dem durch jeden Punkt gehenden Radius und beträgt $n \tau r$ für die Einheit der Fläche. Das Moment dieser Kraftvertheilung in Beziehung auf die Axe des Cylinders ist (wenn $d\sigma$ ein Element der Fläche bezeichnet) $n\tau \int\int d\sigma r^2$, oder das Product von $n\tau$ in das Trägheitsmoment der Fläche in Beziehung auf die durch das Centrum gehende zur Ebene senkrechte Linie; es ist folglich gleich dem Moment des in jeder Endfläche wirkenden Kräftepaars.

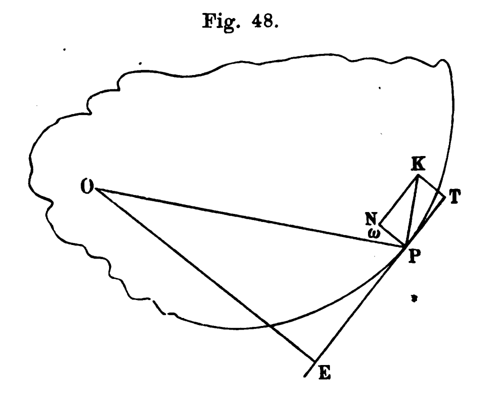
702. Die auf den Seitenflächen eines beliebigen Prisma für eine einfache Drillung erforderliche Zugkraft. — Auf ähnliche Weise erkennen wir, dass, wenn ein Cylinder oder Prisma von irgend einer Form gezwungen wird, genau den oben (§ 701) angegebenen Deformationszustand anzunehmen, wo statt der Axe des Cylinders die Verbindungslinie der Trägheitsmittelpunkte der Normalschnitte zu setzen ist, die Wechselwirkung zwischen den zu beiden Seiten jedes Normalschnitts liegenden Massentheilen ein Kräftepaar sein wird, dessen Moment sich durch dieselbe Formel ausdrücken lässt; dasselbe ist nämlich das Product aus der Starrheit, der Grösse der Drillung und dem in Beziehung auf den Trägheitsmittelpunkt genommenen Trägheitsmoment des Schnittes.

Dies zu beweisen, haben wir den obigen Entwicklungen nur noch hinzuzufügen, dass, wenn die im Normalschnitt wirkenden Kräfte nach zwei beliebigen zu einander senkrechten Richtungen OX, OY zerlegt werden, die Summen der Componenten, die beziehungsweise $n\tau \int\int x \, d\sigma$

und $n\tau\int\int y\,d\sigma$ sind, in Folge der Eigenschaft (§ 230) des Trägheitsmittelpunktes einzeln verschwinden.

703. Wenn das Prisma nicht ein voller oder hohler symmetrischer Cylinder von kreisförmiger Basis ist, sondern irgend eine andere Form hat, so erfordert der vorausgesetzte Deformationszustand ausser den an den Enden wirkenden entgegengesetzten Kräftepaaren noch eine über die prismatische Umgrenzung vertheilte, der Länge des Prisma parallele Kraft, welche dem längs der Tangente gemessenen Abstande jedes Punktes der Oberfläche von dem Punkte proportional ist, in welchem diese Tangente von einer vom Trägheitsmittelpunkte des Normalschnitts aus auf sie gezogenen Senkrechten geschnitten wird. Dies zu beweisen nehmen wir an, die Fig. 48 stelle einen Normalschnitt des Prisma dar. Die Strecke PK, welche die Schiebung in irgend einem der prismatischen Grenze nahe liegenden Punkte P darstellen möge, werde in die beziehungsweise in den Richtungen der Normalen und der Tangente genommenen Componenten PN und PT zerlegt. Da die ganze Schiebung PK gleich τr ist, so ist ihre Componente PN gleich $\tau r \sin\omega$ oder $\tau . PE$. Die entsprechende Componente der erforderten elastischen Reaction ist $n\tau . PE$ und besteht (§ 661) aus gleichen Kräften in der Ebene der Zeichnung und der durch TP gehenden zur Ebene der Zeichnung senkrechten Ebene, von denen jede für die Einheit der Fläche $n\tau . PE$ beträgt.

Fig. 48.



Ein System von Kräften, welche den in der eben angegebenen Weise über die prismatische Umgrenzung vertheilten gleich und entgegengesetzt sind, würde natürlich für sich allein in dem sonst freien Prisma einen Deformationszustand erzeugen, welcher, verbunden mit dem oben vorausgesetzten, den Deformationszustand ausmachen würde, welcher wirklich entsteht, wenn man bloss die einander das Gleichgewicht haltenden Kräftepaare an den Enden anbringt. Das Ergebniss ist, wie man leicht sieht (und wie unten bewiesen werden wird), eine vermehrte Drillung und zugleich eine

Krümmung der von Natur ebenen Normalschnitte, die sich durch unendlich kleine zu ihren Ebenen senkrechte Verschiebungen in gewisse Flächen von anticlastischer Krümmung umbiegen, bei denen die durch jeden Punkt gehenden Hauptschnitte (§ 130) gleiche und entgegengesetzte Krümmungen haben. Diese Theorie verdanken wir St. Venant, der nicht nur die Falschheit der von mehreren früheren Schriftstellern gemachten Voraussetzung, dass das Coulomb'sche Gesetz auch für andere Prismenformen als für volle oder hohle Cylinder von kreisförmiger Basis gelte, nachwies, sondern auch die Natur der erforderten Correction vollständig entdeckte, die Bestimmung derselben auf ein Problem der reinen Mathematik zurückführte, die Lösung für eine grosse Menge wichtiger und merkwürdiger Fälle ausarbeitete, die Resultate in einer dem Physiker genügenden und interessanten Weise mit der Beobachtung verglich und Schlüsse von grossem praktischen Werthe für den Ingenieur zog.

704. Analoges Problem der Hydrokinetik. — Die Identität der mathematischen Bedingungen in dem auf die Torsion bezüglichen Probleme von St. Venant und einem einige Jahre früher zuerst von Stokes*) gelösten hydrokinetischen Problem veranlasst uns, den folgenden Satz mitzutheilen, der sich sehr nützlich erweisen wird bei der Berechnung des Betrages, um welchen der Widerstand gegen eine Torsion kleiner ist, als die aus der falschen Ausdehnung des Coulomb'schen Gesetzes berechnete Grösse.

705. Man denke sich, eine Flüssigkeit von der Dichtigkeit n fülle vollständig ein geschlossenes unendlich dünnes prismatisches Gefäss, dessen innerer Raum dieselbe Form wie das gegebene elastische Prisma, und welches die Einheit zur Länge hat. Auf das Gefäss wirke in einer zur Länge desselben senkrechten Ebene ein Kräftepaar ein. Das wirksame Trägheitsmoment der Flüssigkeit**) ist dann gleich dem Betrage, um welchen der aus der falschen Ausdehnung des Coulomb'schen Gesetzes berechnete Widerstand des elastischen Prisma gegen eine Torsion verringert werden muss, um die richtige Grösse dieses Widerstandes zu liefern.

---

*) „On some cases of Fluid Motion." — Camb. Phil. Trans. 1843.

**) Das ist das Trägheitsmoment eines starren festen Körpers, welcher, wie im zweiten Bande bewiesen werden wird, in dem Gefässe nach Entfernung der Flüssigkeit befestigt werden kann und so beschaffen ist, dass dasselbe dann die nämlichen Bewegungen vollführt, wie wenn es die Flüssigkeit enthält.

Weiter ist die wirkliche Schiebung des festen Körpers in jeder zwischen zwei Normalschnitten liegenden unendlich dünnen Platte desselben, wenn man diese Schiebung als ein den Schnittebenen paralleles unendlich kleines Gleiten (§ 172) ansieht, in jedem Punkte der Geschwindigkeit, welche die Flüssigkeit in Beziehung auf das sie einschliessende Gefäss hat, gleich und gleich gerichtet.

706. **Lösung des Torsionsproblems.** — Um diese Sätze zu beweisen und die mathematischen Gleichungen des Problems aufzustellen, zeigen wir erstens, dass die Bedingungen des vorliegenden Falles (§ 699) durch einen Deformationszustand erfüllt werden, welcher aus (1) einer einfachen Drillung um die Verbindungslinie der Trägheitsmittelpunkte und (2) einer Verzerrung jedes Normalschnitts durch unendlich kleine zu seiner Ebene senkrechte Verschiebungen besteht; darauf ermitteln wir die inneren und die Oberflächengleichungen zur Bestimmung dieser Krümmung, und zum Schluss berechnen wir das wirkliche Moment des Kräftepaars, welchem die Wechselwirkung zwischen den zu beiden Seiten eines beliebigen Normalschnitts liegenden Massentheilen äquivalent ist.

Durch einen passend gewählten Punkt O (der nicht gerade der Trägheitsmittelpunkt zu sein braucht) in einem beliebigen Normalschnitt legen wir die Axen OX, OY und nehmen OZ senkrecht zu diesen Linien an. Ein Punkt (x, y, z) des undeformirten festen Körpers möge durch die oben beschriebene zusammengesetzte Deformation in eine Lage gelangen, welche die Coordinaten $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$ hat. Dann ist γ eine von z unabhängige Function von x und y, und wenn wir die Drillung (1) nach der in § 120 gegebenen einfachen Berechnungsart mit τ bezeichnen, so erhalten wir

$$(7)\qquad \begin{cases} x+\alpha = x\cos(\tau z) - y\sin(\tau z) \\ y+\beta = x\sin(\tau z) + y\cos(\tau z), \end{cases}$$

folglich für unendlich kleine Werthe von z

$$(8)\qquad \alpha = -\tau y z, \quad \beta = \tau x z.$$

Nun ist nach §§ 670, 693, wenn wir statt der lateinischen deutsche Buchstaben benutzen, im Uebrigen aber die Bezeichnung beibehalten,

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{e} = 0, \quad \mathfrak{f} = 0, \quad \mathfrak{g} = 0, \\ \mathfrak{a} = \tau x + \dfrac{d\gamma}{dy}, \; \mathfrak{b} = -\tau y + \dfrac{d\gamma}{dx}, \; \mathfrak{c} = 0, \end{cases}$$

mithin [§ 693 (5)]

$$(10)\qquad \begin{cases} P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0 \\ S = n\left(\tau x + \dfrac{d\gamma}{dy}\right), \quad T = n\left(-\tau y + \dfrac{d\gamma}{dx}\right), \quad U = 0, \end{cases}$$

und nach der Bezeichnung des § 698, (8) und (9)

(11) $$\delta = 0, \quad \nabla^2 \alpha = 0, \quad \Delta^2 \beta = 0.$$

Wenn also auch

(12) $$\frac{d^2 \gamma}{d x^2} + \frac{d^2 \gamma}{d y^2} = 0$$

ist, so sind die Gleichungen des inneren Gleichgewichts [§ 698 (6)] sämmtlich erfüllt.

Für den auf die Oberfläche ausgeübten Zug erhalten wie bei Anwendung der Bezeichnung der §§ 662, 700 aus § 662 (1)

(13) $$F = 0, \quad G = 0, \quad H = T \sin \varphi + S \cos \varphi.$$

Hieraus eliminiren wir T und S mittels der Formeln (10); ausserdem führen wir die Grössen $\frac{d\gamma}{dp}$ zur Bezeichnung der Variation von γ in der zur prismatischen Oberfläche senkrechten Richtung und q (die Linie PE der Fig. 48, § 703) zur Bezeichnung des Abstandes des Oberflächenpunktes, für welchen H ausgedrückt wird, von dem Schnittpunkt der Tangentialebene und einer von O auf dieselbe gezogenen Senkrechten ein. Auf diese Weise ergibt sich

(14) $$\begin{cases} H = n \left\{ \left(\frac{d\gamma}{dy} \cos \varphi + \frac{d\gamma}{dx} \sin \varphi \right) - \tau \left(y \sin \varphi - x \cos \varphi \right) \right\}, \\ \text{oder } H = n \left(\frac{d\gamma}{dp} - \tau q \right). \end{cases}$$

Um die Wechselwirkung zu bestimmen, welche zwischen den zu beiden Seiten eines Normalschnitts liegenden Massentheilen stattfindet, bemerken wir zunächst, dass, insofern jeder der beiden Theile der betrachteten zusammengesetzten Deformation (die Drillung und die Krümmung der Normalschnitte) einzeln den Bedingungen des § 700 genügt,

(15) $$\iint T \, dx \, dy = \iint x \, H \, ds, \text{ und} \iint S \, dx \, dy = \int y \, H \, ds$$

sein muss. Wenn also die für die Oberfläche vorgeschriebene Bedingung $H = 0$ erfüllt ist, so erhalten wir

(16) $$\iint T \, dx \, dy = 0, \iint S \, dx \, dy = 0,$$

und es bleibt nur ein Kräftepaar

(17) $$\begin{cases} N = \iint (Sx - Ty) \, dx \, dy \\ = n\tau \iint (x^2 + y^2) \, dx . dy - n \iint \left(y \frac{d\gamma}{dx} - x \frac{d\gamma}{dy} \right) dx \, dy \end{cases}$$

in der Ebene des Normalschnitts. Jene Bedingung $H = 0$ liefert nach (14) für jeden Punkt der prismatischen Fläche

(18) $$\frac{d\gamma}{dp} = \tau q, \text{ oder } \frac{d\gamma}{dy} \cos \varphi + \frac{d\gamma}{dx} \sin \varphi = \tau \left(y \sin \varphi - x \cos \varphi \right).$$

Wir werden im zweiten Bande sehen, dass (12) und (18) Differentialgleichungen sind, welche eine Function γ von x und y bestimmen, die so beschaffen ist, dass $\frac{d\gamma}{dx}$ und $\frac{d\gamma}{dy}$ die Geschwindigkeitscomponenten einer vollkommenen Flüssigkeit bedeuten, welche sich anfänglich in

einem prismatischen Gefäss, wie wir es in § 705 beschrieben haben, in Ruhe befand und dadurch in Bewegung gesetzt worden ist, dass man dem Gefäss in der als negativ gerechneten Richtung eine Winkelgeschwindigkeit τ um OZ ertheilte. Ferner wird sich zeigen, dass das Zeitintegral (§ 297) des Kräftepaars, durch welches diese Bewegung plötzlich oder allmälig erzeugt ist, d. i. der Ueberschuss von $n\tau \int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy$ über N, den Werth $n \int\int \left(x \frac{d\gamma}{dy} - y \frac{d\gamma}{dx}\right) dx\, dy$ hat. Auch sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in (9) die OX und OY parallelen Geschwindigkeitscomponenten der Flüssigkeit in Beziehung auf das Gefäss, da $-\tau y$ und τx die Geschwindigkeitscomponenten eines Punktes (x, y) sind, welcher in der positiven Richtung mit der Winkelgeschwindigkeit τ um OZ rotirt. Wir erhalten somit die zu erweisenden Sätze (§ 705).

707. St. Venant's Ermittlung lösbarer Fälle. — St. Venant findet auf zwei Wegen Lösungen dieser Gleichungen: — (A) Er nimmt eine beliebige Lösung von (12) und bestimmt eine Schaar von Curven, für deren jede (18) erfüllt ist; jede dieser Curven kann daher als die Grenze der Basis eines Prisma angenommen werden, auf welches jene Lösung anwendbar sein soll. (B) Er löst nach der rein analytischen Methode Fourier's mit Rücksicht auf die Oberflächengleichung (18) die Gleichung (12) für den besonderen Fall eines rechtwinkligen Prisma.

(A.) Auf dem ersteren Wege erhält St. Venant folgendermaassen ein allgemeines Integral der als Differentialgleichung in den beiden Veränderlichen x, y angesehenen Bedingung, welcher die Umgrenzung zu genügen hat: — Multiplicirt man (18) mit ds und ersetzt die Grössen $\sin\varphi\, ds$ und $\cos\varphi\, ds$ durch ihre Werthe dy und $-dx$, so erhält man

$$\frac{d\gamma}{dx}\, dy - \frac{d\gamma}{dy}\, dx - \tfrac{1}{2}\tau\, d\,(x^2 + y^2) = 0. \tag{19}$$

Hier machen die beiden ersten Glieder ein vollständiges Differential einer Function der unabhängig Veränderlichen x und y aus, da γ der Gleichung (12) genügt. Wird diese Function mit u bezeichnet, so folgt

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{du}{dy} \text{ und } \frac{d\gamma}{dy} = -\frac{du}{dx}, \tag{20}$$

und (19) verwandelt sich in

$$du - \tfrac{1}{2}\tau\, d\,(x^2 + y^2) = 0,$$

was für jeden Punkt in der Umgrenzung

$$u - \tfrac{1}{2}\tau\,(x^2 + y^2) = C \tag{21}$$

erfordert. Wir bemerken, dass, weil

$$\frac{d}{dx}\frac{d\gamma}{dy} = \frac{d}{dy}\frac{d\gamma}{dx}$$

ist, aus (20)

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{d^2 u}{d y^2} = 0 \tag{22}$$

folgt, oder dass auch u, wie γ, der Gleichung $\nabla^2 u = 0$ genügt. Eine in Beziehung auf x, y algebraisch homogene Function, welche dieser Gleichung genügt, ist [Zusatz B (a)] eine von z unabhängige harmonische Kugelfunction. Eine homogene Lösung von einem ganzzahligen Grade n kann also nur der Theil des Zusatzes B (39) sein, welcher z nicht enthält. Dieser ist

$$C \xi^n + C' \eta^n,$$

wo [Zusatz B (26)] $\xi = x + y \sqrt{-1}$ und $\eta = x - y \sqrt{-1}$ ist, oder, wenn wir die Constanten so ändern, dass das imaginäre Symbol beseitigt wird,

$$A\{(x+y\sqrt{-1})^n + (x-y\sqrt{-1})^n\} - \sqrt{-1}\, B\{(x+y\sqrt{-1})^n - (x-y\sqrt{-1})^n\}, \tag{23}$$

oder in Polarcoordinaten

$$2 r^n (A \cos n\vartheta + B \sin n\vartheta). \tag{24}$$

Lösung für einen Cylinder mit elliptischer Basis. — Wenden wir diese Lösung für den Fall $n = 2$ an, und setzen (unbeschadet der Allgemeinheit) $B = 0$, so erhalten wir

$$u = 2 A (x^2 - y^2), \tag{25}$$

woraus nach (20)

$$\gamma = - 4 A x y \tag{26}$$

folgt, und die Gleichung (21) der Grenzcurven, auf welche sich diese Lösung anwenden lässt, ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{27}$$

wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{-C}{\frac{1}{2}\tau - 2A} = a^2, \quad \frac{-C}{\frac{1}{2}\tau + 2A} = b^2$$

setzen, was

$$4 A = \tau \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

liefert, so dass (26) in

$$\gamma = - \tau \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x y \tag{28}$$

übergeht. Bei Benutzung dieses Resultats folgt aus (17)

$$N = n\tau \left\{ \int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \int\int (x^2 - y^2)\, dx\, dy \right\},$$

oder wenn I, J die beziehungsweise für die Axen der x und der y genommenen Trägheitsmomente der Fläche des Normalschnitts bezeichnen,

$$N = n\tau \left\{ J + I - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (J - I) \right\}, \tag{29}$$

oder endlich, da wir für die elliptische Fläche (27)



$$I = \frac{\pi a b}{4} b^2, \quad J = \frac{\pi a b}{4} a^2$$

haben,

$$(30) \qquad N = n\tau\,(J + I)\left\{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2\right\} = n\tau\,\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Zu einem andern sehr einfachen, aber recht interessanten Fall, den St. Venant gleichfalls untersucht hat, gelangt man, wenn man für u eine harmonische Function dritten Grades nimmt. Um die folgenden Ausdrücke homogen zu machen und auf eine passende Form zu bringen, empfiehlt es sich, einen Factor $\frac{1}{2}\frac{\tau}{a}$ einzuführen; es ergibt sich

$$(31) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\tau}{a}\,(x^3 - 3y^2x) - \frac{1}{2}\tau\,(x^2 + y^2) = C, \\ \text{oder in Polarcoordinaten} \\ \frac{1}{2}\frac{\tau}{a}\,r^3 \cos 3\vartheta - \frac{1}{2}\tau r^2 = C \end{cases}$$

als eine Gleichung, welche für verschiedene Werthe von C eine Schaar von Grenzcurven liefert, für die

$$(32) \qquad \gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau}{a}\,(y^3 - 3x^2y) = -\frac{1}{2}\frac{\tau}{a}\,r^3 \sin 3\vartheta$$

die der Bedingung (18) unterworfene Lösung von (12) ist.

Lösung für einen Cylinder, dessen Basis ein gleichseitiges Dreieck ist. — Für den besonderen Werth

$$C = -\frac{2}{27}\,a^2\tau$$

liefert (31) drei gerade Linien, die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, für welches a die Senkrechte von einer Ecke auf die gegenüberstehende Seite ist, und dessen Lage zur x- und y-Axe die Figur 50 des § 708 zeigt. Wir haben also die vollständige Lösung des Torsionsproblems für ein Prisma, dessen Normalschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist. Wird die Gleichung (17) für diese Fläche ausgearbeitet und für γ der Werth (32) benutzt, so erhält man

$$N = n\,(K - \tfrac{2}{5}K)\tau.$$

Es ist aber (da K das wirkliche Trägheitsmoment und A die Fläche des Dreiecks ist)

$$K = \frac{a^4}{9\sqrt{3}} = \frac{a^2}{9}A = \frac{A^2}{3\sqrt{3}},$$

und somit ergeben sich für den Widerstand gegen eine Torsion die verschiedenen Ausdrücke

$$(33) \quad N - \tau = \tfrac{3}{5}nK = n\frac{a^4}{15\sqrt{3}} = n\frac{a^2}{15}A = n\frac{A^2}{5\sqrt{3}} = n\frac{A^4}{45\,K}.$$

Lösung für einen Cylinder, dessen Basis ein krummliniges Quadrat ist. — Auf ähnliche Weise fand St. Venant, indem er für u eine harmonische Function vierten Grades nahm und die Constanten passend wählte, die Gleichung

$$(34) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - a\,(x^4 - 6\,x^2 y^2 + y^4) = 1 - a \\ \text{oder} \quad r^2 - a\,r^4 \cos 4\,\vartheta = 1 - a, \end{cases}$$

welche für verschiedene Werthe von a eine Schaar krummliniger Quadrate [siehe Fig. 51, § 708 (3)] liefert, welche sämmtlich abgerundete Ecken haben, mit Ausnahme zweier ähnlichen, aber gegen die Axen verschieden gelegenen Curven; diesen letzteren, die den Werthen $a = 0{,}5$ und $a = -\,{}^1\!/_2\,(\sqrt{2} - 1)$ entsprechen, haben concave Seiten und spitze Winkel. Für jede dieser Curven ist das Torsionsproblem algebraisch gelöst.

Lösung für einen Cylinder, dessen Basis ein Stern mit vier abgerundeten Ecken ist. — Indem St. Venant weiter u als Summe zweier harmonischen Functionen annahm, die beziehungsweise vom vierten und achten Grade sind, und die Constanten passend wählte, fand er

$$35 \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{r_0^2} - \dfrac{48}{49} \cdot \dfrac{16}{17} \cdot \dfrac{x^4 - 6\,x^2 y^2 + y^4}{r_0^4} \\ + \dfrac{12}{49} \cdot \dfrac{16}{17} \dfrac{x^8 - 28\,x^6 y^2 + 70\,x^4 y^4 - 28\,x^2 y^6 + y^8}{r_0^8} = 1 - \dfrac{36}{49} \cdot \dfrac{16}{17} \\ \text{oder} \quad \dfrac{r^2}{r_0^2} - \dfrac{48}{49} \cdot \dfrac{16}{17} \dfrac{r^4 \cos 4\,\vartheta}{r_0^4} + \dfrac{12}{49} \cdot \dfrac{16}{17} \cdot \dfrac{r^8 \cos 8\,\vartheta}{r_0^8} = 1 - \dfrac{36}{49} \cdot \dfrac{16}{17} \end{cases}$$

als die Gleichung der unten in § 709 Fig. 66 gezeichneten Curve, für welche daher das Torsionsproblem gelöst ist.

Reduction des Problems von St. Venant auf das von Green. — (B.) Die Integration (21) der Gleichung der Umgrenzung, welche St. Venant in seiner synthetischen Entwicklung (A) benutzte, ist auch in der analytischen Untersuchung von grossem Nutzen, obwohl St. Venant sie nicht dazu verwandt hat. Wir bemerken erstens, dass die Bestimmung von u für eine gegebene Prismenform ein besonderer Fall des im Zusatz A (e) als möglich und bestimmt erwiesenen „Green-schen Problems" ist, indem dieses darin besteht, eine Function u von x und y zu finden, welche für jeden Punkt der von einer der Bedingung

$$(36) \qquad u = {}^1\!/_2\,\tau\,(x^2 + y^2)$$

genügenden geschlossenen Curve umgrenzten Fläche die Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d\,x^2} + \frac{d^2 u}{d\,y^2} = 0$$

erfüllt.

Wenn u bestimmt worden ist, so vervollständigen die Gleichungen (20) und (17) in Verbindung mit (10) die Lösung des Torsionsproblems.

Lösung für ein rechteckiges Prisma. — Für den Fall eines rechteckigen Prisma wird die Lösung bedeutend vereinfacht durch die Annahme

$$(37) \quad \begin{cases} u = v + A\,(x^2 - y^2) + B, \\ \text{welche } \dfrac{d^2 v}{d\,x^2} + \dfrac{d^2 v}{d\,y^2} = 0 \\ \text{und für die Grenzbedingung} \\ v = ({}^1\!/_2\,\tau - A)\,x^2 + ({}^1\!/_2\,\tau + A)\,y^2 - B \\ \text{liefert.} \end{cases}$$

Wenn das Rechteck nicht quadratisch ist, so mögen seine längeren Seiten parallel OX sein; ferner seien a, b beziehungsweise die Längen jeder der längeren und jeder der kürzeren Seiten. Nehmen wir jetzt

(38) $$A = \tfrac{1}{2}\tau \quad \text{und} \quad B = \tfrac{1}{4}\,\tau b^2$$

an, so verwandelt sich die Grenzbedingung in

(39) $$\begin{cases} v = 0, & \text{wenn } y = \pm \tfrac{1}{2} b \\ v = -\tau\,(\tfrac{1}{4} b^2 - y^2), & \text{wenn } x = \pm \tfrac{1}{2} a \text{ ist.} \end{cases}$$

Um das Problem nach Fourier's Methode zu lösen (vergl. das schwierigere Problem des § 655), müssen wir $\tfrac{1}{4} b^2 - y^2$ in eine harmonische Reihe entwickeln. Die Entwicklung *) ist offenbar

(40) $$\tfrac{1}{4} b^2 - y^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \left\{ \cos\eta - \frac{1}{3^3}\cos 3\eta + \frac{1}{5^3}\cos 5\eta - \text{u. s. w.} \right\},$$

wo der Kürze wegen

(41) $$\eta = \frac{\pi y}{b}$$

gesetzt worden ist. Setzt man aus demselben Grunde

(41) $$\xi = \frac{\pi x}{b},$$

so erhalten wir für die Form der Lösung

(42) $$v = \Sigma\,\{A_{2n+1}\, e^{-(2n+1)\xi} + B_{2n+1}\, e^{+(2n+1)\xi}\} \cos(2n+1)\,\eta,$$

welcher Ausdruck (37) genügt und $v = 0$ für $y = \pm \tfrac{1}{2} b$ liefert. Die noch übrig gebliebene Grenzbedingung liefert zur Bestimmung von A_{2n+1} und B_{2n+1}

(43) $$\begin{cases} \left[A_{2n+1}\, e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{2b}} + B_{2n+1}\, e^{+(2n+1)\frac{\pi a}{2b}}\right] \\ = \left[A_{2n+1}\, e^{+(2n+1)\frac{\pi a}{2b}} + B_{2n+1}\, e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{2b}}\right] = -\tau b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen geben einen gemeinsamen Werth für die beiden Unbekannten A_{2n+1}, B_{2n+1}, durch dessen Einsetzung (42) sich in

(44) $$v = -\tau\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2\, \Sigma \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\, \frac{e^{-(2n+1)\xi} + e^{+(2n+1)\xi}}{e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{2b}} + e^{+(2n+1)\frac{\pi a}{2b}}} \cos(2n+1)\,\eta$$

verwandelt. Hieraus erhalten wir mit Benutzung von (37), (38) und (20)

(45) $$\gamma = -\tau x y + \tau \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2\, \Sigma \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\, \frac{e^{+(2n+1)\xi} - e^{-(2n+1)\xi}}{e^{+(2n+1)\frac{a}{2b}} + e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{2b}}} \sin(2n+1)\eta,$$

---

*) Man kann dieselbe natürlich aus dem allgemeinen Fourier'schen Satze herleiten; leichter erhält man sie aber durch zwei successive Integrationen der bekannten Formel

$$\tfrac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\left(\cos\vartheta - \tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta + \tfrac{1}{5}\cos 5\vartheta - \text{u. s. w.}\right).$$

und (17) liefert für den Widerstand gegen eine Torsion

$$(46)\qquad N-\tau=n\,a\,b^3\left[\tfrac{1}{3}-\left(\frac{2}{\pi}\right)^5\frac{b}{a}\Sigma\frac{1}{(2n+1)^5}\,\frac{1-e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{b}}}{1+e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{b}}}\right].$$

Wenn wir in allen Hinsichten wie oben verfahren wären und nur $A=-\tfrac{1}{2}\tau$ statt $A=\tfrac{1}{2}\tau$ in (37) angenommen hätten, so würden wir Ausdrücke für γ und $N-\tau$ erhalten haben, welche von den gegebenen anscheinend ganz verschieden sind, aber nothwendig dieselben Werthe liefern. Man kann diese anderen Ausdrücke ohne Weiteres niederschreiben, wenn man in (45) und (46) x, y, a, b statt y, x, b, a setzt und jedem Gliede von (45) das entgegengesetzte Zeichen gibt. Die neuen Ausdrücke convergiren offenbar nicht so rasch wie (45) und (46), wenn, wie wir vorausgesetzt haben, $a>b$ ist, und dies ist der Grund, weshalb wir den oben eingeschlagenen Weg dem andern Wege vorgezogen haben. Der Vergleich der Resultate liefert bemerkenswerthe Sätze der reinen Mathematik, wie sie selten denjenigen Mathematikern aufstossen, die sich auf die reine Analysis oder Geometrie beschränken, statt sich in die reichen und schönen Gebiete der am Wege physikalischer Forschungen liegenden mathematischen Wahrheiten zu begeben.

Eine Relation, welche Stokes*) und Lamé**) unabhängig von einander entdeckten [wir haben dieselbe schon in den Gleichungen (20), (22) benutzt] gestattet uns, wenn wir sie mit Lamé's Methode der krummlinigen Coordinaten***) verbinden, Fourier's analytische Methode auf eine grosse Klasse krummliniger Rechtecke auszudehnen, welche das geradlinige Rechteck als einen besonderen Fall in sich schliesst. Das geschieht auf folgende Weise: —

Es sei ξ eine Function von x, y, welche der Gleichung

$$(47)\qquad \frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{d^2\xi}{dy^2}=0$$

genügt, und da dies zeigt, dass $\frac{d\xi}{dx}dy-\frac{d\xi}{dy}dx$ ein vollständiges Differential ist, so sei

$$(48)\qquad \eta=\int\left(\frac{d\xi}{dx}dy-\frac{d\xi}{dy}dx\right),$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$(49)\qquad \frac{d\eta}{dy}=\frac{d\xi}{dx}\text{ und }\frac{d\eta}{dx}=-\frac{d\xi}{dy}.$$

Auch diese andere Function η genügt, wie wir aus (49) sehen, der Gleichung

$$(50)\qquad \frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{d^2\eta}{dy^2}=0.$$

---

*) On the Steady Motion of Incompressible Fluids. Camb. Phil. Trans., 1842.

**) Mémoire sur les lois de l'Equilibre du Fluide Ethéré. Journal de l'Ecole Polytechnique, 1834.

***) Siehe Thomson, on the Equations of the Motion of Heat referred to Curvilinear coordinates. Camb. Math. Journal, 1845.

Ebenso geht aus (49) hervor, dass zwei einander schneidende Curven, deren Gleichungen

$$\xi = A, \quad \eta = B \tag{51}$$

sind, rechtwinklig aufeinander stehen. Es werden nun, A und B als gegeben vorausgesetzt, x und y durch diese beiden Gleichungen bestimmt. Den Punkt, dessen Coordinaten x, y sind, kann man sich auch als durch (A, B), d. h. durch die Werthe von ξ, η bestimmt denken, welche Curven liefern, die sich in (x, y) schneiden. Danach bestimmt (ξ, η), wenn man ξ und η irgend welche besonderen Werthe beilegt, einen Punkt in einer Ebene. Die gewöhnlichen geradlinigen Coordinaten sind offenbar ein besonderer Fall (geradlinige rechtwinklige Coordinaten) des Systems der so definirten krummlinigen rechtwinkligen Coordinaten. Es werde nun eine beliebige Function u von x, y durch ξ, η ausgedrückt. Durch Differentiation erhalten wir

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{d\xi^2}\left(\frac{d\xi^2}{dx^2} + \frac{d\xi^2}{dy^2}\right) + 2\frac{d^2u}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy}\frac{d\eta}{dy}\right) \\ \qquad + \frac{d^2u}{d\eta^2}\left(\frac{d\eta^2}{dx^2} + \frac{d\eta^2}{d\ ^2}\right) + \frac{du}{d\xi}\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2}\right) + \frac{du}{d\eta}\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dy^2}\right), \end{cases} \tag{52}$$

was durch (49) und (50) auf

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = \left(\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{d^2u}{d\eta^2}\right)\left(\frac{d\xi^2}{dx^2} + \frac{d\xi^2}{dy^2}\right) \tag{53}$$

reducirt wird. Die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

transformirt sich also in

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{d^2u}{d\eta^2} = 0. \tag{54}$$

Auch gehen die Relationen

$$\frac{du}{dy} = \frac{d\gamma}{dx}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{d\gamma}{dy}$$

wegen (49) über in

$$\frac{du}{d\eta} = \frac{d\gamma}{d\xi}, \quad \frac{du}{d\xi} = -\frac{d\gamma}{d\eta}. \tag{55}$$

Das allgemeine Problem, u und γ zu bestimmen, führt also zu genau denselben Ausdrücken in ξ, η, wie das oben [(22), (36) und (20)] behandelte in x, y; es findet nur der Unterschied statt, dass wir nicht $u = \frac{1}{2}\tau\,(\xi^2 + \eta^2)$, sondern, wenn $f\,(\xi, \eta)$ die Function von ξ, η bezeichnet, in welche sich $x^2 + y^2$ transformirt, für jeden Punkt der Umgrenzung

$$u = \frac{1}{2}\tau f\,(\xi, \eta) \tag{56}$$

haben.

Die Lösung für das krummlinige Rechteck

$$\begin{cases} \xi = \alpha & \eta = \beta \\ \xi \quad 0 & \eta = 0 \end{cases} \tag{57}$$

nach dem Fourier'schen Plan ist

$$
(58)\qquad
\begin{aligned}
u &= \Sigma \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha}\left(A_n e^{\frac{n\pi\eta}{\alpha}} + A'_n e^{-\frac{n\pi\eta}{\alpha}}\right)\\
&+ \Sigma \sin \frac{n\pi\eta}{\beta}\left(B_n e^{\frac{n\pi\xi}{\beta}} + B'_n e^{-\frac{n\pi\xi}{\beta}}\right),
\end{aligned}
$$

wo A_n, A_n' durch zwei Gleichungen bestimmt werden müssen, die man folgendermaassen erhält: — Man setze den Coefficienten von $\sin \frac{n\pi\xi}{\alpha}$, wenn $\eta = 0$ und wenn $\eta = \beta$ ist, beziehungsweise gleich den Coefficienten von $\sin \frac{n\pi\xi}{\alpha}$ in den nach dem Fourier'schen Satze (§ 77) erhaltenen Entwicklungen von $f(\xi, 0)$ und $f(\xi, \beta)$ in Reihen von der Form

$$
(59)\qquad P_1 \sin \frac{\pi\xi}{\alpha} + P_2 \sin \frac{2\pi\xi}{\alpha} + P_3 \sin \frac{3\pi\xi}{\alpha} + \text{u. s. w.}
$$

Auf ähnliche Weise werden B_n, B_n' aus den Entwicklungen von $f(0, \eta)$ und $f(\alpha, \eta)$ in Reihen von der Form

$$
(60)\qquad Q_1 \sin \frac{\pi\eta}{\beta} + Q_2 \sin \frac{2\pi\eta}{\beta} + Q_3 \sin \frac{3\pi\eta}{\beta} + \text{u. s. w.}
$$

bestimmt.

Beispiel. Ein von zwei concentrischen Bogen und zwei Radien begrenztes Rechteck. — Von einem äusserst einfachen, theoretisch sehr interessanten und für die praktische Mechanik nützlichen Beispiel wollen wir die Details angeben. Es sei

$$
(61)\qquad \xi = \log \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}}.
$$

Dieser Ausdruck genügt offenbar (47) und liefert nach (48)

$$
(62)\qquad \eta = \arctan \frac{y}{x}.
$$

Die Lösung kann durch eine Reihe von Sinus der Vielfachen von $\frac{\pi\eta}{\alpha}$ [nach dem Plane von (37) . . . (45)] ausgedrückt werden, indem man

$$
(63)\qquad u = v + \tfrac{1}{2}\, \tau a^2 \frac{e^{2\xi} \cos(\beta - 2\eta)}{\cos \beta}
$$

macht*), was in Verbindung mit (54)

$$
(64)\qquad \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{d^2 v}{d\eta^2} = 0
$$

liefert und als Grenzbedingungen in der Lösung für v

$$
(65)\qquad
\begin{cases}
v = \tfrac{1}{2}\, \tau a^2 \left\{1 - \dfrac{\cos(\beta - 2\eta)}{\cos \beta}\right\}, \text{ wenn } \xi = 0\\[2ex]
v = \tfrac{1}{2}\, \tau a^2 e^{2\alpha} \left\{1 - \dfrac{\cos(\beta - 2\eta)}{\cos \beta}\right\}, \text{ wenn } \xi = \alpha\\[2ex]
\text{und } v = 0, \text{ wenn } \eta = 0 \text{ und wenn } \eta = \beta \text{ ist}
\end{cases}
$$

*) Man übersehe nicht, dass diese Lösung für den Fall $\beta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ illusorisch wird.

ergibt. Die letzte Bedingung zeigt, dass der B_n und B_n' enthaltende Theil von (58) geeignet ist, v auszudrücken, und die beiden ersten bestimmen B_n und $B_{n'}$ in der gewöhnlichen Weise.

Wenn es am besten ist, das Resultat in einer Reihe von Sinus der Vielfachen von $\frac{n\xi}{\alpha}$ zu haben, so können wir

$$u = w + \tfrac{1}{2}\tau a^2 \left(1 + \frac{e^{2\alpha} - 1}{\alpha}\xi\right) \tag{66}$$

nehmen, was in Verbindung mit (54)

$$\frac{d^2 w}{d x^2} + \frac{d^2 w}{d y^2} = 0 \tag{67}$$

liefert und als Grenzbedingungen in der Lösung für w

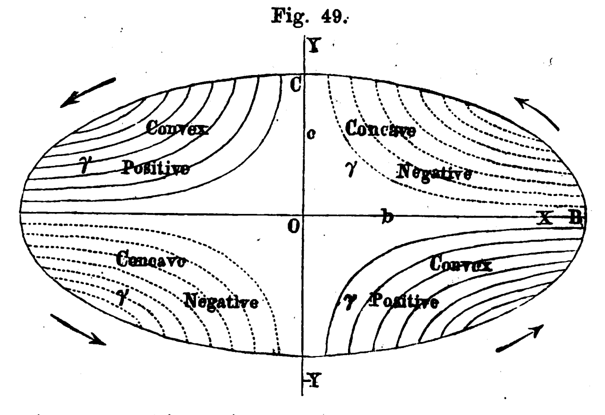
$$(68)\begin{cases} w = \tfrac{1}{2}\tau a^2 \left\{e^{2\xi} - 1 - \frac{e^{2\alpha} - 1}{\alpha}\xi\right\}, \text{ wenn } \eta = 0 \text{ und wenn } \eta = \beta \\ w = 0, \text{ wenn } \xi = 0 \text{ und wenn } \xi = \alpha \text{ ist} \end{cases}$$

ergibt. Die letzte zeigt, dass der A_n und A'_n enthaltende Theil von (58) zur Bestimmung von w passend ist, und die beiden ersten bestimmen A_n, A'_n.

708. St. Venant's Arbeit ist reich an schönen und lehrreichen graphischen Erläuterungen seiner Resultate, von denen wir die folgenden auswählen: —

(1.) **Cylinder mit elliptischer Basis.** — Die einfachen und punktirten Linien sind die „topographischen Contouren“

Fig. 49.



(coupes topographiques) des durch die Torsion gekrümmten Normalschnitts, d. h. die Linien, in welchen der Normalschnitt von einer Schaar der Axe paralleler Ebenen geschnitten wird, oder die Linien, für deren jede γ (§ 706) einen anderen constanten Werth hat. Diese Linien sind in diesem Falle [§ 707 (28)] gleichseitige

Hyperbeln. Der Pfeil zeigt die Richtung der Rotation in dem über der Ebene der Zeichnung liegenden Theil des Prisma an.

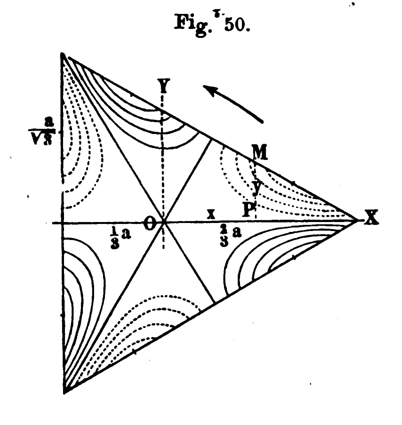
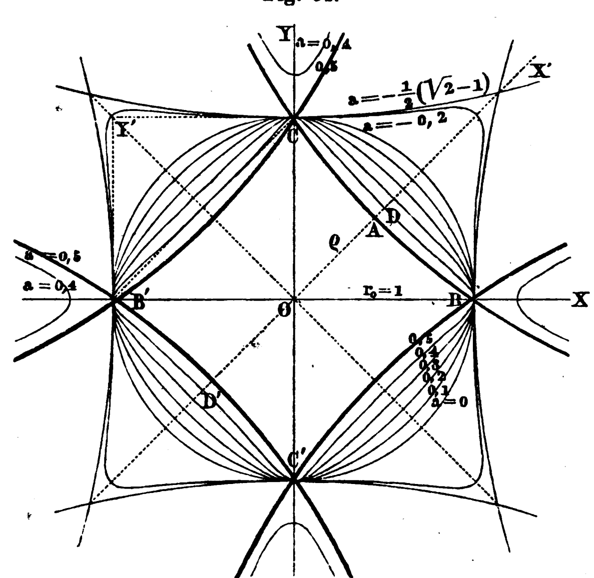


Fig. 50.

(2.) Prisma, dessen Basis ein gleichseitiges Dreieck ist. — Die Contouren sind wie im Falle (1) gezeichnet, und zwar sind die punktirten Curven diejenigen, wo der gekrümmte Schnitt unter die Ebene der Zeichnung hinabsinkt. Die Richtung, in welcher der über dieser Ebene befindliche Theil des Prisma rotirt, ist durch den gebogenen Pfeil angegeben.

(3.) Die Figur 51 zeigt die Schaar der Linien, welche die Formel (34) des § 707 für die beigefügten Werthe von a darstellt. Es ist bemerkenswerth, dass die Werthe $a = 0{,}5$ und $a = -\,{}^1/_2\,(\sqrt{2} - 1)$ ähnliche, aber nicht gleiche krummlinige

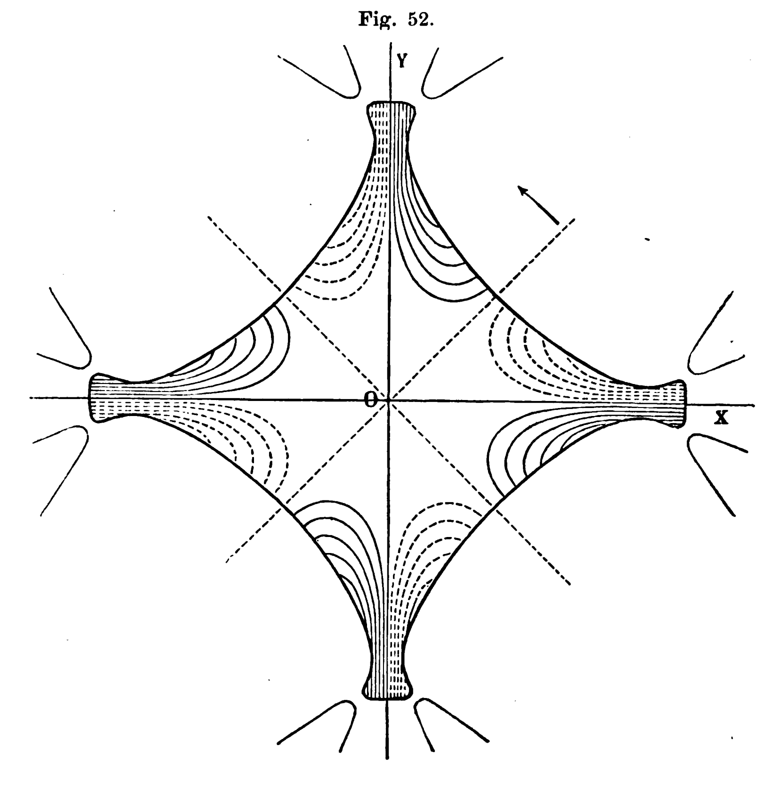
Fig. 51.



Quadrate (concave Seiten und spitze Winkel) liefern, von denen das eine durch einen Winkel von 45⁰ gedreht werden muss, um mit dem andern gleiche Lage zu erhalten. Alles, was in der Zeichnung ausserhalb des grösseren dieser Quadrate liegt, hat man als nicht zum physikalischen Problem gehörig wegzuschneiden; die Schaar der übrig bleibenden geschlossenen Curven stellt die Grundlinien von Prismen dar, für deren jedes das Torsionsproblem gelöst ist. Diese Figuren variiren continuirlich von einem Kreise aus, der sich innerhalb des einen jener spitzwinkligen Vierecke und ausserhalb des andern befindet, und diese beiden Grenzlinien ausgenommen, ist jede Figur eine continuirliche geschlossene Curve ohne Winkel. Die den Werthen $a = 0{,}4$ und $a = -0{,}2$ entsprechenden Curven sind nur äusserst wenig von den geradlinigen Quadraten verschieden, die in der Figur theilweise durch punktirte Linien angedeutet sind.

(4.) Contouren für St. Venant's „étoile à quatre points arrondis." Die Fig. 52 zeigt ganz, wie es in den Fällen (1.) und (2.) geschehen ist, die Contouren für den Fall eines Prisma, welches

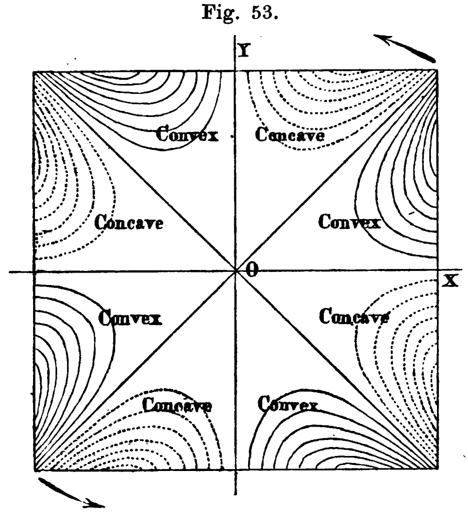
Fig. 52.



die angegebene Figur zum Normalschnitt hat. Die ausserhalb der continuirlichen geschlossenen Curven liegenden Curventheile sind bloss Darstellungen der mathematischen Erweiterungen und haben keine Beziehung zum physikalischen Problem.

(5.) Die Fig. 53 zeigt, wie die Figuren 49 bis 52 in den übrigen Fällen, die Contouren für den gekrümmten Schnitt eines gedrillten Prisma von quadratischer Grundfläche.

Fig. 53.



(6.), (7.), (8.) Die Figuren 54, 55, 56 sind schattirte Zeichnungen, welche die Formen von Stäben mit elliptischer, quadratischer und rechteckiger Basis darstellen, wenn man dieselben einer übergrossen Torsion unterwirft, wie sie bei einer Substanz wie Gummi elasticum ausgeführt werden kann.

709. Verhältniss des Widerstandes gegen eine Torsion zur Summe der Hauptbiegungswiderstände. — Insofern das Trägheitsmoment einer ebenen Fläche in Beziehung auf eine durch ihren Trägheitsmittelpunkt gehende zu ihrer Ebene senkrechte Axe offenbar gleich ist der Summe ihrer Trägheitsmomente in Beziehung auf zwei beliebige durch denselben Punkt gehende zu einander senkrechte Linien ihrer Ebene, so würde die in § 703 angegebene falsche Ausdehnung des Coulomb'schen Gesetzes den Widerstand, welchen ein Stab von beliebigem Normalschnitt einer Torsion entgegensetzt, gleich dem Product aus $\frac{n}{M}$ (§ 694) in die Summe

seiner Biegungswiderstände (siehe § 715, unten) in zwei beliebigen durch seine Längsrichtung gehenden zu einander senkrechten Ebenen machen. Die richtige Theorie liefert, wie wir gesehen haben

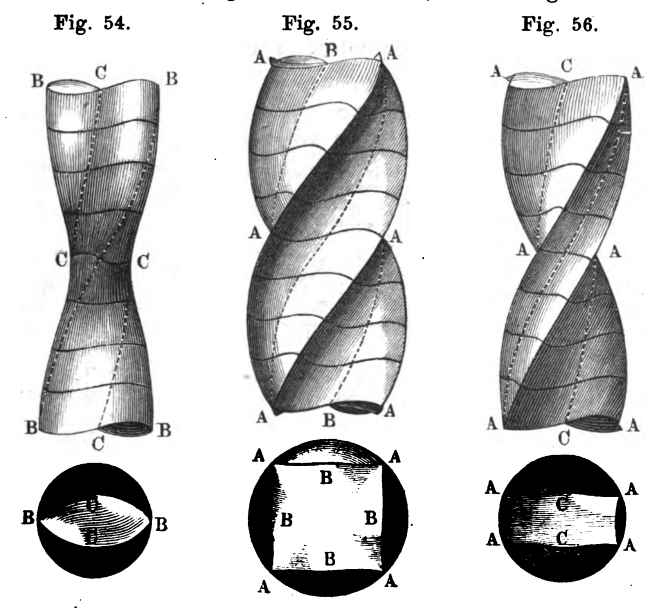
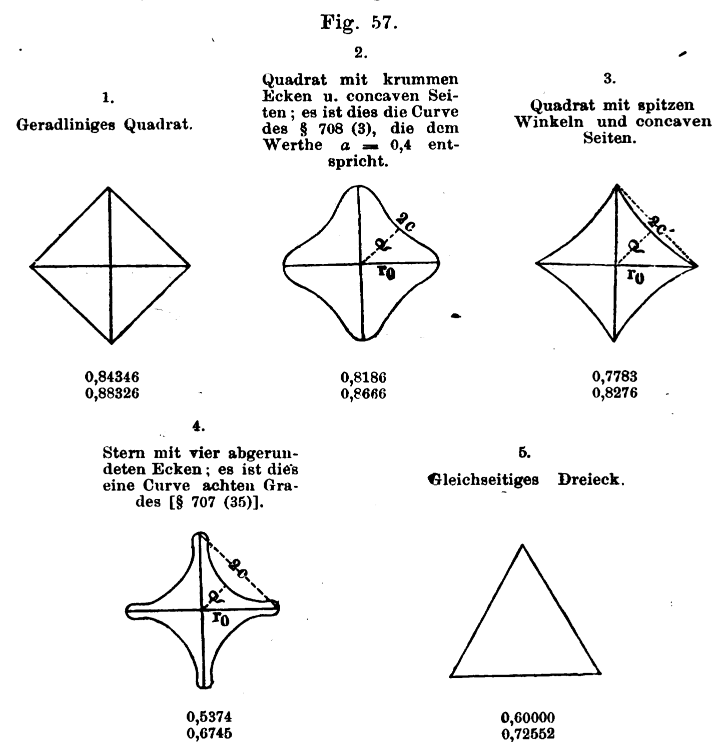


Fig. 54. Fig. 55. Fig. 56.

(§§ 705, 706), immer eine kleinere Grösse für den Widerstand gegen eine Torsion. St. Venant hat bestimmt, wie gross die Abweichung ist, die man in Fällen erwarten darf, in denen die Form des Schnitts hervorspringende Winkel oder beträchtliche Hervorragungen zeigt. [Eine Vorstellung davon kann man sich mittels der Analogie mit dem in § 705 gegebenen Satze der Hydrokinetik machen.] Auch hat er die für die Praxis wichtige Schlussfolgerung gezogen, dass Querrippen oder hervorspringende Theile [siehe z. B. Fig. 57 (4)], wie sie beim Maschinenbau angewandt werden, um den Stäben grössere Steifheit zu geben, das Gegentheil einer guten Wirkung haben, wenn es sich um den Widerstand gegen eine Torsion handelt, obschon sie allerdings insofern von grossem Werthe sind, als sie den Widerstand gegen eine Biegung vergrössern und gewöhnliche Deformationen, die immer mehr oder weniger von Biegungen begleitet sind, leichter aushalten lassen. St. Venant hat mit grossem Talent und mathematischer Geschicklichkeit aus seinen algebraischen und transcendenten Lösungen [§ 707 (32), (34), (35), (45)] schöne Illustrationen dieses für die Praxis wichtigen Princips ent-

nommen. So findet er in den Fällen des gleichseitigen Dreiecks und des geradlinigen und der drei krummlinigen Quadrate der Fig. 57 für die Torsionswiderstände die angegebenen Werthe. Die unmittelbar unter der Figur stehende Zahl gibt in jedem Falle den Bruchtheil an, welcher der richtige Torsionswiderstand von dem

Fig. 57.



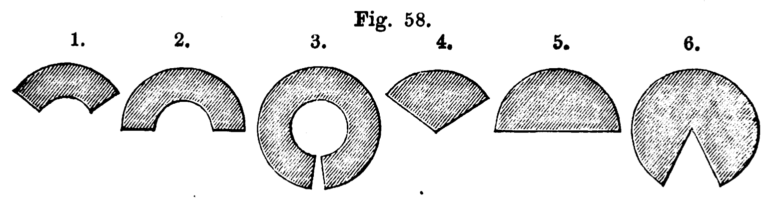
früher angenommenen falschen (§ 703) ist; der letztere ist das Product der Starrheit der Substanz in das Trägheitsmoment des Querschnitts in Beziehung auf eine durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende zu seiner Ebene senkrechte Axe. Die zweite Zahl gibt in jedem Falle den Bruchtheil an, welcher der Torsionswiderstand von demjenigen eines vollen Cylinders von kreisförmiger Basis und gleich grosser Schnittfläche ist.

710. Die Stellen grösster Verzerrung in gedrillten Prismen. — St. Venant macht ferner auf eine aus seinen Lösungen sich ergebende Thatsache aufmerksam, die Vielen überraschend sein wird, dass nämlich in seinen einfacheren Fällen die Stellen grösster

Verzerrung diejenigen Punkte der Grenzfläche sind, welche der Axe des gedrillten Prisma in jedem Falle am nächsten liegen, und dass die Stellen der kleinsten Verzerrung die am weitesten entfernten Punkte sind. So ist in dem Cylinder mit elliptischer Basis die Substanz in den Endpunkten des kleineren Hauptdurchmessers am meisten, in den Endpunkten des grösseren am wenigsten deformirt. In den Prismen, welche beziehungsweise ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat zur Grundfläche haben, gibt es Längslinien grösster Deformation durch die Mitten der Seiten. In dem Prisma mit rechteckiger Basis gibt es zwei Linien grösserer und zwei Linien kleinerer Maximaldeformation; die ersteren Linien gehen durch die Mitten des breiten, die letzteren durch die Mitten des engen Seitenpaars. Die Deformation ist, wie wir aus dem analogen hydrokinetischen Problem (§ 705) schliessen können, ausserordentlich klein, aber nicht verschwindend, in den vorspringenden Theilen eines Prisma von der in Fig. 57 (4) gezeichneten Basis. Sie ist Null in unendlich kleiner Entfernung von dem Winkel bei den Prismen mit dreieckiger und rechteckiger Basis, sowie in jedem anderen Falle [wie Fig. 57 (3)], in welchem die Basis einen nach aussen springenden spitzen oder stumpfen Winkel von endlicher Grösse hat. Dies führt uns zu einer allgemeinen Bemerkung, die wir freilich aus Mangel an Raum nicht formell beweisen werden: Wenn auf einen festen Körper von irgend einer isotropen oder äolotropen elastischen Substanz, der von beliebigen Oberflächen mit vorspringenden oder einspringenden Kanten oder Ecken von beliebiger Weite begrenzt wird, ein System beliebig vertheilter Kräfte einwirkt, in welchem sich nur keine in unendlich kleiner Entfernung von den in Rede stehenden Ecken oder Kanten auf die Oberfläche wirkende Zugkräfte befinden dürfen, so kann der Körper keine Reaction oder Deformation von endlicher Grösse in der Nähe einer vorspringenden Ecke (triedrisch, polyedrisch oder conisch) erleiden; in der Nähe einer Kante kann er nur einen einfachen longitudinalen Zwang in einer dem benachbarten Theil der Kante parallelen Richtung erleiden; endlich erleidet er im Allgemeinen eine unendlich grosse Deformation in der Nähe einer einspringenden Kante oder Ecke. Eine wichtige Anwendung des letzten Theils dieses Satzes ist die in der Mechanik wohlbekannte praktische Regel, dass bei Maschinentheilen, die eine Reaction ertragen sollen, jede einspringende Kante oder Ecke abgerundet werden muss, damit die Gefahr eines Bruchs beseitigt werde. Eine Erläuterung dieser Principien liefert das am Schluss des § 707 ge-

gebene Beispiel, welches die vollständige mathematische Lösung des Torsionsproblems für Prismen von fächerförmigen Schnitten, wie sie die Figuren 58 darstellen, enthält. In den $a = 0$ entsprechenden Fällen sehen wir, ohne die Lösung auszuarbeiten, dass die

Fig. 58.



Verzerrung $\frac{d\gamma}{r\,d\eta}$ für $r = 0$ verschwindet, wenn $\beta < \pi$ ist, dass sie für $r = 0$ unendlich gross wird, wenn $\beta > \pi$ ist, und dass sie endlich und bestimmt ist, wenn man $\beta = \pi$ hat.

Wenn wir Polarcoordinaten r, η einführen, indem wir $x = r \cos \eta$ und $y = r \sin \eta$ annehmen, und wenn ausserdem $\frac{\pi}{\beta} = \nu$ gesetzt wird, so verwandelt sich die oben angegebene Lösung, welche den Werth von v bestimmt, der den Gleichungen (64) und (65) des § 707 genügt, einfach in

$$(69) \qquad v = \Sigma\,(B_n r^{n\nu} + B'_n r^{-n\nu}) \sin n\nu\eta \text{ *)},$$

wo B_n, B'_n durch die Gleichungen (65) des § 707 bestimmt werden müssen, in denen man $r = a$ und $r = a'$ statt $\xi = 0$ und $\xi = \alpha$ und a'^2 statt $a^2 e^{2\alpha}$ zu setzen hat (a und a' bezeichnen beziehungsweise die Radien der concaven und der convexen Cylinderflächen). Wenn $a = 0$ ist, so liefern diese Gleichungen $B_n = 0$, folglich

$$\left(\frac{dv}{r\,d\eta}\right)_{r=0} = 0, \quad = B_1 \cos\eta, = \infty,$$

jenachdem $\nu > 1, = 1$ oder < 1 ist; daraus ergeben sich auch ähnliche Resultate für $\left(\frac{d\gamma}{r\,d\eta}\right)_{r=0}$.

711. Problem der Biegung. — Um das Gesetz der Biegung (§§ 591, 592) zu beweisen und den Widerstand (§ 596) zu bestimmen, den ein Stab oder Draht von isotroper Substanz einer Biegung entgegensetzt, denken wir uns zunächst, der Stab sei so gebogen, dass er einen Kreisbogen bildet, und bestimmen die Kraft,

*) Der Vergleich mit § 707 (23), (24) lässt erkennen, dass diese Lösung bloss der allgemeine Ausdruck in Polarcoordinaten für Reihen harmonischer Kugelfunctionen von x und y und mit $z = 0$ ist, die von den Graden n, $2n$, $3n$, u. s. w., $-n$, $-2n$, $-3n$, u. s. w. sind. Es sind dies „vollkommene harmonische Functionen“, wenn n die Einheit oder eine beliebige ganze Zahl ist.



die hierzu erforderlich ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sein sollen: —

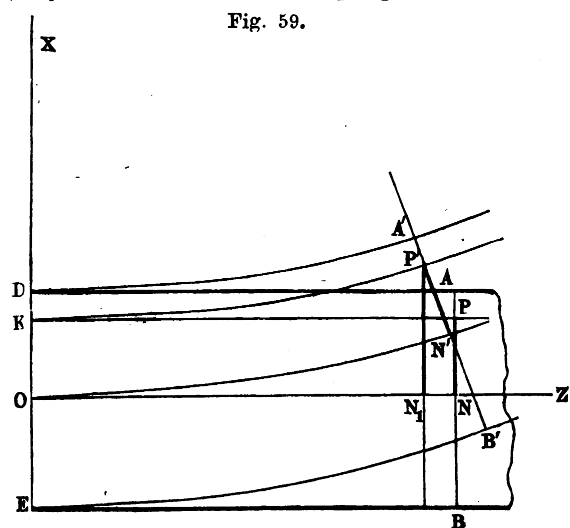
(1) Alle Linien des Stabes, welche seiner Länge parallel sind, werden Kreisbogen, die in der Ebene ZOX oder in ZOX parallelen Ebenen liegen, und deren Mittelpunkte einer zu dieser Ebene senkrechten Linie angehören, indem die Linie OZ und alle durch OY gehenden ihr parallelen Linien gebogen werden, ohne die Länge zu ändern.

(2) Alle Normalschnitte bleiben eben und senkrecht zu jenen Längslinien (so dass ihre Ebenen nach der Deformation durch jene Verbindungslinie der Mittelpunkte hindurchgehen).

(3) Kein Theil eines Normalschnitts erleidet eine Deformation.

Es werde ein Schnitt DOE des Stabes zur Coordinatenebene XOY genommen, und es sei P (x, y, z) ein beliebiger Punkt des ungebogenen, P' (x', y', z') derselbe Punkt des gebogenen Stabes. Die Figur

Fig. 59.



zeigt die Projection dieser Punkte auf die Ebene ZOX. Ferner sei ϱ der Radius des Bogens ON', in welchen sich die Linie ON des geraden Stabes umbiegt. Dann ist

$$x' = x + (\varrho - x)\left(1 - \cos\frac{z}{\varrho}\right),\quad y' = y,$$

$$z' = (\varrho - x)\sin\frac{z}{\varrho}.$$

Nach der oben (§ 588) aufgestellten Beschränkung ist aber x höchstens unendlich klein im Vergleich mit ϱ, und für jede beliebige Länge des

Stabes, welche nicht grösser als die grösste Querdimension desselben ist, gilt dasselbe von z. Deshalb vernachlässigen wir in den vorhergehenden Ausdrücken die Potenzen von $\frac{x}{\varrho}$ und $\frac{z}{\varrho}$, deren Grad den zweiten übersteigt, und erhalten, wenn wir noch $x' - x = \alpha$, $y' - y = \beta$, $z' - z = \gamma$ setzen,

$$(1) \qquad \alpha = \tfrac{1}{2} \frac{z^2}{\varrho}, \; \beta = 0, \; \gamma = -\frac{xz}{\varrho}.$$

Werden diese Werthe in § 693 (5) und § 697 (2) substituirt, so folgt

$$(2) \qquad \begin{cases} P = -(m-n)\frac{x}{\varrho}, \; Q = -(m-n)\frac{x}{\varrho}, \; R = -(m+n)\frac{x}{\varrho} \\ S = 0, \quad T = 0, \quad U = 0, \end{cases}$$

$$(3) \qquad X = \frac{m-n}{\varrho}, \; Y = 0, \quad Z = 0.$$

Die Interpretation dieses Resultats ist zwar nicht uninteressant; da wir ihrer aber für unsere jetzige Betrachtung nicht bedürfen, so überlassen wir sie dem Leser als Uebungsaufgabe.

712. Das Problem der einfachen Biegung setzt voraus, dass keine Kraft von aussen her als Zugkraft auf die Seiten des Stabes oder auf die innere Substanz desselben einwirke, sondern dass der Stab durch entgegengesetzte Kräftepaare, die man in geeigneter Weise an seinen Enden anbringt, in einer Kreisform erhalten wird, wobei seine Deformation und Reaction eine überall gleichmässige ist.

Fügen wir den Grössen α, β, γ des vorhergehenden Paragraphen die Correctionen

$$\alpha' = \tfrac{1}{2} K (x^2 - y^2), \quad \beta' = Kxy, \; \gamma' = 0$$

zu, so erhalten wir [nach § 693 (5)]

$$P' = Q' = 2mKx, \; R' = 2(m-n)Kx, \; S' = 0, \quad T' = 0, \quad U' = 0$$

und [nach § 698 (2)]

$$X' = -2mK, \quad Y' = 0, \quad Z' = 0$$

als die Correctionen, die wir zu $P, Q, \ldots, X, Y, Z$ zu addiren haben. Nehmen wir also

$$K = \frac{m-n}{2m\varrho}$$

an, so werden die auf die Seitenflächen des Stabes wirkenden Zugkräfte und die inneren Kräfte auf Null reducirt. Wenn daher jetzt

$$(1) \quad \alpha = \frac{1}{2\varrho}\left\{z^2 + \frac{m-n}{2m}(x^2 - y^2)\right\}, \; \beta = \frac{1}{\varrho}\,\frac{m-n}{2m}\,xy, \; \gamma = -\frac{1}{\varrho}\,xz$$

ist, so ergibt sich

$$\begin{cases} e = \frac{m-n}{2\varrho m}\,x = \frac{\sigma}{\varrho}\,x, \; f = \frac{m-n}{2\varrho m}\,x = \frac{\sigma}{\varrho}\,x, \; g = -\frac{1}{\varrho}\,x \\ a = b = c = 0 \end{cases}$$



und [§ 693 (5), § 694 (6)]

$$(3)\quad \begin{cases} P = 0,\ Q = 0,\ R = -\dfrac{(3m-n)n}{m}\dfrac{x}{\varrho} = -M\dfrac{x}{\varrho} \\ X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0. \end{cases}$$

Zur Vervollständigung der Erfüllung der Bedingungen ist nur nöthig, dass die durch jeden Normalschnitt wirkende Zugkraft sich auf ein Kräftepaar reduciren lasse. Folglich ist

$$\iint R\, dx\, dy = 0,$$

oder nach (3)

$$\iint x\, dx\, dy = 0,$$

in Worten: —

713. Damit längs des Stabes keine Kraft, sondern nur ein Biegungskräftepaar fortgepflanzt werden könne, muss der Trägheitsmittelpunkt des Normalschnitts in OY, d. h. in der Linie liegen, in welcher er von der Oberfläche geschnitten wird, welche die Substanztheile, die in ihrer Längsrichtung eine Ausdehnung erfahren haben, von denen trennt, bei welchen eine Verkürzung in der Längsrichtung stattgefunden hat.

714. In unseren analytischen Ausdrücken ist nur ein unendlich kurzer Theil des Stabes betrachtet worden, und es war nicht nöthig, zu untersuchen, ob die Axe des ins Leben gerufenen Kräftepaars zur Ebene der Biegung senkrecht sei oder nicht. Wenn es sich aber um eine so grosse Länge des Stabes handelt, dass die Richtungsänderung (§ 5) vom einen zum anderen Ende von endlicher Grösse ist, so können die an den Enden angreifenden Kräftepaare nicht direct entgegengesetzt sein, wofern nicht ihre Axen beide zur Ebene der Biegung senkrecht sind, da jede Axe in dem entsprechenden Normalschnitt des Stabes liegt. Für eine nicht unendlich kleine Biegung in einem Kreisbogen, der keinem seitlichen Zwange unterworfen ist, müssen wir also

$$\iint Ry\, dx\, dy = 0, \quad \text{folglich nach (3)} \quad \iint xy\, dx\, dy = 0$$

haben, d. h. die Ebene der Biegung muss senkrecht sein zu einer von den beiden seiner eigenen Ebene angehörenden Hauptträgheitsaxen des Normalschnitts. Wenn dies der Fall ist, so ist das Moment des ganzen durch jeden Normalschnitt wirkenden Kräftepaars gleich dem Product aus der Krümmung, dem Young'schen Modulus und dem in Beziehung auf die zur Ebene der Biegung senkrechte Hauptaxe genommenen Trägheitsmoment der Fläche des Normalschnitts.

Denn wir haben [§ 712 (3)]

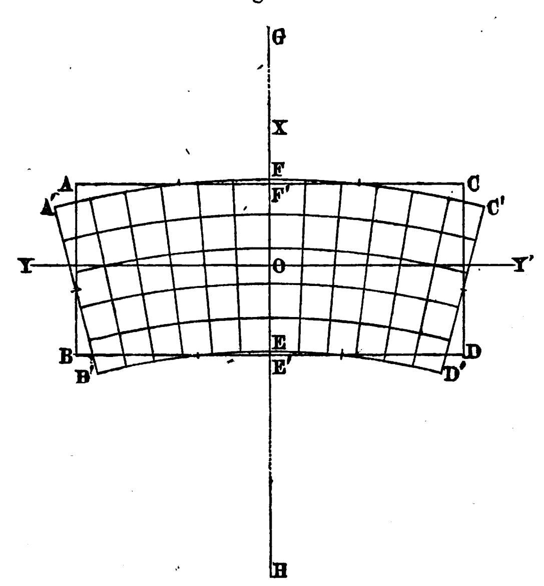
$$\iint R x \, dx \, dy = -\frac{M}{\varrho} \iint x^2 \, dx \, dy.$$

715. Hauptaxen und Hauptwiderstände der Biegung. — Es fallen somit in einem Stabe von isotroper Substanz die Hauptaxen der Biegung (§ 599) mit den Hauptträgheitsaxen der Fläche des Normalschnitts zusammen, und die entsprechenden Biegungswiderstände (§ 596) sind die Trägheitsmomente dieser Fläche in Beziehung auf diese Axen, multiplicirt mit dem Young'schen Modulus.

716. Geometrische Interpretation und experimentelle Erläuterung. — Die Interpretation der Resultate [§ 712 (2), (3)], zu welchen die analytische Untersuchung uns geführt hat, ist einfach die, dass, wenn wir uns den ganzen Stab parallel zu seiner Länge in unendlich kleine Fasern (dieselben sind Prismen, so lange der Stab gerade ist) zertheilt denken, jede derselben eine seitliche Zusammenziehung oder Ausdehnung mit nahezu derselben Freiheit erleidet, wie wenn sie von den übrigen Substanztheilen getrennt wäre, und in ihrer Längsrichtung in demselben Grade verlängert oder verkürzt wird, in welchem sie bei der Umbiegung des Stabes in einen Kreisbogen wirklich verlängert oder verkürzt wird. Die Verzerrung des Querschnitts, von welcher diese Veränderungen der seitlichen Dimensionen nothwendig begleitet sind, wird durch die Figur 60 erläutert, in welcher entweder der ganze Normalschnitt eines Stabes mit rechteckiger Basis, oder ein rechteckiger Theil des Normalschnitts eines Stabes von beliebiger Gestalt in der deformirten und der undeformirten Form, die beide den Mittelpunkt O gemeinschaftlich haben, dargestellt wird. Die Biegung erfolgt in Ebenen, die senkrecht zu YOY sind, und ist nach oben (oder gegen X hin) concav; der Krümmungsmittelpunkt G liegt in der in der Figur angegebenen Richtung, ist aber zu weit entfernt, als dass er hier gezeichnet werden könnte. Die geraden Seiten AC, BD und alle ihnen parallelen geraden Linien der undeformirten rechteckigen Fläche werden concentrische Kreisbogen, die in der entgegengesetzten Richtung concav sind, indem ihr Krümmungsmittelpunkt H auf der entgegengesetzten Seite von O liegt, und zwar für Stäbe von gallertartiger Substanz, oder von Glas oder Metall 2 bis 4 mal so weit entfernt als G. Danach werden die anfänglich ebenen Seitenflächen AC, BD eines Stabes von rechteckiger Basis anticlastische Oberflächen, deren Krümmungen in den beiden Hauptschnitten

$\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{-\sigma}{\varrho}$ sind. Sehr schön zeigt diese Erscheinung ein rechteckiges oder quadratisches Band von Gummi elasticum [für welches

Fig. 60.



σ nur wenig kleiner als $^1/_2$ ist (§ 684), und welches im hohen Grade deformirt werden kann, ohne die entsprechende elastische Wirksamkeit völlig zu verlieren].

717. Die einschränkende Bedingung des § 588, dass die Krümmung sehr klein sein muss im Vergleich mit der eines Kreises, dessen Radius gleich dem grössten Durchmesser des Normalschnitts ist (die Nothwendigkeit dieser Bedingung ist nicht unmittelbar ersichtlich, und in der That weiss man, so viel uns bekannt ist, nicht, dass dieselbe allgemein erfüllt sein muss, wenn der grösste Durchmesser zur Krümmungsebene senkrecht ist), erhält jetzt ihre volle Erklärung; denn wofern nicht die Breite AC des Stabes (oder der zur Ebene der Biegung senkrechte Durchmesser) sehr klein wäre im Vergleich zur mittleren Proportionale zwischen dem Radius OH und der Dicke AB, so würden die Abstände von OY nach den Ecken A', C' kürzer und die Abstände von OY nach B', D' länger sein, als die halbe Dicke OE, und zwar würden die Verhältnisse der Differenzen dieser Abstände zur halben Dicke endliche Werthe haben. Dadurch

würden in den Fasern nach den Ecken zu Verkürzungen und Verlängerungen erzeugt werden, die merklich kleiner und grösser als die in unseren Formeln (§ 712 (2)] ausgedrückten sind, und auf diese Weise würde die Lösung verletzt werden. Leider ist es den Mathematikern bisher nicht gelungen (vielleicht haben sie es auch gar nicht versucht), das schöne Problem zu lösen, welches so die Biegung eines breiten, sehr dünnen Bandes (wie z. B. einer Uhrfeder) in einen Kreis darbietet, dessen Radius zu einer dritten Proportionale zwischen der Dicke und der Breite des Bandes in einem endlichen Verhältnisse steht. Siehe § 657.

718. Wenn aber der Krümmungsradius der Biegung ein grosses Vielfache nicht nur des grössten Durchmessers, sondern auch einer dritten Proportionale zwischen den beziehungsweise in der Ebene der Biegung und senkrecht zu derselben gezogenen Durchmessern ist, so lässt sich die vorhergehende Lösung anwenden, wie gross auch das Verhältniss des grössten Durchmessers zum kleinsten sein möge, und es ist beachtenswerth, dass die (in Fig. 60, § 716 erläuterte) nothwendige Verzerrung des Normalschnitts die freien seitlichen Zusammenziehungen und Ausdehnungen in den Fasern nicht verhindert, sogar im Falle eines breiten dünnen Bandes (dasselbe sei nun von genau rechteckigem Schnitt, oder in verschiedenen Theilen verschieden dick).

719. Biegung einer Platte. — Betrachten wir jetzt ein gleichförmiges, dünnes, breites Band, welches in der in der vorhergehenden Lösung vorausgesetzten Weise gebogen ist, so haben wir genau den Fall einer unter der Einwirkung einer einfachen Biegungsreaction (§ 638) stehenden Platte. Wenn a die Breite und b die Dicke ist, so ist das Trägheitsmoment des Querschnitts $^1/_{12}\, b^2 . ab$, folglich der Widerstand gegen eine Biegung $^1/_{12}\, M a b^3$ oder, die Breite als Eins angenommen, $^1/_{12}\, M b^3$. Daher würde ein Kräftepaar K (§ 637) das Band so biegen, dass seine Krümmung der Länge nach $K - {}^1/_{12}\, M b^3$ und (§ 716) der Breite nach $\sigma K - {}^1/_{12}\, M b^3$ wäre; die concave Seite würde aber bei der letzteren Krümmung die entgegengesetzte Richtung von der der ersteren haben. Genau dieselbe Lösung gilt für die Wirkung einer Biegungsreaction, welche aus einander das Gleichgewicht haltenden Kräftepaaren besteht, die man an den beiden Rändern angebracht hat, um das Band senkrecht zu der Dimension zu biegen, die wir bisher die Breite genannt haben. Nach dem Princip der Superposition klei-

ner Bewegungen können wir auf jedes Paar paralleler Seiten einer rechteckigen Platte gleichzeitig ein Paar einander das Gleichgewicht haltender Kräftepaare wirken lassen, ohne durch eins dieser beiden im Gleichgewicht befindlichen Systeme die Wirkung des andern zu ändern, so dass die Gesammtwirkung die geometrische Resultante der beiden einzeln berechneten Wirkungen ist. Es sei also eine quadratische Platte von der Dicke b gegeben, deren Grundfläche die Länge Eins hat, und es mögen auf das eine Paar entgegengesetzter Seiten einander das Gleichgewicht haltende Kräftepaare K, auf das andere Paar ebensolche Kräftepaare $\varLambda$ einwirken; jedes dieser Kräftepaarsysteme suche, wenn es positiv ist, die concave Seite der Platte nach derselben Richtung zu biegen. Bezeichnen dann $\varkappa$ und λ die in den Ebenen dieser Kräftepaare erzeugten Gesammtkrümmungen, so erhalten wir

$$\varkappa = \frac{1}{{}^1/_{12}\, M b^3}\,(K - \sigma \varLambda) \tag{1}$$

und

$$\lambda = \frac{1}{{}^1/_{12}\, M b^3}\,(\varLambda - \sigma K). \tag{2}$$

720. Um zu bestimmen, welches die Kräftepaare sein müssen, damit einfach eine cylindrische Krümmung $\varkappa$ erzeugt werde, nehmen wir $\lambda = 0$ an. Es ergibt sich

$$\varLambda = \sigma K$$

und

$$K = {}^1/_{12}\,\frac{M b^3}{1 - \sigma^2}\,\varkappa. \tag{3}$$

Wenn eine sphärische Krümmung erzeugt werden soll, so haben wir $\varkappa = \lambda$ zu setzen. Dies liefert

$$K = \varLambda = {}^1/_{12}\,\frac{M b^3}{1 - \sigma}\,\varkappa. \tag{4}$$

Um endlich eine in beiden Richtungen gleiche anticlastische Krümmung zu erzeugen, muss $\varkappa = -\lambda$ angenommen werden. Dadurch erhält man

$$K = -\varLambda = {}^1/_{12}\,\frac{M b^3}{1 + \sigma}\,\varkappa. \tag{5}$$

Vergleichen wir die erhaltenen Resultate mit § 641 (10) und § 642 (16), so erhalten wir für den Widerstand A gegen eine cylindrische Biegung und für die Widerstände $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ gegen eine synclastische

und eine anticlastische Biegung einer gleichförmigen Platte von isotropem Material

$$(6)\quad \begin{cases} A = {}^1/_{12}\,\dfrac{Mb^3}{1-\sigma^2}, \\ \mathfrak{h} = {}^1/_{12}\,\dfrac{Mb^3}{1-\sigma}, \quad \mathfrak{k} = {}^1/_{12}\,\dfrac{Mb^3}{1+\sigma}, \\ \text{oder nach § 694 (6) und § 698 (5)} \\ \mathfrak{h} = \dfrac{3nkb^3}{2(3k+4n)} = \dfrac{n(3m-n)b^3}{6(m+n)}, \quad \mathfrak{k} = {}^1/_6\, nb^3. \end{cases}$$

Der Coefficient A, welcher in der Gleichung des inneren Gleichgewichts einer von beliebigen Kräften angegriffenen Platte auftritt [§ 644 (6) und §§ 649...652], und die Grösse c, welche in den Grenzbedingungen erscheint, denen die Platte genügt, lassen sich [§ 642 (16)] auf folgende Weise einfach durch $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ ausdrücken: —

$$(7)\qquad A = {}^1/_2\,(\mathfrak{h} + \mathfrak{k}), \quad c = {}^1/_2\,(\mathfrak{h} - \mathfrak{k}).$$

721. Es ist interessant und lehrreich, die anticlastische Biegung einer Platte noch auf eine andere Weise zu untersuchen, indem man sie nämlich als einen äussersten Fall der Torsion ansieht. Betrachten wir zunächst einen flachen Stab von rechteckigem Schnitt, der gleichmässig gedrillt ist durch passende tangentiale Zugkräfte [§ 706 (10)], die an seinen Enden angreifen. Es stehe nun die Breite des Stabes zu seiner Länge in einem endlichen Verhältniss; beide seien z. B. einander gleich. Wir haben dann eine quadratische Platte, welche durch entgegengesetzte Kräftepaare gedrillt wird, die in den Ebenen zweier entgegengesetzten Ränder wirken und so über diese Flächen vertheilt sind, dass sie, wenn die beiden anderen Ränder ganz frei gelassen werden, eine gleichförmige Wirkung in allen den ersteren Flächen parallelen Schnitten erzeugen. Wenn wir endlich noch in § 707 (46) die Dicke b als unendlich klein im Vergleich zur Breite a voraussetzen, so erhalten wir

$$(8)\qquad N = {}^1/_3\, n\tau a b^3.$$

Die Drillung τ für die Einheit der Länge liefert $a\tau$ für die Länge a, was [§ 640 (4)] einer anticlastischen Krümmung ϖ (nach der Bezeichnung des § 639) $= \tau$ äquivalent ist, und das Kräftepaar N, welches in nur einem Paar entgegengesetzter Seiten des Quadrates wirkt, ist, wie wir aus § 656 ersehen, einer anticlastischen Reaction (nach der Bezeichnung des § 637) $\Pi = {}^1/_2\, N - a$ äquivalent. Wir erhalten somit für den Widerstand gegen eine anticlastische Krümmung, nach § 642 (13),

$$\text{(9)} \qquad \mathfrak{k} = \Pi - \varpi = \frac{N}{2\tau a} = \frac{n}{6} b^3,$$

was mit dem Werthe (6) in § 720 übereinstimmt, der auf andere Weise, nämlich durch Zusammensetzung der Biegungen gefunden worden ist.

Es ist von grösster Wichtigkeit, Folgendes zu bemerken: — (1) Eine Hälfte des Theils $\frac{1}{3} n \tau a b^3$ in dem Werthe von N, welchen die Formel (46) des § 707 liefert, leitet sich aus α und β, wie sie § 706 (8) gibt, her, und das Glied $-\tau x y$ von γ folgt aus (45). — (2) Bezeichnet γ' die transcendente Reihe, welche den Ausdruck (45) für γ vervollständigt, so ist es das Glied $n \int\int x \frac{d\gamma'}{dy} dx\, dy$ der Formel (17) des § 706, welches die andere Hälfte des in Rede stehenden Theils von N ausmacht. Um diesen Ausdruck zu bestimmen, werden wir partiell integriren, wobei zu beachten ist, dass sich einfach das Zeichen von γ' ändert, wenn man x oder y ein anderes Zeichen gibt. Es ergibt sich

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} n \int\limits_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \int\limits_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} x \frac{d\gamma'}{dy} dy\, dx = \int\limits_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} x\, G\, dx \\ = a \int\limits_0^{\frac{1}{2}a} G\, dx - 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}a} dx \int\limits_0^{x} G\, dx, \end{cases}$$

wo

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} G = n \int\limits_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \frac{d\gamma'}{dy} dy = 2 n \gamma'_{y=\frac{1}{2}b} \\ = 2 n \tau \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \sum\limits_{\nu} \frac{1}{(2\nu+1)^3} \frac{e^{(2\nu+1)\frac{\pi x}{b}} - e^{-(2\nu+1)\frac{\pi x}{b}}}{e^{(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}} + e^{-(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}}} \end{cases}$$

ist. Wir erhalten also in N ein Glied

$$a \int\limits_0^{\frac{1}{2}a} G\, dx = n \tau a \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 b^3 \sum \frac{1}{(2\nu+1)^4} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}} + e^{-(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}}} \right\},$$

oder, weil (wie wir sehen, wenn wir (40) nach y integriren und $y = \frac{1}{2} b$ setzen)

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \text{u. s. w.} = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \qquad \text{ist,}$$

$$\text{(12)} \quad a \int\limits_0^{\frac{1}{2}a} G\, dx = \tfrac{1}{6} n \tau a b^3 - n \tau \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 a b^3 \sum \frac{2}{(2\nu+1)^4 \left[e^{(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}} + e^{-(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}}\right]}.$$

Die transcendente Reihe des zweiten Gliedes dieser Formel macht im Verein mit

$$-2\int_0^{\frac{1}{2}a} dx \int_0^x G\, dx - n \int\int y \frac{d\gamma'}{dx}\, dx\, dy$$

die transcendente Reihe aus, welche in dem Ausdruck (46) für N erscheint. Diese ist, wie wir oben [§ 721 (8)] gesehen haben, unendlich klein im Vergleich zum ersten Gliede von (46), wenn $a - b$ unendlich gross ist. Wenn wir aber wie jetzt die Zusammensetzung des Ausdrucks untersuchen, so ist zu beachten, dass für ein unendlich grosses $\alpha - \beta$ die Grösse γ' verschwindet, ausser für Werthe von x, die unendlich wenig von $\pm \frac{1}{2} a$ verschieden sind, und daraus erkennen wir leicht, dass in diesem Falle

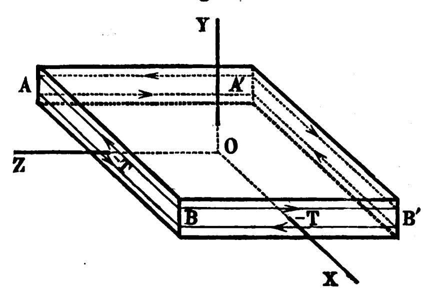
$$n \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dx \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dy \left(x\frac{d\gamma'}{dy} - y\frac{d\gamma'}{dy} \right) = n\, a \int_0^{\frac{1}{2}a} dx \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \frac{d\gamma'}{dy}\, dy = a \int_0^{\frac{1}{2}a} G\, dx$$

ist, woraus mit Rücksicht auf das Vorhergehende Folgendes hervorgeht:—

722. Eine Hälfte des auf jeden der Ränder wirkenden Kräftepaars, durch welches die obigen Bedingungen erfüllt werden, besteht aus zwei tangentialen Zugkräften, welche über die Randflächen in unendlich kleiner Entfernung von deren Enden vertheilt sind und senkrecht zur Platte nach entgegengesetzten Seiten hin ziehen. Die andere Hälfte besteht aus einem über die Ränder gleichmässig vertheilten System von Kräften, welche der Längsrichtung der Ränder parallel sind und deren Grösse überall dem positiven oder negativen Abstande ihres Angriffsortes von der Mittellinie ihres Randes einfach proportional ist.

723. Wenn wir jetzt die erstere Hälfte entfernen und statt derselben über die bisher freien Ränder (BB', AA') gleichmässig ein Kräftepaarsystem vertheilen, welches der letzteren Hälfte gleich und ähnlich und so gerichtet ist, dass in der ganzen Platte dieselbe Drillung unterhalten wird, so haben wir die zur Erfüllung der drei Poisson'schen Grenzbedingungen (§ 645) für den vorliegenden Fall geeigneten Zugkräfte, d. h. wir haben ein System von Zugkräften, die über die vier Ränder einer quadratischen Platte so vertheilt sind, dass nicht nur in allen Theilen der Platte, deren Abstände

Fig. 61.



von den Rändern gross sind im Vergleich zur Dicke, sondern in der ganzen Platte bis zu den Rändern hin eine gleichmässige anticlastische Reaction (§ 638) erzeugt wird. Der Deformations- und Reactionszustand in der Platte wird durch die folgenden Formeln dargestellt [die wir aus §§ 706 und 707 (8), (45), (9), (10), (17) und § 722 entnehmen, oder direct bewahrheiten können]

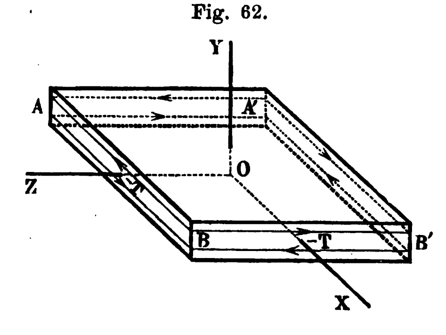
$$(13)\begin{cases} \alpha = -\tau y z, \quad \beta = \tau x z, \quad \gamma = -\tau x y \\ \mathfrak{e} = \mathfrak{f} = \mathfrak{g} = 0, \quad \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} = -2\tau y, \quad \mathfrak{c} = 0 \\ P = Q = R = 0, \quad S = 0, \quad T = -2n\tau y, \quad U = 0 \\ -L = N = -\int\limits_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a}\int\limits_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} Ty\,dy\,dx = \frac{n\tau}{6}ab^3; \end{cases}$$

darin bezeichnen L und N die Momente (deren Vorzeichen wie in § 551 gerechnet werden) der ganzen Beträge des auf die beiden beziehungsweise zu OX und OZ senkrechten Ränder in den Ebenen dieser Ränder wirkenden Kräftepaars.

Drehen wir die Axen OX, OZ in ihrer eigenen Ebene um 45^0, so kommen wir wieder zu den Formeln der Biegung (wie in § 719) für den besonderen Fall gleicher Biegungen in den beiden entgegengesetzten Richtungen.

724. Eine dünne rechteckige Platte wird den Zugkräften des § 647 unterworfen. — Wenn wir jetzt andererseits zu dem in § 721 betrachteten Deformationszustand einen zweiten hinzufügen, der dadurch erzeugt wird, dass wir auf das vom ersteren frei gelassene Ränderpaar das in § 722 beschriebene Kräftepaarsystem einwirken lassen, aber in der Richtung, welche der vom ersteren der Platte ertheilten Drillung entgegengesetzt ist (so dass dasselbe jetzt nicht $-L$, sondern $L = N$ ist), so befindet sich die quadratförmige Platte, ausser in unendlich kleiner Entfernung von ihren Ecken, genau in dem in § 647 beschriebenen Zustande. Um in diesem Falle die Ausdrücke für die Componenten der Verschiebung, der Deformation und der elastischen Reaction zu finden, müssen wir zu den Ausdrücken für α, β, γ in § 706 (8) und § 707 (45) die Werthe addiren, die man erhält, wenn man das

Fig. 62.



Zeichen jedes jener Ausdrücke ändert und x gegen z, sowie α gegen γ vertauscht. Die zugehörigen Werthe von $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, P, Q, R, S, T, U$ erhält man natürlich auf dieselbe Weise. Man hat aber nicht nöthig, sie nieder zu schreiben, da man sie ohne Weiteres aus α, β, γ bilden kann. Endlich würde die neu hinzugefügte Deformation, wenn sie allein existirte, die x parallelen Ränder frei von Zug lassen, ganz wie die anfangs vorausgesetzte Deformation [§ 706 (8)] die Ränder frei lässt, welche der z-Axe parallel sind, und so erkennen wir ohne eine neue Integration, dass N noch den Werth (46) hat und die Resultante der in § 722 beschriebenen Zugkräfte ist. Die Theile der Verschiebungscomponenten, welche durch die Producte der Coordinaten dargestellt werden, verschwinden, und es bleiben nur die folgenden transcendenten Reihen: —

$$(14)\begin{cases} \alpha = -\tau\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \sum\limits_{\nu} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3} \frac{e^{+\frac{(2\nu+1)\pi z}{b}} - e^{-\frac{(2\nu+1)\pi z}{b}}}{e^{+\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}} + e^{-\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}}} \sin\frac{(2\nu+1)\pi y}{b} \\ \gamma = +\tau\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \sum\limits_{\nu} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3} \frac{e^{+\frac{(2\nu+1)\pi x}{b}} - e^{-\frac{(2\nu+1)\pi x}{b}}}{e^{+\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}} + e^{-\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}}} \sin\frac{(2\nu+1)\pi y}{b}. \end{cases}$$

725. Wenn $\frac{a}{b}$ unendlich gross ist, so wird $e^{+\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}}$ unendlich gross und $e^{-\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}}$ unendlich klein. Setzen wir dann $\frac{1}{2}a - z = z'$ und $\frac{1}{2}a - x = x'$, so verwandeln sich die vorhergehenden Ausdrücke in

(15)

$$\alpha = -\tau\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \sum \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3} e^{-\frac{(2\nu+1)\pi z'}{b}} \sin\frac{(2\nu+1)\pi y}{b}$$

für Punkte, welche dem Rande $A'B'$ nicht unendlich nahe liegen; also ist

$$\gamma = +\tau\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \sum \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3} e^{\frac{(2\nu+1)\pi x'}{b}} \sin\frac{(2\nu+1)\pi y}{b}$$

für Punkte, welche dem Rande AA' nicht unendlich nahe liegen; also ist

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0$$

für alle Punkte, die keinem Rande unendlich nahe liegen;

$$\beta = 0 \text{ überall;}$$

endlich

$$L = N = \tfrac{1}{3} n \tau a b^3,$$

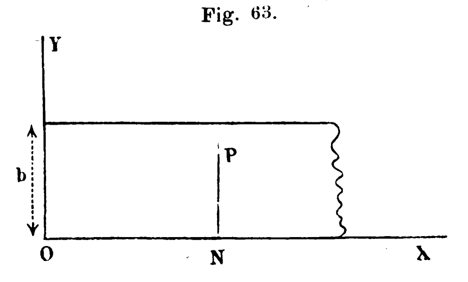
und zwar wird die Hälfte des Werthes jedes dieser beiden Kräftepaarsysteme durch die über den entsprechenden Rand gleichmässig vertheilten und den Abständen von der Mittellinie proportionalen Zugkräfte gebildet, die andere Hälfte durch die unendlich nahe den Ecken und senkrecht zur Platte wirkenden Zugkräfte.

726. **Eine Platte ohne Ecken wird den Zugkräften des § 647 unterworfen.** — Es ist klar, dass, wenn die Ecken abgerundet wären, oder wenn die Platte eine beliebige Form ohne Ecken hätte, d. h. wenn in keinem Theile ihres Randes der Krümmungsradius nicht sehr gross wäre im Vergleich zur Dicke, die Wirkung eines auf die in § 647 angegebene Weise über den ganzen Rand vertheilten Kräftepaarsystems durch jede dieser letzten Formeln für α und γ ausgedrückt werden würde. So wird die ganze Verschiebung der Substanz für alle dem Rande unendlich nahe liegenden Punkte dem Rande parallel sein; sie wird für alle übrigen Punkte der Platte verschwinden; sie wird gleich dem vorhergehenden Ausdruck (15) für γ sein, wenn x' einfach den Abstand von dem nächsten Punkte des Randes der Platte und y, wie in allen diesen Formeln, den Abstand von der Mittelfläche bezeichnet.

727. Wir können daraus schliessen, dass, wenn eine gleichförmige Platte, deren Rand überall zu den Seitenflächen senkrecht, und deren Dicke ein kleiner Bruchtheil des kleinsten Krümmungsradius des Randes in jedem Punkte ist, der in § 647 beschriebenen Einwirkung unterworfen wird, und wenn dabei noch die Bedingung erfüllt wird, dass die tangentialen Zugkräfte [wie in § 634 (3) für jeden von der Umgrenzung einer gebogenen Platte entfernten Normalschnitt ausgesagt wurde] dem positiven oder negativen Abstande von der Mittellinie des Randes einfach proportional vertheilt seien, die innere Deformation und Reaction durch den folgenden Satz bestimmt sein werden: —

Es sei O ein beliebiger Punkt in einer Ecke des Randes; ferner sei die Axe OX senkrecht zum Rande nach innen zu gerichtet, OY senkrecht zur Ebene der Platte. Dann ist die Verschiebung γ eines beliebigen Massenpunktes P (x, y), dessen Abstand von O

Fig. 63.



kein beträchtliches Vielfache der Dicke b ist, senkrecht zur Ebene YOX und durch die Formel

$$(16)\quad \gamma = 6\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(e^{-\frac{\pi x}{b}}\cos\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{3^3}e^{-\frac{3\pi x}{b}}\cos\frac{3\pi y}{b} + \frac{1}{5^3}e^{-\frac{5\pi x}{b}}\cos\frac{5\pi y}{b} + \text{etc.}\right)$$

bestimmt, wo Ω die für die Einheit der Randlänge genommene Grösse des Kräftepaars und n die Starrheit (§ 680) der Substanz bezeichnen. Die einfachste und leichteste Art, zu diesem Resultat zu gelangen, besteht jedoch darin, dass man direct nach Fourier's analytischer Methode das folgende Problem löst, welches ein besonderer Fall eines der allgemeinen Probleme des § 696 ist: —

728. Unabhängige Behandlung des Falles des § 647. — Es ist eine gleichförmige ebene Platte von der Dicke b gegeben, welche sich zu einer Seite eines geraden Randes (oder einer zu den Seitenflächen senkrechten Ebene) nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstreckt. Man soll die Verschiebung, die Deformation und die Reaction bestimmen, welche ein nach einer gegebenen willkürlichen Function $[\varphi(y)]$ der Entfernung von der Kante über den Rand gleichmässig vertheiltes System tangentialer Zugkräfte hervorruft.

Wenn wir die Coordinatenaxen wie in § 727 wählen, so haben wir die Gleichungen (2) des § 697, nachdem $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ gesetzt ist, für alle Punkte des Raumes zu lösen, für welche x positiv ist und y zwischen 0 und b liegt; dabei sind noch die Grenzbedingungen

$$(17)\left\{\begin{array}{l} P=0,\ Q=0,\ R=0,\ S=0,\ T=0,\ U=0, \text{ wenn } y=0 \text{ oder } b \text{ ist;} \\ P=0,\ Q=0,\ R=0,\ S=0,\ U=0,\ T=\varphi(y), \text{ wenn } x=0 \text{ ist;} \\ \text{und } \alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0, \text{ wenn } x=\infty \text{ ist} \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Siehe § 661.}\\ \text{oder § 662 (1)}\\ \text{auch § 693 (5)}\\ \text{u. § 670 (6).}\end{array}$$

zu erfüllen.

Da jede der Grössen α, β, γ von z unabhängig sein muss, so ergibt sich hieraus

$$(18)\left\{\begin{array}{ll} \text{(a)} & \frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} = 0 \text{ in allen Punkten des Körpers;} \\ \text{(b)} & \gamma = 0, \text{ wenn } x = \infty \text{ ist;} \\ \text{(c)} & n\frac{d\gamma}{dy} = 0, \text{ wenn } y = 0 \text{ oder } b \text{ ist;} \\ \text{(d)} & n\frac{d\gamma}{dx} = \varphi(y), \text{ wenn } x = 0 \text{ ist,} \end{array}\right.$$

und alle, sowohl die für das Innere, wie die für die Oberfläche geltenden Gleichungen, welche α und β enthalten, werden durch die Werthe $\alpha=0$, $\beta=0$ befriedigt, erfordern also (Zusatz C) $\alpha=0$, $\beta=0$. Aus (a), (b) und (c) sieht man natürlich zunächst, dass die Fourier'sche Lösung von der Form

$$19)\qquad \gamma = \Sigma A_\nu \, e^{-\frac{\nu\pi x}{b}} \cos\frac{\nu\pi y}{b}$$

ist, und wegen (d) sind die Coefficienten A_ν so zu bestimmen, dass

$$(20)\qquad -\frac{n\pi}{b}\,\Sigma\nu\, A_\nu \cos\frac{\nu\pi y}{b} = \varphi(y)$$

wird. Sie sind daher [wie man erkennt, wenn man in § 77 (13) und (14) φ so annimmt, dass $\varphi\,(p-\xi) = \varphi\,\xi$ wird, und $p = 2\,b$ setzt] folgende: —

$$(21)\qquad A_\nu = -\frac{b}{n\pi}\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\frac{2}{b}\int_0^b \varphi(y)\cos\frac{\nu\pi y}{b}\,dy.$$

Nehmen wir (für den vorliegenden besonderen Fall)

$$(22)\qquad \varphi\,(y) = \frac{12\,\Omega}{b^3}\,(y - {}^1\!/_2\, b)$$

an, so erhalten wir

$$(23)\qquad A_{2\nu} = 0 \text{ und } A_{2\nu+1} = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{1}{(2\nu+1)^3}$$

und gelangen auf diese Weise zum Resultat (16).

729. Schnelle Abnahme der Störung vom Rande aus nach innen zu. — Es ist bemerkenswerth, wie schnell die ganze durch dieses Resultat dargestellte Störung von dem Rande aus, wo die störende Zugkraft angreift, nach innen zu sich verringert (vergleiche § 586), und wie jedes folgende Glied viel schneller als das vorhergehende abnimmt.

Da $e = 2{\cdot}71828$, $e^{{}^1\!/_2\pi} = 4{\cdot}801$, $e^{2\cdot303} = 10$, $e^{\pi} = 23{\cdot}141$, $e^{2\pi} = 535{\cdot}5$ ist, so erhalten wir

$$\text{für } x = \frac{1}{3{\cdot}1416}\,b,\quad \gamma = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{\cos\frac{\pi y}{b}}{2{\cdot}718} - \frac{\cos\frac{3\pi y}{b}}{3^3.2{\cdot}718^3} + \frac{\cos\frac{5\pi y}{b}}{5^3.2{\cdot}718^5} - \text{u. s. w.}\right)$$

$$x = {}^1\!/_2\, b,\quad \gamma = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{\cos\frac{\pi y}{b}}{4{\cdot}801} - \frac{\cos\frac{3\pi y}{b}}{3^3.4{\cdot}801^3} + \frac{\cos\frac{5\pi y}{b}}{5^3.4{\cdot}801^5} - \text{u. s. w.}\right)$$

$$x = \frac{2{\cdot}303}{\pi}\,b,\quad \gamma = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{\cos\frac{\pi y}{b}}{10} - \frac{\cos\frac{3\pi y}{b}}{3^3.10^3} + \frac{\cos\frac{5\pi y}{b}}{5^3.10^5} - \text{u. s. w.}\right)$$

$$x = b,\quad \gamma = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{\cos\frac{\pi y}{b}}{23{\cdot}14} - \frac{\cos\frac{3\pi y}{b}}{3^3.23{\cdot}14^3} + \frac{\cos\frac{5\pi y}{b}}{5^3.23{\cdot}14^5} - \text{u. s. w.}\right)$$

$$x = 2b,\quad \gamma = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{\cos\frac{\pi y}{b}}{535{\cdot}5} - \frac{\cos\frac{3\pi y}{b}}{3^3.535{\cdot}5^3} + \frac{\cos\frac{5\pi y}{b}}{5^3.535{\cdot}5^5} - \text{u. s. w.}\right)$$

wodurch der am Schluss des § 647 ausgesprochene Satz schlagend bewiesen wird.

730. Allgemeines Problem eines unendlich grossen festen Körpers. — Wir bedauern, dass der Mangel an Raum uns zwingt, die Widerstände eines Prisma gegen torquirende Biegung und die Biegungswiderstände einer Platte von aeolotroper Substanz ununtersucht zu lassen, und uns auch jetzt noch auf isotrope Substanzen zu beschränken, wo wir zum Schluss die vollständigen Integrale der Gleichung [§ 697 (2)] des inneren Gleichgewichts für einen unter der Einwirkung beliebig gegebener Kräfte stehenden unendlich grossen festen Körper und die in harmonischen Reihen dargestellten Lösungen ermitteln wollen, welche für Probleme über die Deformation von Kugeln und Kugelschalen, sowie von vollen und hohlen Cylindern mit kreisförmiger Basis (§ 738) passend sind. Das Problem, das wir für den unendlich grossen festen Körper zu lösen haben, ist folgendes: —

Es seien in § 698 (6) X, Y, Z beliebige Functionen von (x, y, z), die entweder discontinuirlich sind und in allen Punkten ausserhalb einer gewissen geschlossenen Oberfläche von endlicher Grösse verschwinden, oder continuirlich sind und in allen unendlich weit vom Anfangspunkt entfernten Punkten verschwinden. Im letzteren Falle mögen diese Functionen so rasch abnehmen, dass, wenn R die Resultante von X, Y, Z in einem Punkte ist, welcher den Abstand D vom Coordinatenanfang hat, RD gegen Null convergirt, wenn D unbegränzt wächst. Man soll die Werthe α, β, γ bestimmen, welche jenen Gleichungen [§ 698 (6)] genügen und für unendlich entfernte Punkte (d. h. für unendlich grosse Werthe von x, y oder z) einzeln verschwinden.

Lösung für eine isotrope Substanz. — (a) Wenn man die erste dieser Gleichungen nach x, die zweite nach y und die dritte nach z differentiirt und die Resultate addirt, so erhält man

$$(1) \qquad (m + n) \nabla^2 \delta + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0.$$

(b) Dies zeigt, dass, wenn wir uns durch einen Raum eine Masse vertheilt denken, deren Dichtigkeit ϱ durch die Formel

$$(2) \qquad \varrho = \frac{1}{4\pi(m+n)} \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right)$$

gegeben ist, δ gleich dem Potential dieser Masse im Punkte (x, y, z) sein muss. Denn [§ 491 (c)] wenn V dieses Potential ist, so haben wir

$$\nabla^2 V + 4\pi\varrho = 0.$$

Wird dies von (1) subtrahirt und das Resultat durch $(m + n)$ dividirt, so folgt

(3) $$\nabla^2 (\delta - V) = 0$$

für alle Werthe von (x, y, z). Da nun XD, YD, ZD gegen Null convergiren, wenn D unendlich gross wird, so muss offenbar für alle unendlich weit entfernten Punkte $V = 0$ sein. Ist also S eine beliebige geschlossene Oberfläche, welche den Coordinatenanfangspunkt umgibt und überall unendlich weit von ihm entfernt ist, so ist die Function $(\delta - V)$ für alle auf S liegenden Punkte Null, während sie für alle innerhalb S gelegenen Punkte der Gleichung (3) genügt. Es muss also [Zusatz A (e)] $\delta = V$ sein. Mit anderen Worten: Die Thatsache, dass (1) für alle Punkte des Raumes besteht, liefert

(4) $$\delta = \frac{1}{4\pi(m+n)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{dX'}{dx'} + \frac{dY'}{dy'} + \frac{dZ'}{dz'}\right) dx'\, dy'\, dz'}{\sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}},$$

wo X', Y', Z' die Werthe von X, Y, Z für einen beliebigen Punkt (x', y', z') bezeichnen.

(c) Wir können diesen Ausdruck durch eine partielle Integration und durch Beachtung der vorgeschriebenen Convergenzbedingung, nach welcher für $x' = \infty$

(5) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X'\, dy'\, dz'}{\sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}} = 0$$

ist, modificiren und erhalten die Formel

(6) $$\delta = \frac{-1}{4\pi(m+n)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X'(x-x') + Y'(y-y') + Z'(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx'dy'dz',$$

welche für die meisten Zwecke passender als (4) ist.

(d) Nach genau demselben Verfahren, das wir in (b) anwandten, integriren wir jetzt jede der drei Gleichungen (6) des § 698 einzeln beziehungsweise nach α, β, γ und finden

(7) $$\alpha = u + U, \beta = v + V, \gamma = w + W,$$

wo u, v, w, U, V, W die Potentiale von Massen im Punkte (x, y, z) bezeichnen, welche durch den ganzen Raum vertheilt sind und beziehungsweise die Dichtigkeiten

$$\frac{m}{4\pi n}\frac{d\delta}{dx},\quad \frac{m}{4\pi n}\frac{d\delta}{dy},\quad \frac{m}{4\pi n}\frac{d\delta}{dz},\quad \frac{X}{4\pi n},\quad \frac{Y}{4\pi n},\quad \frac{Z}{4\pi n}$$

haben; mit anderen Worten: u, u. s. w., U, u. s. w. sind solche Functionen, dass in allen Punkten des Raumes

(8) $$\nabla^2 u + \frac{m}{n}\frac{d\delta}{dx} = 0, \text{ u. s. w.}, \nabla^2 U + \frac{X}{n} = 0, \text{ u. s. w.}$$

ist. Bezeichnen also δ'', X'', Y'', Z'' die Werthe von δ, X, Y, Z für einen Punkt (x'', y'', z''), so erhalten wir für α

(9) $$\alpha = \frac{1}{4\pi n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(m\frac{d\delta''}{dx''} + X''\right) dx''\, dy''\, dz''}{\sqrt{[(x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2]}};$$

wird hierin δ'' durch seinen Werth (6) ersetzt, so wird α durch die

Summe eines sechsfachen und eines dreifachen Integrals ausgedrückt; das letztere ist das U der Formel (7). Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für β und γ. Dieselben lassen sich jedoch bedeutend vereinfachen, da, wie wir alsbald sehen werden, jedes der sechsfachen Integrale auf ein dreifaches reducirt werden kann.

Specieller Fall. — (e) Um einen besonderen Fall zu betrachten, nehmen wir an, jede der Grössen X, Y, Z sei im Innern einer Kugel, die den Coordinatenanfang zum Mittelpunkt und den Radius a hat, überall constant, in jedem andern Punkte dagegen Null. Unter dieser Voraussetzung wird $-\delta$ nach (6) die Summe der Producte jeder der Grössen X, Y, Z in die entsprechende Componente der Attraction einer durch jenen Raum mit der Dichtigkeit $\frac{1}{4\pi(m+n)}$ gleichförmig vertheilten Masse. Folglich ist [§ 491 (b)]

$$(10)\quad \begin{cases} \delta = \dfrac{-a^3}{3(m+n)}\,\dfrac{Xx+Yy+Zz}{r^3} & \text{für Punkte ausserhalb der Kugelfläche,} \\ \delta = \dfrac{-1}{3(m+n)}\,(Xx+Yy+Zz) & \text{für Punkte innerhalb der Kugelfläche.} \end{cases}$$

Nun können wir das u der Formel (8) in zwei Theile u', u'' theilen, welche beziehungsweise von den Werthen abhängen, die $\frac{d\delta}{dx}$ innerhalb und ausserhalb der Kugelfläche hat; dann ist

$$(11)\quad \begin{cases} \text{für } r<a & \nabla^2 u' = \dfrac{mX}{3n(m+n)} = const., \\ \quad\text{„}\ \ r>a & \nabla^2 u' = 0; \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \text{für } r<a & \nabla^2 u'' = 0, \\ \quad\text{„}\ \ r>a & \nabla^2 u'' = -\dfrac{m}{n}\,\dfrac{d\delta}{dx}, \end{cases}$$

und dies ist eine räumliche harmonische Kugelfunction vom Grade -3, da δ durch die erste der Gleichungen (10) gegeben ist.

Die Lösung von (11), welche einfach das Potential einer gleichmässig mit Masse erfüllten Kugel von der Dichtigkeit $-\frac{1}{4\pi}\,\frac{mX}{3n(m+n)}$ bedeutet, ist natürlich

$$(13)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{-mX}{18n(m+n)}\,(3a^2-r^2) & \text{für } r<a \\ u' = \dfrac{-mX}{9n(m+n)}\,\dfrac{a^3}{r} & \text{für } r>a. \end{cases}$$

Wenn wir weiter in der Formel (12) des Zusatzes B $m=2$, $n=-3$ und $V_{-3}=\frac{d\delta}{dx}$ setzen, so erhalten wir

$$(14)\qquad \nabla^2\left(r^2\,\frac{d\delta}{dx}\right) = -6\,\frac{d\delta}{dx} \quad \text{für } r>a,$$

da, für $r>a$, $\frac{d\delta}{dx}$ eine harmonische Kugelfunction der Ordnung -3 ist.

Nun ist $r^5 \frac{d\delta}{dx}$ [Zusatz **B** (13)] eine räumliche harmonische Kugelfunction vom Grade 2; bezeichnet also $\left[\frac{d\delta}{dx}\right]$ für irgend einen Punkt innerhalb der Kugelfläche denselben algebraischen Ausdruck, welchen $\frac{d\delta}{dx}$ nach (10) für den äusseren Raum bezeichnet, so ist $\frac{r^5}{a^3}\left[\frac{d\delta}{dx}\right]$ eine Function, welche für den ganzen Raum innerhalb der Kugel der Gleichung $\nabla^2 u = 0$ genügt und für die der Kugeloberfläche innen und aussen unendlich nahe liegenden Punkte gleich $r^2 \frac{d\delta}{dx}$ ist. Folglich ist $\frac{r^5}{a^3}\left[\frac{d\delta}{dx}\right]$ für den inneren und $r^2 \frac{d\delta}{dx}$ für den äusseren Raum das Potential einer Masse, deren Dichtigkeit ausserhalb der Kugel $\frac{1}{4\pi} \cdot 6 \frac{d\delta}{dx}$, innerhalb dagegen Null ist, und einer, so viel wir bis jetzt wissen, völlig unbestimmten Massenschicht, welche über die trennende Kugeloberfläche vertheilt ist. Um die Flächendichtigkeit dieser Schicht zu finden, nehmen wir zunächst für einen der Oberfläche unendlich nahe liegenden äusseren Punkt

$$\left(x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy} + z \frac{d}{dz}\right)\left(r^2 \frac{d\delta}{dx}\right),$$

was wir mit $-\{r R\}$ bezeichnen können, und für einen der Oberfläche unendlich nahe liegenden inneren Punkt

$$\left(x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy} + z \frac{d}{dz}\right)\left(\frac{r^5}{a^3}\left[\frac{d\delta}{dx}\right]\right)$$

was mit $-[r R]$ bezeichnet werden möge. Berücksichtigen wir dann, dass nach der Bezeichnung des Zusatzes $A(a)$ $x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy} + z \frac{d}{dz}$ dasselbe wie $r \frac{\partial}{dr}$ ist, so erhalten wir nach Zusatz **B** (5)

$$\{R\} = r \frac{d\delta}{dx} \text{ und } [R] = -2 \frac{r^4}{a^3}\left[\frac{d\delta}{dx}\right].$$

Folglich ist, da $r^3 \frac{d\delta}{dx}$ für den äusseren Raum von r unabhängig ist, und da r für jeden der beiden Punkte sich unendlich wenig von a unterscheidet,

$$\{R\} - [R] = \frac{3}{a^2} \cdot r^3 \frac{d\delta}{dx}.$$

Nun sind aber $\{R\}$ und $[R]$ die in der Richtung der Radien genommenen Componenten der dem in der vorausgesetzten Weise vertheilten Potential entsprechenden Kraft in Punkten, die einander unendlich nahe zu beiden Seiten der Kugelfläche liegen. Mithin geht aus § 478 hervor, dass es zur Erzeugung jener Vertheilung einer Massenschicht auf der trennenden Oberfläche bedarf, welche die Flächendichtigkeit

$$\frac{1}{4\pi}(\{R\} - [R])$$

hat. Da aber $\{R\} - [R]$ eine harmonische Flächenfunction zweiter Ordnung ist, so ist das Potential dieser Schicht allein [§ 536 (4)]

$$\tfrac{1}{5}\,(\{R\} - [R])\,\frac{r^2}{a} \text{ im Innern der Kugel}$$

und

$$\tfrac{1}{5}\,(\{R\} - [R])\,\frac{a^4}{r^3} \text{ im äusseren Raum,}$$

oder, mit Rücksicht auf den oben für $\{R\} - [R]$ gefundenen Werth,

$$\frac{3}{5a^3}\,r^5\left[\frac{d\delta}{dx}\right] \text{ im Innern der Kugel}$$

und

$$\frac{3a^2}{5}\,\frac{d\delta}{dx} \text{ im äusseren Raum.}$$

Wird dieses Potential von dem früher angenommenen Gesammtpotential subtrahirt, so folgt

$$\text{für das Innere der Kugel } \frac{2}{5a^3}\,r^5\left[\frac{d\delta}{dx}\right]$$

$$\text{und für den äusseren Raum } (r^2 - \tfrac{3}{5}\,a^2)\,\frac{d\delta}{dx}$$

als Werth des Potentials einer durch den äusseren Raum mit der Dichtigkeit $\frac{1}{4\pi}\cdot 6\,r^2\frac{d\delta}{dx}$ vertheilten Masse, die keine Oberflächenschicht hat. Hieraus und aus (14) ersehen wir, dass die Lösung von (12) folgende ist: —

$$(15)\quad \begin{cases} u'' = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{2}{5}\,\dfrac{m}{n}\,\dfrac{r^5}{a^3}\left[\dfrac{d\delta}{dx}\right] \text{ für } r < a \\ u'' = \tfrac{1}{6}\,\dfrac{m}{n}\,(r^2 - \tfrac{3}{5}\,a^2)\,\dfrac{d\delta}{dx} \text{ für } r > a. \end{cases}$$

Da aus (8) hervorgeht, dass U das Potential einer Masse von der Dichtigkeit $\frac{X}{4\pi n}$ ist, und da X im Innern der Kugel constant und in jedem äusseren Punkte Null ist, so erhalten wir

$$(16)\quad \begin{cases} U = \dfrac{X}{6n}\,(3a^2 - r^2) \text{ für } r < a \\ U = \dfrac{X}{3n}\,\dfrac{a^3}{r} \text{ für } r > a. \end{cases}$$

Dies liefert nach (7), mit Rücksicht auf (13), (15) und (10),

$$17\quad \begin{cases} \text{für } r < a \\ \alpha = \dfrac{1}{18n(m+n)}\left\{(2m+3n)\,X\,(3a^2 - r^2) - \tfrac{2}{5}\,m\,r^5\,\dfrac{d}{dx}\,\dfrac{Xx+Yy+Zz}{r^3}\right\}, \\ \text{und für } r > a \\ \alpha = \dfrac{a^3}{18n(m+n)}\left\{2(2m+3n)\,\dfrac{X}{r} - m\,(r^2 - \tfrac{3}{5}\,a^2)\,\dfrac{d}{dx}\,\dfrac{Xx+Yy+Zz}{r^3}\right\}, \end{cases}$$

und symmetrische Ausdrücke für β und γ.

731. Eine eingehende Betrachtung dieses Resultats mit graphischen Erläuterungen der Verschiebungen, Deformationen und elastischen Reactionen, zu denen es führt, ist in der Theorie der Fortleitung der Kraft durch feste Körper vom grössten Interesse. Wir müssen es uns aber versagen, hierauf einzugehen, und werden uns auf die Lösung des allgemeinen Problems des § 730 beschränken.

Um dieselbe herzuleiten, haben wir jetzt nur zu bemerken, dass, wenn a unendlich klein wird, die Ausdrücke für α, β, γ, da X, Y, Z endlich bleiben, gleichfalls unendlich klein werden, sogar innerhalb des Angriffsorts der Kraft; in Entfernungen von diesem Angriffsort, die gross sind im Vergleich zu a, wird

$$(18)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{V}{24\pi n(m+n)}\left\{2(2m+3n)\dfrac{X}{r} - m r^2 \dfrac{d}{dx}\dfrac{Xx+Yy+Zz}{r^3}\right\}, \\ \beta = \text{u. s. w.}, \quad \gamma = \text{u. s. w.}, \end{cases}$$

wo V das Volumen der Kugel bezeichnet. Da diese Ausdrücke einfach von dem ganzen Betrage der Kraft abhängen (deren Componenten XV, YV, ZV sind) und, wenn letztere gegeben ist, von dem Radius der Kugel unabhängig sind, so drücken dieselben Formeln auch die Wirkung eines im Ganzen ebenso grossen Kraftsystems aus, welches durch einen unendlich kleinen Raum von beliebiger Form vertheilt ist, der nach keiner Richtung hin mehr als unendlich wenig vom Coordinatenanfangspunkt aus ausgedehnt ist. Wir erhalten daher, wenn wir wieder die Bezeichnung des § 730 (b) anwenden, für die gesuchte allgemeine Lösung

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{24\pi n(m+n)}\iiint dx'\,dy'\,dz'\left\{2(2m+3n)\dfrac{X'}{D} - mD^2\dfrac{d}{dx}\dfrac{X'(x-x')+Y'(y-y')+Z'(z-z')}{D^3}\right\} \\ \beta = \dfrac{1}{24\pi n(m+n)}\iiint dx'\,dy'\,dz'\left\{2(2m+3n)\dfrac{Y'}{D} - mD^2\dfrac{d}{dy}\dfrac{X'(x-x')+Y'(y-y')+Z'(z-z')}{D^3}\right\} \\ \gamma = \dfrac{1}{24\pi n(m+n)}\iiint dx'\,dy'\,dz'\left\{2(2m+3n)\dfrac{Z'}{D} - mD^2\dfrac{d}{dz}\dfrac{X'(x-x')+Y'(y-y')+Z'(z-z')}{D^3}\right\}, \end{cases}$$

wo $D = \sqrt{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}}$ ist, die Integration $\iiint$ sich durch den ganzen Raum erstreckt und X', Y', Z' drei willkürliche, nur durch die Convergenzbedingung des § 730 beschränkte Functionen von x', y', z' sind.

Diese Lösung wurde, wenn auch in etwas anderer Form, zuerst im Cambridge and Dublin Mathematical Journal 1848 gegeben. (On the Equations of Equilibrium of an Elastic Solid.)

Vergleichen wir sie mit (9), so sehen wir, dass das in (9) enthaltene sechsfache Integral jetzt wirklich auf ein dreifaches reducirt ist.

Der Process (e), durch welchen diese Reduction ausgeführt wird, besteht der Hauptsache nach aus der Berechnung eines gewissen dreifachen Integrals mittels der passenden Lösung der partiellen Differentialgleichung $\nabla^2 V + 4\pi\varrho = 0$ [vergl. § 649, wo der viel einfachere Fall behandelt wird, in welchem ϱ bloss eine Function von r ist]. Das Resultat durch

directe Integration zu prüfen, ist eine gute Uebung in der Integralrechnung.

732. Anwendung auf das Problem des § 696. — In §§ 730, 731 ist der gedachte Gegenstand ein homogener elastischer fester Körper, welcher den ganzen Raum erfüllt und die Wirkung eines gegebenen Kräftesystems erfährt, welches auf seine Substanz körperlich einwirkt. Abgesehen von der in § 731 angedeuteten interessanten Anwendung, ist die Lösung insofern von Nutzen, als sie das Problem des § 696 vereinfacht; sie reducirt dasselbe nämlich unmittelbar auf den Fall, in welchem keine Kraft auf die innere Substanz des Körpers wirkt: —

Die Gleichungen, denen genügt werden muss, sind für den ganzen vom Körper eingenommenen Raum die Formeln (6) des § 698 und für alle Punkte seiner Umgrenzung gewisse andere Gleichungen, welche ausdrücken, dass die Verschiebungen oder die Zugkräfte auf der Oberfläche den vorgeschriebenen Bedingungen genügen. Es seien nun $`\alpha, `\beta, `\gamma$ Functionen von (x, y, z), welche für den vom Körper eingenommenen Raum die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} n\,\nabla^2\,`\alpha + m\,\dfrac{d`\delta}{dx} + X = 0, \quad n\,\nabla^2\,`\beta + m\,\dfrac{d`\delta}{dy} + Y = 0, \\ n\,\nabla^2\,`\gamma + m\,\dfrac{d`\delta}{dz} + Z = 0, \quad \text{wo der Kürze wegen} \\ `\delta = \dfrac{d`\alpha}{dx} + \dfrac{d`\beta}{dy} + \dfrac{d`\gamma}{dz} \text{ ist,} \end{cases}$$

befriedigen. Setzen wir dann

$$(2) \qquad \alpha = `\alpha + \alpha_{,}, \quad \beta = `\beta + \beta_{,}, \quad \gamma = `\gamma + \gamma_{,},$$

so sehen wir, dass wir, um die Aufgabe vollständig zu lösen, nur $\alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}$ mittels der Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} n\,\nabla^2\alpha_{,} + m\,\dfrac{d\delta_{,}}{dx} = 0, \quad n\nabla^2\beta_{,} + m\dfrac{d\delta_{,}}{dy} = 0, \\ n\,\nabla^2\gamma_{,} + m\,\dfrac{d\delta_{,}}{dz} = 0, \quad \delta_{,} = \dfrac{d\alpha_{,}}{dx} + \dfrac{d\beta_{,}}{dy} + \dfrac{d\gamma_{,}}{dz}, \end{cases}$$

die in dem ganzen vom Körper eingenommenen Raum erfüllt sein müssen, und zugleich mittels der für die Punkte der Umgrenzung des Körpers geltenden Gleichungen zu bestimmen haben; die letzteren Gleichungen erhält man, wenn man von den vorgeschriebenen Werthen der Oberflächenverschiebung oder Zugkraft die aus $`\alpha$, $`\beta$, $`\gamma$ berechneten Componenten der Verschiebung oder der Zugkraft subtrahirt.

Werthe für $`\alpha$, $`\beta$, $`\gamma$ kann man nach §§ 730, 731 immer finden, indem man voraussetzt, die Gleichungen (1) des § 732 seien für den ganzen Raum gültig und X, Y, Z seien discontinuirliche Functionen, welche für alle Punkte des Körpers die gegebenen Werthe haben, und von denen jede für alle dem Körper nicht angehörenden Punkte Null sei. Aber

die einzige Bedingung, die erfüllt sein muss, ist die, dass die Gleichungen (1) in dem vom Körper wirklich eingenommenen Raume erfüllt seien, und in einigen der wichtigsten Fälle der Praxis kann dieser Bedingung leichter auf eine andere Weise genügt werden, als indem man $`\alpha$, $`\beta$, $`\gamma$ auf die angegebene Art bestimmt, und noch eine Bedingung für den übrigen Raum hinzufügt.

733. Eine wichtige Klasse von Fällen. — So z. B. wollen wir voraussetzen, die Kräfte seien so beschaffen, dass $Xdx + Ydy + Zdz$[1]) das Differential einer Function W der als unabhängig Veränderliche angesehenen Grössen x, y, z ist. Diese Voraussetzung umfasst einige der wichtigsten und interessantesten Anwendungen auf die Praxis, darunter folgende: —

(1) Ein homogener isotroper Körper, auf welchen in parallelen Linien gleiche Gravitationskräfte wirken, wie es bei einem Körper von geringen Dimensionen unter dem Einfluss der terrestrischen Gravitation der Fall ist.

(2) Ein homogener isotroper Körper, auf welchen eine beliebig vertheilte schwere Masse wirkt, und der entweder im Zustand der Ruhe durch Oberflächenzugkräfte ins Gleichgewicht gebracht wird, wenn die Attractionskräfte einander nicht selbst das Gleichgewicht halten; oder der dem D'Alembert'schen Princip (§ 264) gemäss die Bedingungen des inneren Gleichgewichts erfüllt, indem die Widerstände aller Theile seiner Masse gegen Beschleunigungen und die Attractionskräfte, denen er unterworfen ist, einander das Gleichgewicht halten, wenn die Umstände von der Art sind, dass keine Beschleunigung der Rotation in Rechnung gezogen werden

---

[1]) Es sei m die Masse eines kleinen Theils des Körpers; x, y, z die Coordinaten, welche dieser Theil zu irgend einer Zeit hat; und Pm, Qm, Rm die Componenten der auf den Theil wirkenden Kraft. Wenn dann das System conservativ ist, so muss $Pdx + Qdy + Rdz$ das Differential einer Function von x, y, z sein. Es mögen z. B. die auf alle Theile des Körpers wirkenden Kräfte in den von einer festliegenden Masse ausgeübten Anziehungen oder Abstossungen bestehen, und es sei der betrachtete Massenpunkt die Masse des Körpers innerhalb eines unendlich kleinen Volumens $\delta x \delta y \delta z$. Dann haben wir $Pm = X \delta x \delta y \delta z$, u. s. w. Wenn also ϱ die Dichtigkeit der Masse von m bezeichnet, so dass $\varrho \delta x \delta y \delta z = m$ ist, so ist in der Bezeichnung des Textes $P\varrho = X$, $Q\varrho = Y$, $R\varrho = Z$; folglich ist $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential oder nicht, jenachdem ϱ eine Function des Potentials ist oder nicht, d. h. jenachdem die Dichtigkeit des Körpers auf den Flächen constanten Potentials für die Kraftvertheilung, zu der (P, Q, R) gehört, gleichförmig ist oder nicht. So wird die Bedingung des Textes im Falle eines conservativen Kraftsystems erfüllt, wenn der Körper homogen ist. Sie wird aber erfüllt, das System mag conservativ sein oder nicht, für ein solches Dichtigkeitsgesetz, dass, wenn der Körper seine Starrheit verlöre und sich in eine in einem geschlossenen starren Gefäss befindliche unzusammendrückbare Flüssigkeit verwandelte, er sich im Gleichgewicht (§ 755) befinden würde.

muss. Zu diesem Falle gehört das unten gelöste Problem, die durch den Ebbe und Fluth erzeugenden Einfluss der Sonne und des Mondes hervorgebrachte Deformation der festen Erde zu bestimmen, wenn das specifische Gewicht und die Starrheit derselben überall als gleichmässig angenommen werden.

(3) Ein gleichförmiger Körper, deformirt durch eine Centrifugalkraft, die aus einer gleichförmigen Rotation um eine feste Axe herrührt.

In jener Voraussetzung sind aber nicht enthalten: der Fall eines festen Körpers, dessen specifisches Gewicht nach einem beliebigen Gesetz in den verschiedenen Theilen variirt, und der beliebigen jener Einwirkungen unterworfen ist; allgemein der Fall eines Stücks magnetisirten Stahls, das einer magnetischen Anziehung ausgesetzt ist; ja nicht einmal der Fall eines gleichförmigen Körpers, welcher den Bedingungen des inneren Gleichgewichts genügt, sobald die Widerstände gegen eine Beschleunigung seiner Rotation um eine feste Axe, die durch Oberflächenkräfte erzeugt wird, in Betracht kommen.

Wir haben nach der hier gemachten Voraussetzung

$$\frac{dW}{dx} = X, \quad \frac{dW}{dy} = Y, \quad \frac{dW}{dz} = Z, \tag{4}$$

und dies liefert

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = \nabla^2 W.$$

Hieraus folgt für $`\delta$, wie sich in § 730 (a) für δ ergab,

$$(m+n)\,\nabla^2 {}`\delta + \nabla^2 W = 0,$$

welche Formel durch die Annahme

$$\delta = -\frac{W}{m+n} \tag{5}$$

befriedigt wird. Führen wir weiter diese Voraussetzungen in die Gleichungen (1) des § 732 ein, so sehen wir, dass dieselben schliesslich durch folgende Werthe für $`\alpha$, $`\beta$, $`\gamma$ befriedigt werden: —

$$\left\{\begin{array}{l} `\alpha = \dfrac{1}{m+n}\dfrac{d\vartheta}{dx}, \quad `\beta = \dfrac{1}{m+n}\dfrac{d\vartheta}{dy}, \quad `\gamma = \dfrac{1}{m+n}\dfrac{d\vartheta}{dz}, \\ \text{wo } \vartheta \text{ eine beliebige Function ist, welche der Gleichung} \\ \nabla^2\vartheta = -W \text{ genügt.} \end{array}\right. \tag{6}$$

Wir bemerken noch, dass, wenn W eine harmonische Kugelfunction [Zusatz B (a)] ist, eine Voraussetzung, welche, wie wir später sehen werden, die wichtigsten Anwendungen auf physikalische Probleme in sich schliesst, wir ohne Weiteres aus Zusatz B (12) folgendes Integral der Gleichung für ϑ erhalten: —

$$\vartheta = \frac{r^2}{2(2\nu+3)} W_\nu, \tag{7}$$

wo der an W gehängte Index ausdrückt, dass diese Grösse vom Grade ν ist.

734. Das Problem des § 696 unter der Voraussetzung, dass nur auf die Oberfläche Kräfte einwirken. — Das allgemeine Problem des § 696, welches jetzt auf den Fall zurückgeführt ist, in dem keine Kraft auf die innere Substanz einwirkt, wird danach, mathematisch ausgedrückt, folgendes: —

Drei Functionen α, β, γ von (x, y, z), welche für alle Punkte des vom Körper eingenommenen Raumes den Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} n\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d^2\alpha}{dz^2}\right)+m\,\frac{d}{dx}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)=0\\ n\left(\frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}+\frac{d^2\beta}{dz^2}\right)+m\,\frac{d}{dy}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)=0\\ n\left(\frac{d^2\gamma}{dx^2}+\frac{d^2\gamma}{dy^2}+\frac{d^2\gamma}{dz^2}\right)+m\,\frac{d}{dz}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)=0 \end{cases}$$

genügen, und die Gleichungen für alle Punkte der Umgrenzung zu bestimmen, welche geeignet sind, eine beliebige genügende Combination der beiden in § 696 angegebenen Oberflächenbedingungen oder eine derselben auszudrücken. Wenn diese Bedingungen darin bestehen, dass die Verschiebungen auf der Oberfläche gegeben sind, so sind die sie ausdrückenden Gleichungen natürlich bloss die Angabe willkürlicher Werthe von α, β, γ für jeden Punkt der Umgrenzungsfläche. Wenn andererseits auf der ganzen Oberfläche in einer völlig bestimmten Weise Kräfte angreifen, die nur den Bedingungen unterworfen sind, dass sie den in seinem deformirten Zustande als starr (§ 564) angenommenen Körper im Gleichgewicht halten, und wenn es sich darum handelt, zu bestimmen, wie der Körper sowohl an seiner Oberfläche, als in seinem Innern nachgibt, so sind die Bedingungen folgende: — Es bezeichne $d\Omega$ ein unendlich kleines Element der Oberfläche, und F, G, H Functionen der Lage auf der Oberfläche, welche die Componenten der einwirkenden Zugkraft ausdrücken. Diese Functionen sind willkürlich und nur den folgenden Bedingungen unterworfen, welche die Gleichungen [§ 551 (a), (b)] des Gleichgewichts eines starren Körpers sind: —

$$(2)\quad \begin{cases} \iint F\,d\Omega=0,\ \iint G\,d\Omega=0,\ \iint H\,d\Omega=0,\\ \iint(Hy-Gz)\,d\Omega=0,\ \iint(Fz-Hx)\,d\Omega=0,\ \iint(Gx-Fy)\,d\Omega=0; \end{cases}$$

ferner muss die vom Körper erlittene Deformation so beschaffen sein, dass sie für jeden Punkt der Oberfläche die Gleichungen

$$(3)\begin{cases}\left\{(m+n)\frac{d\alpha}{dx}+(m-n)\left(\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\right\}f+n\left(\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\beta}{dx}\right)g+n\left(\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\alpha}{dz}\right)h=F\\ \left\{(m+n)\frac{d\beta}{dy}+(m-n)\left(\frac{d\gamma}{dz}+\frac{d\alpha}{dx}\right)\right\}g+n\left(\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\gamma}{dy}\right)h+n\left(\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\beta}{dx}\right)f=G\\ \left\{(m+n)\frac{d\gamma}{dz}+(m-n)\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)\right\}h+n\left(\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\alpha}{dz}\right)f+n\left(\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\gamma}{dy}\right)g=H\end{cases}$$

befriedigt, welche aus § 662 (1) mit Anwendung von § 670 (6), § 693 (5) und § 698 (5) gefunden werden; f, g, h bezeichnen hier die Richtungscosinus der an die Umgrenzungsfläche in (x, y, z) gelegten Normalen.

735. Lösung des Problems des § 696 für Kugelschalen. — Die mittels der Laplace'schen Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen erhaltene Lösung dieses Problems für den Fall einer Kugelschale (§ 696) hat zuerst Lamé in einer in Liouville's Journal 1854 veröffentlichten Arbeit gegeben. Sie wird durch unsere Bezeichnungsweise und symmetrischen Formeln [Zusatz B. (1) — (24)] sehr vereinfacht [1]), die wir so lange beibehalten, bis wir für praktische Zwecke geeignete Entwicklungen der harmonischen Functionen in algebraischer oder trigonometrischer Form suchen werden.

(a) Wenn wir der Kürze wegen die bisher [§ 698 (8), (9)] gebrauchten Zeichen δ und ∇^2 beibehalten, so erhalten wir aus § 734 (1) nach dem Verfahren (a) des § 730

$$\nabla^2\delta = 0.$$

(b) **Beweis, dass die Ausdehnung sich in convergenten Reihen harmonischer Kugelfunctionen ausdrücken lässt.** — Es seien nun die Werthe, welche δ auf zwei beliebigen concentrischen Kugelflächen von den Radien a und a' hat, nach Zusatz B (52) in Reihen harmonischer Flächenfunctionen S_0, S_1, S_2, u. s. w. und S_0', S_1', S_2', u. s. w. entwickelt, so dass

$$(4)\qquad \begin{cases}\delta = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_\nu + \ldots \text{ für } r = a\\ \delta = S_0' + S_1' + S_2' + \ldots + S_\nu' + \ldots \text{ für } r = a'\end{cases}$$

ist. Dann muss in dem ganzen zwischen beiden Kugelflächen liegenden Raum

$$(5)\qquad \delta = \sum_0^\infty \frac{(a^{\nu+1}S_\nu - a'^{\nu+1}S'_\nu)\,r^\nu - (a\,a')^{\nu+1}(a'^\nu S_\nu - a^\nu S'_\nu)\,r^{-\nu-1}}{a^{2\nu+1} - a'^{2\nu+1}}$$

sein. Denn erstens convergirt diese Reihe für alle zwischen a und a'

---

[1]) „Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells, and Spheroids of Incompressible Liquid." W. Thomson, Phil. Trans., 1862.



liegenden Werthe von r. Dies zu beweisen, nehmen wir an, a' sei kleiner als a und schreiben (5) in der Form

$$\delta = \sum_0^\infty \delta_\nu + \sum_0^\infty \delta_{-\nu-1}, \tag{6}$$

wo δ_ν, $\delta_{-\nu-1}$ räumliche harmonische Kugelfunctionen von den Graden ν und $-\nu-1$ sind, die durch die folgenden Gleichungen bestimmt sind: —

$$\delta_\nu = \frac{S_\nu - \left(\frac{a'}{a}\right)^{\nu+1} S'_\nu}{1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^{2\nu+1}} \left(\frac{r}{a}\right)^\nu \text{ und } \delta_{-\nu-1} = -\frac{\left(\frac{a'}{a}\right)^\nu S_\nu - S'_\nu}{1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^{2\nu+1}} \left(\frac{a'}{r}\right)^{\nu+1}.$$

Für sehr grosse Werthe von ν nähern sich diese Ausdrücke den Grenzen

$$\delta_\nu = S_\nu \left(\frac{r}{a}\right)^\nu \text{ und } \delta_{-\nu-1} = S'_\nu \left(\frac{a'}{r}\right)^{\nu+1},$$

und da jede der Reihen (4) nothwendig convergirt, so convergiren die beiden Reihen, in welche in (6) die Entwicklung (5) getheilt ist, zuletzt rascher, als beziehungsweise die „geometrischen" Reihen

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\nu, \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu+1}, \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu+2}, \ldots \text{ und} \left(\frac{a'}{r}\right)^{\nu+1}, \left(\frac{a'}{r}\right)^{\nu+2}, \left(\frac{a'}{r}\right)^{\nu+3}, \ldots$$

Zweitens stimmt der Ausdruck (5) an der Grenze des betrachteten Raumes (den beiden concentrischen Kugelflächen) mit (4) überein.

Drittens genügt er in diesem Raume überall der Gleichung $\nabla^2\delta = 0$.

Folglich kann viertens keine Function, deren Werth von dem durch (5) gegebenen in irgend einem Punkte des zwischen beiden Kugelflächen liegenden Raumes verschieden ist, [Zusatz A (e)] den Bedingungen (3) und (4), denen δ unterworfen ist, genügen. In Worten lässt sich dies folgendermaassen ausdrücken: —

736. Allgemeiner Satz über die Möglichkeit einer Entwicklung nach räumlichen harmonischen Kugelfunctionen. — Jede Function δ von x, y, z, welche für alle Punkte des zwischen $\nabla^2 \delta = 0$ genügt, zwei concentrischen Kugelflächen liegenden Raumes der Gleichung kann als die Summe zweier Reihen vollkommener harmonischer Kugelfunctionen [Zusatz B (c)] dargestellt werden, von denen die eine von einem positiven, die andere von einem negativen Grade ist, und von denen jede für alle Punkte jenes Raumes convergirt.

(c) Wir können jetzt (6) kurz in folgender Form schreiben: —

$$\delta = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_\nu, \tag{7}$$

wo die vollkommene harmonische Kugelfunction δ_ν vom positiven oder negativen Grade ν schliesslich so bestimmt werden muss, dass den Bedingungen des Problems genügt wird. Wenn wir dieselbe aber erst als bekannt voraussetzen, so finden wir α, β, γ wie in § 730 (d), nur dass

wir jetzt die für harmonische Kugelfunctionen geeigneten Formeln benutzen, statt eine dreifache Integration anzuwenden. So erhalten wir aus (1) und (7)

$$\nabla^2 \alpha = -\frac{m}{n} \Sigma \frac{d\delta_\nu}{dx},$$

und da $\frac{d\delta_\nu}{dx}$ eine harmonische Function vom Grade $\nu - 1$ ist, so sehen wir, wenn wir im Zusatz B (12) $n = \nu - 1$ und $m = 2$ nehmen, dass die vollständige Lösung dieser Gleichung, als Gleichung für α angesehen,

$$\alpha = u - \frac{m r^2}{2n} \Sigma \frac{1}{2\nu + 1} \frac{d\delta_\nu}{dx}$$

ist, wo u eine ganz beliebige Lösung der Gleichung $\nabla^2 u = 0$ bezeichnet. Sind ebenso v und w Functionen, für welche $\nabla^2 v = 0$ und $\nabla^2 w = 0$ ist, so erhalten wir

$$\beta = v - \frac{m r^2}{2n} \Sigma \frac{1}{2\nu + 1} \frac{d\delta_\nu}{dy}, \; \gamma = w - \frac{m r^2}{2n} \Sigma \frac{1}{2\nu + 1} \frac{d\delta_\nu}{dz}.$$

Lösung der Gleichungen des innern Gleichgewichts in harmonischen Kugelfunctionen. — (d) Damit nun die Gleichungen (1) befriedigt werden, muss δ_ν in einem solchen Zusammenhange mit u, v, w stehen, dass

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \delta = \Sigma \delta_\nu$$

sei. Wenn wir folglich die eben für α, β, γ gefundenen Werthe differentiiren und die Formel

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(r^2 \frac{d\varphi_\nu}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(r^2 \frac{d\varphi_\nu}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(r^2 \frac{d\varphi_\nu}{dz}\right) \\ = 2\left(x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy} + z\frac{d}{dz}\right)\varphi_\nu + r^2 \nabla^2 \varphi_\nu = 2\nu\varphi_\nu + r^2 \nabla^2 \varphi_\nu, \end{cases}$$

in welcher φ_ν eine beliebige homogene Function νten Grades ist, berücksichtigen, so erhalten wir

$$\Sigma \delta_\nu = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} - \frac{m}{n} \Sigma \frac{\nu}{2\nu + 1} \delta_\nu.$$

Dies liefert

$$(9) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \Sigma \frac{(2\nu + 1)n + \nu m}{(2\nu + 1)n} \delta_\nu.$$

Wenn also Σu_ν, Σv_ν, Σw_ν die harmonischen Entwicklungen (§ 736 von u, v, w sind, so muss

$$(10) \quad \delta_\nu = \frac{(2\nu + 1)n}{(2\nu + 1)n + \nu m} \left(\frac{du_{\nu+1}}{dx} + \frac{dv_{\nu+1}}{dy} + \frac{dw_{\nu+1}}{dz}\right)$$

sein. Wird dies, nachdem ν in $\nu - 1$ verwandelt ist, in die vorhergehenden Ausdrücke für α, β, γ eingesetzt, so gelangen wir schliesslich zu der Lösung der Gleichungen (1) des § 734 in harmonischen Kugelfunctionen: —

$$(11)\quad\begin{cases}\alpha=\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty}\left\{u_\nu-\tfrac{1}{2}\dfrac{m r^2}{(2\nu-1)n+(\nu-1)m}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{du_\nu}{dx}+\dfrac{dv_\nu}{dy}+\dfrac{dw_\nu}{dz}\right)\right\}\\ \beta=\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty}\left\{v_\nu-\tfrac{1}{2}\dfrac{m r^2}{(2\nu-1)n+(\nu-1)m}\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{du_\nu}{dx}+\dfrac{dv_\nu}{dy}+\dfrac{dw_\nu}{dz}\right)\right\}\\ \gamma=\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty}\left\{w_\nu-\tfrac{1}{2}\dfrac{m r^2}{(2\nu-1)n+(\nu-1)m}\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{du_\nu}{dx}+\dfrac{dv_\nu}{dy}+\dfrac{dw_\nu}{dz}\right)\right\},\end{cases}$$

wo u_ν, v_ν, w_ν beliebige harmonische Kugelfunctionen vom Grade ν bezeichnen.

Für die folgenden analytischen Untersuchungen ist es zweckmässig, die Abkürzungen

$$(12)\qquad M_\nu = \tfrac{1}{2}\frac{m}{(2\nu-1)n+(\nu-1)m}$$

und

$$(13)\qquad \psi_{\nu-1} = \frac{du_\nu}{dx}+\frac{dv_\nu}{dy}+\frac{dw_\nu}{dz}$$

einzuführen, wodurch (11) in

$$(14)\qquad\begin{cases}\alpha=\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty}\left(u_\nu-M_\nu r^2\dfrac{d\psi_{\nu-1}}{dx}\right)\\ \beta=\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty}\left(v_\nu-M_\nu r^2\dfrac{d\psi_{\nu-1}}{dy}\right)\\ \gamma=\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty}\left(w_\nu-M_\nu r^2\dfrac{d\psi_{\nu-1}}{dz}\right)\end{cases}$$

übergeht.

(e) Es ist wichtig zu bemerken, dass, wenn man zu u, v, w beziehungsweise die Glieder $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ addirt (φ ist eine beliebige Function, welche der Gleichung $\nabla^2\varphi = 0$ genügt), die Gleichung (10) nicht geändert wird. Dies gestattet uns, die Lösung des Problems für eine Vollkugel, wenn die Verschiebungen über die Oberfläche gegeben sind, ohne Weiteres niederzuschreiben:

Es sei a der Radius der Kugel, und es seien die willkürlich gegebenen Werthe der drei Verschiebungs-Componenten für jeden Punkt der Oberfläche durch Reihen harmonischer Flächenfunctionen, nämlich beziehungsweise durch ΣA_ν, ΣB_ν, ΣC_ν ausgedrückt [Zusatz B (52)]. Dann ist die Lösung

$$(15)\qquad\begin{cases}\alpha=\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left\{A_\nu\left(\dfrac{r}{a}\right)^\nu+\dfrac{m(a^2-r^2)}{2a^\nu[(2\nu-1)n+(\nu-1)m]}\dfrac{d\Theta_{\nu-1}}{dx}\right\}\\ \beta=\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left\{B_\nu\left(\dfrac{r}{a}\right)^\nu+\dfrac{m(a^2-r^2)}{2a^\nu[(2\nu-1)n+(\nu-1)m]}\dfrac{d\Theta_{\nu-1}}{dy}\right\}\\ \gamma=\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left\{C_\nu\left(\dfrac{r}{a}\right)^\nu+\dfrac{m(a^2-r^2)}{2a^\nu[(2\nu-1)n+(\nu-1)m]}\dfrac{d\Theta_{\nu-1}}{dz}\right\}\\ \text{wo }\Theta_{\nu-1}=\dfrac{d(A_\nu r^\nu)}{dx}+\dfrac{d(B_\nu r^\nu)}{dy}+\dfrac{d(C_\nu r^\nu)}{dz}\text{ ist.}\end{cases}$$

Denn dies ist's, was (11) wird, wenn wir

$$u_\nu = A_\nu \left(\frac{r}{a}\right)^\nu + \frac{m}{2a^\nu\,[(2\nu+3)\,n + (\nu+1)\,m]}\,\frac{d\,\Theta_{\nu+1}}{dx},\ v_\nu = \text{u. s. w.}$$

nehmen, und es folgt

(16) $\alpha = \Sigma A_\nu,\quad \beta = \Sigma B_\nu,\quad \gamma = \Sigma C_\nu$, wenn $r = a$ ist.

Dieses Resultat hätte man natürlich durch ein rein analytisches Verfahren erhalten können, und wir werden zu demselben als einem besonderen Fall der folgenden Betrachtung gelangen: —

(f) Das Problem für eine Kugelschale, bei welcher die Verschiebungen für alle Punkte der beiden concentrischen sphärischen Umgrenzungsflächen willkürlich gegeben sind, ist viel verwickelter, und wir werden finden, dass ein rein analytisches Verfahren für die Lösung am geeignetsten ist.

Es seien a und a' die Radien der äusseren und der inneren Kugelfläche, und ΣA_ν, u. s. w., $\Sigma A'_\nu$, u. s. w. die Reihen der harmonischen Flächenfunctionen, welche [Zusatz B (52)] die willkürlich gegebenen Componenten der Verschiebung auf diesen Flächen ausdrücken, so dass unsere Oberflächenbedingungen folgende sind: —

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l}\alpha = \Sigma A_\nu\\ \beta = \Sigma B_\nu\\ \gamma = \Sigma C_\nu\end{array}\right\}, \text{ wenn } r = a \text{ ist};\ \left.\begin{array}{l}\alpha = \Sigma A'_\nu\\ \beta = \Sigma B'_\nu\\ \gamma = \Sigma C'_\nu\end{array}\right\}, \text{ wenn } r = a' \text{ ist.}$$

Wir bedienen uns jetzt der abgekürzten Bezeichnung (12) und (13), nehmen aus (14) alle Glieder von α, welche für einen constanten Werth von r harmonische Flächenfunctionen ν ter Ordnung werden, und setzen dieselben den entsprechenden Gliedern von (17) gleich. Dadurch ergibt sich

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} u_\nu + u_{-\nu-1} - r^2\left(M_{\nu+2}\dfrac{d\,\psi_{\nu+1}}{dx} + M_{-\nu+1}\dfrac{d\,\psi_{-\nu}}{dx}\right)\\ \qquad\qquad \left\{\begin{array}{ll} = A_\nu, & \text{wenn } r = a \text{ ist}\\ = A'_\nu, & \quad\text{„}\quad r = a' \text{ „}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Wenn wir beachten, dass jede der Grössen

$$r^{-\nu}u_\nu,\quad r^{\nu+1}u_{-\nu-1},\quad r^{-\nu}\frac{d\,\psi_{\nu+1}}{dx},\quad r^{\nu+1}\frac{d\,\psi_{-\nu}}{dx}$$

von r unabhängig ist, so erhalten wir aus (18) unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen zur Bestimmung dieser vier Functionen: —

$$19\left\{\begin{array}{l} a^\nu\,(r^{-\nu}u_\nu) + a^{-\nu-1}\,(r^{\nu+1}u_{-\nu-1})\\ -\,a^2\left[M_{\nu+2}\,a^\nu\left(r^{-\nu}\dfrac{d\,\psi_{\nu+1}}{dx}\right) + M_{-\nu+1}\,a^{-\nu-1}\left(r^{\nu+1}\dfrac{d\,\psi_{-\nu}}{dx}\right)\right] = A_\nu,\\ a'^\nu\,(r^{-\nu}u_\nu) + a'^{-\nu-1}\,(r^{\nu+1}u_{-\nu-1})\\ -\,a'^2\left[M_{\nu+2}\,a'^\nu\left(r^{-\nu}\dfrac{d\,\psi_{\nu+1}}{dx}\right) + M_{-\nu+1}\,a'^{-\nu-1}\left(r^{\nu+1}\dfrac{d\,\psi_{-\nu}}{dx}\right)\right] = A'_\nu.\end{array}\right.$$

Diese und die auf y und z bezüglichen symmetrischen Gleichungen genügen in Verbindung mit (13), u_ν, v_ν, w_ν für jeden positiven und nega-

tiven Werth von ν zu bestimmen. Die zweckmässigste Reihenfolge, in der man die verschiedenen Operationen ausführt, ist folgende: Man ermittle durch Elimination von u, v, w zunächst Gleichungen zur Bestimmung der Functionen ψ. Das geschieht auf folgende Weise: —

Aus (19) erhalten wir

$$
(20)\quad \begin{cases}
u_\nu = \dfrac{(a^{2\nu+3}-a'^{2\nu+3})M_{\nu+2}\dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx}+(a^2-a'^2)M_{-\nu+1}r^{2\nu+1}\dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx}+(a^{\nu+1}A_\nu-a'^{\nu+1}A'_\nu)r^\nu}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}} \\[2ex]
u_{-\nu-1} = \dfrac{-(aa')^{2\nu+1}(a^2-a'^2)M_{\nu+2}r^{-2\nu-1}\dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx}+(aa')^2(a^{2\nu-1}-a'^{2\nu-1})M_{-\nu+1}\dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx}+(aa')^{\nu+1}(a^\nu A'_\nu-a'^\nu A_\nu)r^{-\nu-1}}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}}
\end{cases}
$$

und symmetrische Gleichungen für v und w. Setzen wir der Kürze wegen

$$
(21)\quad \mathfrak{A}_\nu = \frac{a^{\nu+1}A_\nu-a'^{\nu+1}A'_\nu}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}},\quad \mathfrak{A}'_\nu = \frac{(aa')^{\nu+1}(a^\nu A'_\nu - a'^\nu A_\nu)}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}}
$$

und

$$
(22)\quad \mathfrak{M}_{\nu+2} = \frac{a^{2\nu+3}-a'^{2\nu+3}}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}}M_{\nu+2},\quad \mathfrak{N}_{\nu+2} = \frac{(aa')^{2\nu+1}(a^2-a'^2)}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}}M_{\nu+2},
$$

so gehen die Formeln (20) über in

$$
(23)\quad \begin{cases}
u_\nu = \mathfrak{M}_{\nu+2}\dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx} - \mathfrak{N}_{-\nu+1}r^{2\nu+1}\dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx} + \mathfrak{A}_\nu r^\nu \\[2ex]
u_{-\nu-1} = -\mathfrak{N}_{\nu+2}r^{-2\nu-1}\dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx} + \mathfrak{M}_{-\nu+1}\dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx} + \mathfrak{A}'_\nu r^{-\nu-1} \\[2ex]
v_\nu = \text{u. s. w.},\quad v_{-\nu-1} = \text{u. s. w.},\quad w_\nu = \text{u. s. w.},\quad w_{-\nu-1} = \text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

Wenn wir die zur Elimination der Functionen u, v, w aus (23) und (13) erforderlichen Differentiationen und Summationen ausführen und die Eigenschaften der Functionen ψ benutzen, nach denen

$$\nabla^2\psi_{\nu+1}=0,\ \nabla^2\psi_{-\nu}=0,\ x\frac{d\psi_{\nu+1}}{dx}+y\frac{d\psi_{\nu+1}}{dy}+z\frac{d\psi_{\nu+1}}{dz}=(\nu+1)\psi_{\nu+1}$$

$$x\frac{d\psi_{-\nu}}{dx}+y\frac{d\psi_{-\nu}}{dy}+z\frac{d\psi_{-\nu}}{dz}=-\nu\psi_{-\nu}$$

ist, so erhalten wir

$$(24)\left\{\begin{array}{l}\psi_{\nu-1}=(2\nu+1)\nu\,\mathfrak{R}_{-\nu+1}\,r^{2\nu-1}\,\psi_{-\nu}+\frac{d(\mathfrak{A}_\nu r^\nu)}{dx}+\frac{d(\mathfrak{B}_\nu r^\nu)}{dy}+\frac{d(\mathfrak{C}_\nu r^\nu)}{dz}\\ \psi_{-\nu-2}=(2\nu+1)(\nu+1)\,\mathfrak{R}_{\nu+2}\,r^{-2\nu-3}\,\psi_{\nu+1}\\ \qquad+\frac{d(\mathfrak{A}'_\nu r^{-\nu-1})}{dx}+\frac{d(\mathfrak{B}'_\nu r^{-\nu-1})}{dy}+\frac{d(\mathfrak{C}'_\nu r^{-\nu-1})}{dz}.\end{array}\right.$$

Wird in der ersteren dieser Gleichungen ν in $\nu+1$, in der zweiten ν in $\nu-1$ verwandelt, so ergeben sich zwei Gleichungen für die beiden unbekannten Grössen ψ_ν, $\psi_{-\nu-1}$, aus denen

$$(25)\left\{\begin{array}{l}\psi_\nu=\frac{\Theta_\nu+(2\nu+3)(\nu+1)\,\mathfrak{R}_{-\nu}\,\Theta'_{-\nu-1}\,r^{2\nu+1}}{1-(2\nu+3)(2\nu-1)(\nu+1)\nu\,\mathfrak{R}_{-\nu}\,\mathfrak{R}_{\nu+1}}\\ \psi_{-\nu-1}=\frac{(2\nu-1)\nu\,\mathfrak{R}_{\nu+1}\,\Theta_\nu\,r^{-2\nu-1}+\Theta'_{-\nu-1}}{1-(2\nu+3)(2\nu-1)(\nu+1)\nu\,\mathfrak{R}_{-\nu}\,\mathfrak{R}_{\nu+1}}\end{array}\right.$$

folgt, wo der Kürze wegen

$$(26)\left\{\begin{array}{l}\Theta_\nu=\frac{d(\mathfrak{A}_{\nu+1}r^{\nu+1})}{dx}+\frac{d(\mathfrak{B}_{\nu+1}r^{\nu+1})}{dy}+\frac{d(\mathfrak{C}_{\nu+1}r^{\nu+1})}{dz}\\ \Theta'_{-\nu-1}=\frac{d(\mathfrak{A}'_{-\nu}r^{-\nu})}{dx}+\frac{d(\mathfrak{B}'_{-\nu}r^{-\nu})}{dy}+\frac{d(\mathfrak{C}'_{-\nu}r^{-\nu})}{dz}\end{array}\right.$$

gesetzt ist. Da jetzt die Functionen ψ_ν und $\psi_{-\nu-1}$ für jeden Werth von ν gegeben sind, so enthalten (14) und (23) die vollständige Lösung des Problems.

(g) Die Zusammensetzung dieser Lösung verdient eine sorgfältige Betrachtung. Scheidet man der Einfachheit wegen aus den Oberflächendaten den Theil aus, welcher aus den Gliedern A_ν, u. s. w., A'_ν, u. s. w. der Ordnung ν herrührt, so sieht man, dass, wenn keine solche Glieder von anderen Ordnungen vorhanden wären, alle Functionen ψ, ausser $\psi_{\nu-1}$, $\psi_{\nu+1}$, $\psi_{-\nu}$, $\psi_{-\nu-2}$ verschwinden würden. Diese würden $u_{\nu-2}$, u_ν, $u_{\nu+2}$, $u_{-\nu+1}$, $u_{-\nu-1}$, und $u_{-\nu-3}$ und symmetrische Ausdrücke für die Functionen v und w liefern; die Zusammensetzung derselben lässt sich am besten studiren, wenn man erst ihre expliciten Werthe in $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{C}_\nu$, $\mathfrak{A}'_\nu$, $\mathfrak{B}'_\nu$, $\mathfrak{C}'_\nu$ und den daraus abgeleiteten räumlichen harmonischen Kugelfunctionen $\Theta_{\nu-1}$ und $\Theta'_{-\nu-2}$ vollständig niederschreibt.

737. Die auf die Oberfläche vertheilten Zugkräfte sind gegeben. — Wenn statt der Oberflächenverschiebungen die auf die Oberfläche vertheilte Kraft gegeben ist, so ist das Problem sowohl für die Vollkugel, als für eine Kugelschale nicht so einfach, weil man vorher (*h*) die Componenten der auf eine mit der gegebenen Kugel oder Kugelschale concentrische Kugelfläche wirkenden Zugkraft in passenden harmonischen Formen auszudrücken hat; auch

ist die Lösung nicht mehr so einfach, weil wir in dieser vorbereitenden Operation ausser der oben angewandten Function $\psi_{\nu-1}$ eine neue räumliche harmonische Kugelfunction $\varphi_{\nu+1}$ [(32), unten] einführen müssen.

(h) Wenn wir mit F, G, H die Componenten der Zugkraft bezeichnen, welche auf eine Kugelfläche von einem beliebigen Radius r wirkt, die den Anfangspunkt der Coordinaten zum Mittelpunkt hat [oben in § 734 (3) verstanden wir darunter nur die Componenten der Zugkraft für die Umgrenzungsfläche des Körpers], so gelten noch dieselben Formeln wie in § 734; jetzt haben wir in denselben aber $f = \frac{x}{r}$, $g = \frac{y}{r}$, $h = \frac{z}{r}$ zu setzen. Wenn wir ihre Glieder passend gruppiren, so können wir sie, unter Anwendung der Bezeichnung (28), auf die folgenden abgekürzten Formen bringen: —

$$
(27)\quad \begin{cases} Fr = (m-n)\delta . x + n\left\{\left(r\frac{\partial}{dr} - 1\right)\alpha + \frac{d\zeta}{dx}\right\} \\ Gr = (m-n)\delta . y + n\left\{\left(r\frac{\partial}{dr} - 1\right)\beta + \frac{d\zeta}{dy}\right\} \\ Hr = (m-n)\delta . z + n\left\{\left(r\frac{\partial}{dr} - 1\right)\gamma + \frac{d\zeta}{dz}\right\}, \end{cases}
$$

wo

$$
(28)\quad \begin{cases} \zeta = \alpha x + \beta y + \gamma z \\ r\frac{\partial}{dr} = x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy} + z\frac{d}{dz} \end{cases}
$$

ist, so dass $\frac{\zeta}{r}$ die radiale Componente der Verschiebung in irgend einem Punkte ist, und die Vorsetzung von $\frac{\partial}{dr}$ vor eine Function von x, y, z die für die Längeneinheit in der radialen Richtung genommene Grösse der Variation dieser Function bezeichnet.

(k) Um diese Ausdrücke auf harmonische Flächenfunctionen zu reduciren, wollen wir die homogenen Glieder νten Grades der vollständigen Lösung (14) betrachten. Wir bezeichnen dieselben mit α_ν, β_ν, γ_ν *) und es seien $\delta_{\nu-1}$, $\zeta_{\nu+1}$ die entsprechenden Glieder der anderen Functionen. Dann haben wir

$$
(29)\quad \begin{cases} Fr = \Sigma\left\{(m-n)\delta_{\nu-1}\, x + n(\nu-1)\alpha_\nu + n\frac{d\zeta_{\nu+1}}{dx}\right\} \\ Gr = \Sigma\left\{(m-n)\delta_{\nu-1}\, y + n(\nu-1)\beta_\nu + n\frac{d\zeta_{\nu+1}}{dy}\right\} \\ Hr = \Sigma\left\{(m-n)\delta_{\nu-1}\, z + n(\nu-1)\gamma_\nu + n\frac{d\zeta_{\nu+1}}{dz}\right\}. \end{cases}
$$

*) Die hier eingeführten Indices beziehen sich nur auf den positiven oder negativen algebraischen Grad der Functionen, deren Symbolen sie angehängt sind, mögen diese Functionen harmonisch sein oder nicht.

(l) Wenn die allgemeine Lösung (14) benutzt wird, so wird in jeder dieser Gleichungen das zweite der drei Glieder νter Ordnung auf der Umgrenzung explicit die Summe zweier harmonischen Flächenfunctionen, die beziehungsweise von den Ordnungen ν und $\nu - 2$ sind. Um die übrigen Theile der Ausdrücke auf ähnliche Formen zu bringen, ist es zweckmässig, zunächst $\zeta_{\nu+1}$ durch die allgemeine Lösung (14) auszudrücken, indem man die Glieder vom algebraischen Grade ν auswählt. Wir erhalten auf diese Weise

$$\alpha_\nu = u_\nu - \frac{m r^2}{2[(2\nu-1)n + (\nu-1)m]} \frac{d\psi_{\nu-1}}{dx} \tag{30}$$

und symmetrische Ausdrücke für β_ν und γ_ν, aus denen

$$\alpha_\nu x + \beta_\nu y + \gamma_\nu z = \zeta_{\nu+1} = u_\nu x + v_\nu y + w_\nu z - \frac{(\nu-1) m r^2 \psi_{\nu-1}}{2[(2\nu-1)n + (\nu-1)m]}$$

folgt. Mithin ist nach den Formeln, welche zur Reduction auf harmonische Functionen geeignet sind [siehe unten (36)],

$$\zeta_{\nu+1} = -\frac{1}{2\nu+1}\left\{\frac{(2\nu-1)[(\nu-1)m - 2n]}{2[(2\nu-1)n + (\nu-1)m]} r^2 \psi_{\nu-1} + \varphi_{\nu+1}\right\}, \tag{31}$$

wo

$$\varphi_{\nu+1} = r^{2\nu+3}\left\{\frac{d(u_\nu r^{-2\nu-1})}{dx} + \frac{d(v_\nu r^{-2\nu-1})}{dy} + \frac{d(w_\nu r^{-2\nu-1})}{dz}\right\} \tag{32}$$

und [wie oben in (13) angenommen wurde]

$$\psi_{\nu-1} = \frac{du_\nu}{dx} + \frac{dv_\nu}{dy} + \frac{dw_\nu}{dz} \tag{33}$$

ist. Ferner ergibt sich aus § 736 (10) oder direct aus (30) durch Differentiation

$$\delta_{\nu-1} = \frac{n(2\nu-1)}{(2\nu-1)n + (\nu-1)m} \cdot \psi_{\nu-1}. \tag{34}$$

Werden diese Ausdrücke für $\delta_{\nu-1}$, α_ν und $\zeta_{\nu+1}$ in (29) substituirt, so folgt

$$\left\{\begin{aligned} Fr = \Sigma\Bigg\{ & n(\nu-1)u_\nu + \frac{n(2\nu-1)[(\nu+2)m - (2\nu-1)n]}{(2\nu+1)[(2\nu-1)n + (\nu-1)m]} x\psi_{\nu-1} \\ & - \frac{n[2\nu(\nu-1)m - (2\nu-1)n]}{(2\nu+1)[(2\nu-1)n + (\nu-1)m]} r^2 \frac{d\psi_{\nu-1}}{dx} - \frac{n}{2\nu+1}\frac{d\varphi_{\nu+1}}{dx}\Bigg\}. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Dieser Ausdruck wird auf die verlangte harmonische Form gebracht durch die offenbar richtige Formel

$$x\psi_{\nu-1} = \frac{1}{(2\nu-1)}\left\{r^2 \frac{d\psi_{\nu-1}}{dx} - r^{2\nu+1}\frac{d(\psi_{\nu-1} r^{-2\nu+1})}{dx}\right\}. \tag{36}$$

Auf diese Weise und durch ähnliche Behandlung der Ausdrücke für Gr und Hr erhalten wir schliesslich



$$(37)\begin{cases} Fr = n\Sigma\left\{(\nu-1)u_\nu - 2(\nu-2)M_\nu r^2 \frac{d\psi_{\nu-1}}{dx} - E_\nu r^{2\nu+1}\frac{d(\psi_{\nu-1}r^{-2\nu+1})}{dx} - \frac{1}{2\nu+1}\frac{d\varphi_{\nu+1}}{dx}\right\} \\ Gr = n\Sigma\left\{(\nu-1)v_\nu - 2(\nu-2)M_\nu r^2 \frac{d\psi_{\nu-1}}{dy} - E_\nu r^{2\nu+1}\frac{d(\psi_{\nu-1}r^{-2\nu+1})}{dy} - \frac{1}{2\nu+1}\frac{d\varphi_{\nu+1}}{dy}\right\} \\ Hr = n\Sigma\left\{(\nu-1)w_\nu - 2(\nu-2)M_\nu r^2 \frac{d\psi_{\nu-1}}{dz} - E_\nu r^{2\nu+1}\frac{d(\psi_{\nu-1}r^{-2\nu+1})}{dz} - \frac{1}{2\nu+1}\frac{d\varphi_{\nu+1}}{dz}\right\}, \end{cases}$$

wo

$$(38)\begin{cases} M_\nu = \frac{1}{2}\frac{m}{(2\nu-1)n+(\nu-1)m} \text{ [wie oben (12)]} \\ \text{und weiter} \\ E_\nu = \frac{(\nu+2)m-(2\nu-1)n}{(2\nu+1)[(2\nu-1)n+(\nu-1)m]} \end{cases}$$

ist.

(m) Um die Oberflächenbedingungen für die Schale, welche durch die beiden concentrischen Kugelflächen $r = a$, $r = a'$ begrenzt wird, in harmonischen Gleichungen auszudrücken, nehmen wir an, die Werthe von F, G, H auf diesen Oberflächen seien folgendermaassen gegeben: —

$$(39)\begin{cases} \left.\begin{aligned} F &= \Sigma A_\nu \\ G &= \Sigma B_\nu \\ H &= \Sigma C_\nu \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } r = a \text{ ist} \\ \text{und} \\ \left.\begin{aligned} F &= \Sigma A'_\nu \\ G &= \Sigma B'_\nu \\ H &= \Sigma C'_\nu \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } r = a' \text{ ist,} \end{cases}$$

wo A_ν, B_ν, C_ν, A'_ν, B'_ν, C'_ν harmonische Flächenfunctionen ν ter Ordnung bezeichnen.

Um auf diese Entwicklung nach harmonischen Functionen die Bedingungen § 734 (2), denen die auf die Oberflächen wirkenden Zugkräfte unterworfen sind, anzuwenden, nehmen wir an, $a^2 d\varpi$ und $a'^2 d\varpi$ seien Elemente der äusseren und der inneren Kugelfläche, über denen im Centrum (§ 468) ein gemeinschaftlicher unendlich kleiner körperlicher Winkel $d\varpi$ steht, und $\iint d\varpi$ bezeichne eine sich über die ganze Kugelfläche vom Radius Eins erstreckende Integration. Die Gleichungen (2) gehen dann über in

$$(40)\begin{cases} \iint d\varpi\, \Sigma(a^2 A_\nu - a'^2 A'_\nu) = 0, \text{ u. s. w.} \\ \iint d\varpi\, [y\,\Sigma(a^2 C_\nu - a'^2 C'_\nu) - z\,\Sigma(a^2 B_\nu - a'^2 B'_\nu)] = 0, \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Nun zeigt Zusatz B (16), dass von den ersten drei dieser Gleichungen alle Glieder mit Ausnahme der ersten (die, in welchen $\nu = 0$ ist), und von den zweiten drei Gleichungen alle Glieder mit Ausnahme der zweiten (diejenigen, für welche $\nu = 1$ ist) verschwinden, da x, y, z harmonische Functionen erster Ordnung sind. Die ersten drei Gleichungen (40) verwandeln sich danach in

$$\iint d\varpi\,(a^2 A_0 - a'^2 A_0') = 0, \text{ u. s. w.},$$

und dies erfordert einfach, da A_0, A'_0, u. s. w. Constanten sind, dass

(41) $$a^2 A_0 = a'^2 A'_0,\ a^2 B_0 = a'^2 B'_0,\ a^2 C_0 = a'^2 C'_0 \text{ sei.}$$

Die drei zweiten Gleichungen (40) sind äquivalent den Gleichungen

(42) $$\begin{cases} r\,(a^2 A_1 - a'^2 A'_1) = \dfrac{d H_2}{dx} \\ r\,(a^2 B_1 - a'^2 B'_1) = \dfrac{d H_2}{dy} \\ r\,(a^2 C_1 - a'^2 C'_1) = \dfrac{d H_2}{dz}, \end{cases}$$

wo H_2 eine homogene Function zweiten Grades von x, y, z ist. Denn [Zusatz B (a)] $r A_1$, $r A'_1$, u. s. w. sind lineare Functionen von x, y, z. Wenn daher (A, x), $(A, y) \ldots (B, x) \ldots$ neun Constanten bezeichnen, so ist

$$r\,(a^2 A_1 - a'^2 A'_1) = (A, x)\,x + (A, y)\,y + (A, z)\,z$$
$$r\,(a^2 B_1 - a'^2 B'_1) = (B, x)\,x + (B, y)\,y + (B, z)\,z$$
$$r\,(a^2 C_1 - a'^2 C'_1) = (C, x)\,x + (C, y)\,y + (C, z)\,z.$$

Werden diese Ausdrücke in die drei zweiten Gleichungen (40) eingesetzt, deren sämmtliche Glieder, wie oben bemerkt wurde, mit Ausnahme derer, für welche $\nu = 1$ ist, verschwinden, so erhält man, wenn man beachtet, dass yz, zx, xy harmonische Functionen sind, dass folglich [Zusatz B (16)]

$$\iint y\,z\,d\varpi = 0,\ \iint z\,x\,d\varpi = 0,\ \iint x\,y\,d\varpi = 0 \text{ ist},$$
$$(C, y)\iint y^2\,d\varpi - (B, z)\iint z^2\,d\varpi = 0, \text{ u. s. w.}$$

Da ferner $$\iint x^2\,d\varpi = \iint y^2\,d\varpi = \iint z^2\,d\varpi$$

ist, so folgt hieraus

$$(C, y) = (B, z),\ (A, z) = (C, x),\ (B, x) = (A, y),$$

und damit ist (42) bewiesen.

(n) Die Glieder vom algebraischen Grade ν in den vorhergehenden Ausdrücken (37) für Fr, Gr, Hr werden auf jeder der beiden concentrischen Kugelflächen die Summen von harmonischen Flächenfunctionen der Ordnungen ν und $\nu - 2$, wenn ν positiv ist, und der Ordnungen $-\nu - 1$ und $-\nu - 3$, wenn ν negativ ist. Wenn wir daher alle Glieder, welche zu harmonischen Flächenfunctionen νter Ordnung führen, auswählen und den entsprechenden Gliedern von (39) gleich setzen, so erhalten wir

(43) $$\begin{cases} \dfrac{n}{r}\Big\{(\nu-1)u_\nu - (\nu+2)u_{-\nu-1} - 2\,\nu M_{\nu+2} r^2 \dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx} + 2(\nu+1) M_{-\nu+1} r^2 \dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx} \\ -E_\nu r^{2\nu+1} \dfrac{d(\psi_{\nu-1} r^{-2\nu+1})}{dx} - E_{-\nu-1} r^{-2\nu-1} \dfrac{d(\psi_{-\nu-2} r^{2\nu+3})}{dx} - \dfrac{1}{2\nu+1}\left(\dfrac{d\varphi_{\nu+1}}{dx} - \dfrac{d\varphi_{-\nu}}{dx}\right)\Big\} \\ = \begin{cases} A_\nu, \text{ wenn } r = a \text{ ist} \\ A'_\nu, \text{ wenn } r = a' \text{ ist}, \end{cases} \end{cases}$$

und symmetrische Gleichungen in Beziehung auf y und z.

(o) Mit diesen Gleichungen hat man genau ebenso zu verfahren, wie wir oben mit (18) verfuhren. Nachdem u_ν und $u_{-\nu-1}$ bestimmt sind, führe man an u_ν, v_ν, w_ν die Operationen von (33) und an $u_{-\nu-1}, v_{-\nu-1}, w_{-\nu-1}$ diejenigen von (32) aus; dadurch gelangt man zu zwei Gleichungen, welche von den unbekannten Grössen nur $\psi_{\nu-1}$, $\psi_{-\nu}$ und $\varphi_{-\nu}$ enthalten. Nimmt man weiter die entsprechenden Ausdrücke für $u_{\nu-2}$, $u_{-\nu+1}$ und wendet (32) auf $u_{\nu-2}, v_{\nu-2}, w_{\nu-2}$ und (33) auf $u_{-\nu+1}, v_{-\nu+1}, w_{-\nu+1}$ an, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen $\varphi_{\nu-1}$, $\psi_{\nu-1}$ und $\psi_{-\nu}$. Wir haben dann im Ganzen vier einfache algebraische Gleichungen zwischen $\psi_{\nu-1}, \psi_{-\nu}, \varphi_{\nu-1}, \varphi_{-\nu}$, welche diese vier unbekannten Functionen bestimmen, und da die Functionen u, v, w bereits explicit durch diese vier Grössen ausgedrückt sind, so ist jede in der Lösung (14) des Problems auftretende unbekannte Function durch die Daten desselben ausgedrückt.

(p) Zum Falle der Vollkugel gelangt man natürlich von dem allgemeineren Problem einer Kugelschale, wenn man $a' = 0$ setzt. Wenn wir aber diesen besonderen Fall direct behandeln, so brauchen wir keine räumlichen harmonischen Functionen negativen Grades einzuführen (jede harmonische Function negativen Grades wird im Centrum unendlich gross und ist daher unzulässig in dem Ausdruck der Wirkungen, welche die auf die Oberfläche einer Vollkugel vertheilten Kräfte im Innern derselben ausüben), und (43), sowie alle Formeln, die sich daraus, wie wir gesehen haben, herleiten lassen, werden bedeutend abgekürzt, wenn wir uns auf diesen Fall beschränken. So erhalten wir statt (43) jetzt einfach

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{n}{r}\Big\{(\nu-1)\,u_\nu - 2\nu\, M_{\nu+2}\, r^2\, \dfrac{d\,\psi_{\nu+1}}{dx} \\ -E_\nu\, r^{2\nu+1}\, \dfrac{d\,(\psi_{\nu-1} r^{-2\nu+1})}{dx} - \dfrac{1}{2\nu+1}\dfrac{d\,\varphi_{\nu+1}}{dx}\Big\} \\ = A_\nu, \text{ wenn } r = a \text{ ist.} \end{cases}$$

Wenn wir also [wie früher in (f)] die Eigenschaft einer homogenen Function H_j von beliebiger Ordnung j berücksichtigen, dass $r^{-j} H_j$ von r unabhängig ist und nur von den Verhältnissen $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ abhängt, so erhalten wir für alle Werthe von x, y, z

$$(45)\quad \begin{cases} (\nu-1)\,u_\nu - 2\,\nu\, M_{\nu+2}\, a^2\, \dfrac{d\,\psi_{\nu+1}}{dx} - E_\nu\, r^{2\nu+1}\, \dfrac{d\,(\psi_{\nu-1}\, r^{-2\nu+1})}{dx} \\ \qquad - \dfrac{1}{2\nu+1}\dfrac{d\,\varphi_{\nu+1}}{dx} = \dfrac{A_\nu\, r^\nu}{n\, a^{\nu-1}}. \end{cases}$$

Hieraus und aus den symmetrischen Gleichungen für v und w ergibt sich nach (33)

$$(46)\quad [\nu-1+(2\nu+1)\,\nu E_\nu]\psi_{\nu-1} = \frac{1}{n\,a^{\nu-1}}\left\{\frac{d(A_\nu r^\nu)}{dx} + \frac{d(B_\nu r^\nu)}{dy} + \frac{d(C_\nu r^\nu)}{dz}\right\},$$

und nach (32)

$$(47)\quad \begin{cases} 2\nu\,\varphi_{\nu+1} + 2\nu\,(\nu+1)\,(2\nu+1)\,M_{\nu+2}\,a^2\,\psi_{\nu+1} \\ = \dfrac{r^{2\nu+3}}{n\,a^{\nu-1}}\left\{\dfrac{d\,(A_\nu\,r^{-\nu-1})}{dx} + \dfrac{d\,(B_\nu\,r^{-\nu-1})}{dy} + \dfrac{d\,(C_\nu\,r^{-\nu-1})}{dz}\right\}. \end{cases}$$

Wird vermittels dieser Formel $\varphi_{\nu+1}$ aus (45) eliminirt und der Kürze wegen das unten in (50) angegebene Symbol $\Phi_{\nu+1}$ benutzt, so folgt

$$(48)\quad \begin{cases} (\nu-1)\,u_\nu = (\nu-1)\,M_{\nu+2}\,a^2\,\dfrac{d\,\psi_{\nu+1}}{dx} \\ + E_\nu\,r^{2\nu+1}\,\dfrac{d\,(\psi_{\nu-1}\,r^{-2\nu+1})}{dx} + \dfrac{1}{n\,a^{\nu-1}}\left[A_\nu\,r^\nu + \dfrac{1}{2\nu\,(2\nu+1)}\,\dfrac{d\Phi_{\nu+1}}{dx}\right], \end{cases}$$

und (43) liefert

$$(49)\quad \begin{cases} \psi_{\nu-1} = \dfrac{\Psi_{\nu-1}}{[(\nu-1) + (2\nu+1)\,\nu\,E_\nu]\,n\,a^{\nu-1}} \\ \qquad = \dfrac{[(\nu-1)\,m + (2\nu-1)\,n]\,\Psi_{\nu-1}}{[(2\nu^2+1)\,m - (2\nu-1)\,n]\,n\,a^{\nu-1}}, \end{cases}$$

wo

$$(50)\quad \begin{cases} \Psi_{\nu-1} = \dfrac{d\,(A_\nu\,r^\nu)}{dx} + \dfrac{d\,(B_\nu\,r^\nu)}{dy} + \dfrac{d\,(C_\nu\,r^\nu)}{dz} \\ \Phi_{\nu+1} = r^{2\nu+3}\left\{\dfrac{d\,(A_\nu\,r^{-\nu-1})}{dx} + \dfrac{d\,(B_\nu\,r^{-\nu-1})}{dy} + \dfrac{d\,(C_\nu\,r^{-\nu-1})}{dz}\right. \end{cases}$$

ist. In Verbindung mit diesen Ausdrücken für ψ_ν und u_ν ist (14) die vollständige Lösung des Problems.

(q) Die Zusammensetzung und Natur dieser Lösung tritt deutlich zu Tage, wenn man diejenigen ihrer Glieder vollständig hinschreibt, welche nur von den unter den Oberflächendaten befindlichen harmonischen Functionen der Ordnung ν abhängen. Wenn die Componenten der auf die Oberfläche wirkenden Zugkräfte einfach A_ν, B_ν, C_ν sind, so verschwinden sämmtliche Functionen Ψ, mit Ausnahme von $\Psi_{\nu-1}$, und sämmtliche Functionen Φ, mit Ausnahme von $\Phi_{\nu+1}$. Folglich zeigt (48), dass alle Functionen u ausser $u_{\nu-2}$ und u_ν verschwinden, und für diese letzteren ergibt sich aus (48)

$$51\quad \begin{cases} u_{\nu-2} = M_\nu\,a^2\,\dfrac{d\,\psi_{\nu-1}}{dx} \\ u_\nu = \dfrac{1}{\nu-1}\left\{E_\nu\,r^{2\nu+1}\,\dfrac{d(\psi_{\nu-1}\,r^{-\nu+1})}{dx} + \dfrac{1}{n\,a^{\nu-1}}\left[A_\nu r^\nu + \dfrac{1}{2\nu\,(2\nu+1)}\,\dfrac{d\,\Phi_{\nu+1}}{dx}\right]\right\}. \end{cases}$$

Wenn wir diese Ausdrücke in (14) einsetzen und für E_ν und M_ν die in (38) angegebenen Werthe substituiren, so wird die Lösung des Problems explicit vermittels der Data und der räumlichen harmonischen Kugelfunctionen $\Psi_{\nu-1}$, $\Phi_{\nu+1}$ ausgedrückt, welche letzteren sich nach den Formeln (50) aus den Daten herleiten lassen. Die Lösung in ihrer schliesslichen Form ist

$$
52 \begin{cases} \alpha = \frac{1}{n a^{\nu-1}} \Big\{ 1/_2 \frac{m(a^2 - r^2)}{(2\nu^2+1)m - (2\nu-1)n} \frac{d \Psi'_{\nu-1}}{dx} \\ + \frac{1}{\nu-1} \Big[\frac{(\nu+2)m - (2\nu-1)n}{(2\nu^2+1)m - (2\nu-1)n} \frac{r^{2\nu+1} d(\Psi'_{\nu-1} r^{-2\nu+1})}{(2\nu+1)dx} + \frac{1}{2\nu(2\nu+1)} \frac{d\Phi_{\nu+1}}{dx} + A_\nu r^\nu \Big] \Big\}, \end{cases}
$$

und dazu kommen symmetrische Ausdrücke für β und γ.

(r) **Fall einer homogenen Deformation.** — Der Fall $\nu = 1$ ist insofern von Interesse, als für ihn auf den ersten Blick der zweite Theil des Ausdrucks (52) für α, des Divisors $\nu - 1$ wegen, unendlich gross zu werden scheint. Aber die innerhalb der Parenthese [ ] stehenden Glieder verschwinden für $\nu = 1$ gleichfalls, wegen der oben bewiesenen Relationen (42), die für eine Vollkugel in

$$
(53) \qquad r A_1 = \frac{dH_2}{dx},\ r B_1 = \frac{dH_2}{dy},\ r C_1 = \frac{dH_2}{dz}
$$

übergehen, wo H_2 eine beliebige homogene Function zweiten Grades von x, y, z bezeichnet. Die Bewahrheitung dieser Behauptung bietet keine Schwierigkeit dar; wir überlassen sie dem Leser als Uebungsaufgabe. Dass ein Theil jedes der Ausdrücke für α, β, γ die Form $0/_0$ hat, rührt offenbar daher, weil diese Grössen unbestimmt sind, und dass eine solche Unbestimmtheit stattfinden muss, erkennen wir, wenn wir beachten, dass eine von keiner Deformation begleitete unendlich kleine Rotation um einen beliebigen Durchmesser ohne Verletzung der Bedingungen des Problems jeder Lösung hinzugefügt werden kann. Mit anderen Worten (§§ 89, 95): Man kann den Ausdrücken für α, β, γ in jeder Lösung beziehungsweise die Grössen

$$
\omega_2 z - \omega_3 y,\quad \omega_3 x - \omega_1 z,\quad \omega_1 y - \omega_2 x
$$

hinzufügen, ohne dass das Resultat aufhört, eine Lösung zu sein.

Obwohl aber α, β, γ unbestimmt sind, so liefert (50) doch bestimmte Werthe für ψ_0 und φ_2. Es ist eine gute und einfache Uebung für den Leser, zu zeigen, dass die Bestimmung von ψ_0 und φ_2 den [in diesem Falle natürlich homogenen (§ 155)] Deformationszustand bestimmt, welchen die auf die Oberfläche vertheilten gegebenen Zugkräfte wirklich erzeugen.

738. Ebene Deformation. — Man sagt, ein fester Körper erleide eine ebene Deformation (§ 730) oder werde in zwei Dimensionen deformirt, wenn seine Deformation der Bedingung genügt, dass alle Verschiebungen längs einer Schaar paralleler Ebenen erfolgen und für alle Punkte jeder zu diesen Ebenen senkrechten Linie gleich und parallel sind. Eine beliebige dieser Ebenen wollen wir die Ebene der Deformation nennen. Danach bleiben bei einer ebenen Deformation alle zur Deformationsebene senkrechten Cylinderflächen cylindrisch und senkrecht zu derselben Ebene, und erleiden längs der erzeugenden Linien nirgends eine Ausdehnung.

Wenn wir XOY zur Deformationsebene nehmen, so ist der analytische Ausdruck der Bedingung der ebenen Deformation der, dass γ verschwindet, und dass α und β nur von x und y, (nicht auch von z) abhängig seien. Wir ersehen daraus Folgendes: —

In den analytischen Ausdruck der ebenen Deformation gehen nur zwei unabhängig Veränderliche ein, und daher bietet dieser Fall eine Classe von besonders einfachen Problemen dar. Wenn z. B. der „gegebene feste Körper“ des § 696 ein unendlich langer voller oder hohler Cylinder von kreisförmiger Basis ist und die im Innern desselben wirkende Kraft (wenn eine solche vorhanden ist), sowie die auf die Oberfläche ausgeübte Wirkung aus Kräften und Zugkräften bestehen, die überall zur Axe senkrecht und in allen Punkten jeder zur Axe parallelen Linie gleich und parallel sind, so haben wir, mag nun die Verschiebung oder die Zugkraft auf der Oberfläche gegeben sein, Probleme, welche denen der §§ 735, 736 ganz analog, aber viel einfacher als diese letzteren sind und für den Maschinenbau, sofern es sich um die Verwendung langer gerader Röhren handelt, die einer Deformation ausgesetzt sind, grosse Bedeutung haben.

739. Probleme für Cylinder, die einer ebenen Deformation unterworfen sind, gelöst in ebenen harmonischen Functionen. — Es ist interessant zu bemerken, dass wir in diesen Problemen über die Deformation von Cylindern statt der harmonischen Flächenfunctionen der Ordnungen 1, 2, 3, u. s. w., welche [Zusatz B (b)] Functionen von Kugelflächencoordinaten (wie z. B. der Breite und der Länge auf einem Globus) sind, einfache harmonische Functionen (§§ 54, 75) des Winkels zwischen zwei durch die Axe gehenden Ebenen und der successiven Vielfachen dieses Winkels haben; diese letzteren Functionen sind von denselben Graden, wie jene harmonischen Flächenfunctionen. Ferner haben wir statt der räumlichen harmonischen Functionen [Zusatz B (a) und (b)] Functionen, die wir ebene harmonische Functionen nennen können: Es sind dies die algebraischen Functionen der beiden Veränderlichen x, y, die man erhält, wenn man $\cos\nu\vartheta$ und $\sin\nu\vartheta$ nach Potenzen der Sinus und der Cosinus von ϑ entwickelt, darauf

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \text{ und } \sin\vartheta = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

annimmt und das Resultat mit $(x^2+y^2)^{\frac{\nu}{2}}$ multiplicirt.

Eine ebene harmonische Function ist natürlich der besondere Fall einer räumlichen harmonischen Function [Zusatz B (a) und (b)], in welcher z nicht erscheint, d. h. eine beliebige homogene Function V von x und y, welche der Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=0, \text{ oder, wie wir kurz schreiben können, } \nabla^2 V = 0$$

genügt. Da wir nun in § 707 (23) gesehen haben, dass der allgemeinste Ausdruck für eine ebene harmonische Function vom Grade ι (der positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sein kann)

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} A \{(x+y\sqrt{-1})^\iota + (x-y\sqrt{-1})^\iota\} \\ -\frac{1}{2} B\sqrt{-1}\{(x+y\sqrt{-1})^\iota - (x-y\sqrt{-1})^\iota\}, \\ \text{oder in Polarcoordinaten} \\ A\cos\iota\vartheta + B\sin\iota\vartheta \end{cases}$$

ist, so gehen die Gleichungen des innern Gleichgewichts [§ 698 (6)], falls keine inneren Kräfte wirken (d. h. $X=0$ und $Y=0$ ist), für den Fall der ebenen Deformation in

$$(2) \quad \begin{cases} n\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}\right)+m\frac{d}{dx}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)=0 \\ n\left(\frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}\right)+m\frac{d}{dy}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)=0 \end{cases}$$

über. Die Lösung dieser Gleichungen in ebenen harmonischen Functionen erhält man, wenn man das Verfahren des § 735 (a)...(e) auf nur zwei, statt drei Veränderliche anwendet. Es ergibt sich

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha = \Sigma\left\{u_\nu - \frac{m}{2(\nu-1)(2n+m)}r^2\frac{d\psi_{\nu-1}}{dx}\right\} \\ \beta = \Sigma\left\{v_\nu - \frac{m}{2(\nu-1)(2n+m)}r^2\frac{d\psi_{\nu-1}}{dy}\right\}. \\ \text{wo } \psi_{\nu-1}=\frac{du_\nu}{dx}+\frac{dv_\nu}{dy} \text{ ist,} \end{cases}$$

und u_ν, v_ν zwei beliebige ebene harmonische Functionen vom Grade ν bezeichnen, so dass $\psi_{\nu-1}$ eine ebene harmonische Function vom Grade $\nu-1$ ist. Natürlich kann ν positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sein.

Es ist für viele Anwendungen vortheilhaft, diese Lösung auf Polar-Coordinaten zu reduciren. Das geschieht, indem man

$$(4) \quad \begin{cases} x = r\cos\vartheta, \quad y = r.\sin\vartheta \\ \text{setzt und} \\ u_\nu = r^\nu(A_\nu\cos\nu\vartheta + A'_\nu\sin\nu\vartheta) \\ v_\nu = r^\nu(B_\nu\cos\nu\vartheta + B'_\nu\sin\nu\vartheta) \end{cases}$$

annimmt, was

$$(5) \quad \psi_{\nu-1} = \nu\, r^{\nu-1}\{(A_\nu+B'_\nu)\cos(\nu-1)\vartheta + (A'_\nu-B_\nu)\sin(\nu-1)\vartheta\}$$

und

$$
6\left\{\begin{array}{l}
\alpha=\Sigma r^{\nu}\left\{A_{\nu}\cos\nu\vartheta+A'_{\nu}\sin\nu\vartheta-\frac{\nu m}{2(2n+m)}[(A_{\nu}+B'_{\nu})\cos(\nu-2)\vartheta-(A'_{\nu}-B_{\nu})\sin(\nu-2)\vartheta]\right\}\\
\beta=\Sigma r^{\nu}\left\{B_{\nu}\cos\nu\vartheta+B'_{\nu}\sin\nu\vartheta-\frac{\nu m}{2(2n+m)}[-(A_{\nu}+B'_{\nu})\sin(\nu-2)\vartheta+(A'_{\nu}-B_{\nu})\cos(\nu-2)\vartheta]\right\}
\end{array}\right.
$$

liefert.

Es wird eine gute Uebung für den Leser sein, in den einen Cylinder betreffenden Problemen, welche den auf die Kugel bezüglichen Problemen des § 735 (f) und des § 737 (h)... (r) analog sind, die expliciten Ausdrücke für die Verschiebung eines beliebigen Punktes des Körpers vollständig herzuleiten. Das Verfahren des § 737 (l) kann in der symmetrischen algebraischen Form durchgeführt werden, als eine Erläuterung der von uns bei der Behandlung der harmonischen Kugelfunctionen befolgten Methode. Dagegen wird das dem § 737 (37) entsprechende Resultat leichter und in einer einfacheren Form erhalten, wenn man § 737 (29) unmittelbar in Polarcoordinaten umsetzt, wie es in § 739 (4), (5), (6) geschehen ist. Wir beabsichtigen, diese Lösungen in dem Capitel über „die Eigenschaften der Materie" anzuwenden und zu erläutern.

740. Kleine Körper sind im Verhältniss zu ihrem Gewicht stärker als grosse. — Beispiele. — In den Abschnitten unseres Werks, welche der Hydrostatik gewidmet sind, wird die Aufgabe gelöst werden, die Deformation zu bestimmen, welche eine gegebene störende Kraft in einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit von sphäroidischer Gestalt erzeugt; dann werden wir auch sehen, wie das im Vorhergehenden [§ 736 (51)] für eine elastische Vollkugel gewonnene Resultat auf die Theorie der Ebbe und Fluth, sowie auf die Starrheit der Erde angewendet werden kann. Diese Anwendung erinnert uns aber an eine allgemeine Bemerkung von grosser praktischer Wichtigkeit, mit der wir für jetzt die elastischen festen Körper verlassen werden. Betrachten wir nämlich verschiedene elastische feste Körper von ähnlicher Substanz und ähnlichen Formen, auf die in irgend einer Weise Kräfte von aussen einwirken, so sehen wir, dass, wenn diese Kräfte in den Körpern ähnliche Deformationen erzeugen, die wie gewöhnlich für die Flächeneinheit gerechneten Zugkräfte in, oder senkrecht zu ähnlich gelegenen Flächenelementen gleich sein müssen, mögen diese letzteren den Umgrenzungsflächen der Körper oder beliebigen anderen Flächen angehören, die man sich durch die Substanz der Körper gelegt denkt. Wenn man daher die Kraft, welche senkrecht zu oder in einer beliebigen solchen Fläche wirkt, in Componenten zerlegt, die beliebigen Richtungen parallel sind, so verhalten sich die Gesammtbeträge jeder solchen Componente für ähnliche Flächen der

verschiedenen Körper wie die Quadrate der linearen Dimensionen derselben. Wenn also diese Kräfte unter geometrisch ähnlichen Verhältnissen der Schwere oder der kinetischen Reaction (§ 264) gegen gleiche Beschleunigung (§ 28) das Gleichgewicht halten müssen, so erleidet der grössere Körper eine grössere Deformation als der kleinere, da die Beträge der Schwere oder der kinetischen Reaction ähnlicher Theile der Körper sich wie die Cuben der linearen Dimensionen derselben verhalten. Schliesslich werden sich die Deformationen in ähnlich gelegenen Punkten der Körper einfach wie die linearen Dimensionen und die Verschiebungen wie die Quadrate dieser Dimensionen verhalten, wenn nur die Deformation in keinem Theil eines der Körper so gross ist, dass das Princip der Superposition nicht mehr mit hinlänglicher Genauigkeit seine Geltung behält, und wenn kein Theil in Beziehung auf einen anderen Theil durch mehr als einen sehr kleinen Winkel gedreht wird. Dies durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir einen gleichmässigen dünnen runden Stab betrachten, der in seiner Mitte horizontal gehalten wird. Seine Substanz sei homogen und von der Dichtigkeit ϱ; seine Länge l sei p mal so gross als sein Querdurchmesser. Wenn der Young'sche Modulus mit M bezeichnet wird, so ist (da das Trägheitsmoment einer Kreisfläche vom Radius r in Beziehung auf einen Durchmesser $\frac{1}{4}\pi r^4$ ist) der Widerstand des Stabes gegen eine Biegung (§ 715) gleich $\frac{M}{4}\pi\left(\frac{l}{2p}\right)^4$. In der Bezeichnung des § 610 ist dies gleich $\frac{B}{g}$, da dort B in kinetischem oder absolutem Maass (§ 223) gemessen wird, während wir hier M nach dem Gebrauch der Ingenieure im Gravitationsmaass (§ 220) rechnen. Ferner ist

$$w = \varrho\pi\left(\frac{l}{2p}\right)^2, \text{ folglich [nach § 617]}$$

$$\frac{gw}{B} = \frac{16p^2\varrho}{Ml^2}.$$

Wird dies in § 617 (10) eingesetzt, so erhalten wir für die Krümmung in der Mitte des Stabes; für die Elongation und Contraction in den Punkten, wo dieselben am grössten sind, d. h. in den höchsten und den niedrigsten Punkten des durch den Mittelpunkt gehenden Normalschnitts; endlich für die Senkung der Enden beziehungsweise die folgenden Ausdrücke: —

$$\frac{2p^2\varrho}{M};\quad \frac{pl\varrho}{M};\ \text{und}\ \frac{p^2l^2\varrho}{8M}.$$

So sind für einen Stab, dessen Länge das 200fache seines Querdurchmessers beträgt, wenn derselbe von Eisen oder Stahl ist, für welche Substanzen man $\rho = 7 \cdot 75$ und $M = 194 \times 10^7$ Gramm per Quadratcentimeter hat, die grösste Dehnung und Contraction (die am obersten und untersten Theil des durch den Unterstützungspunkt gehenden Schnittes eintreten) jede gleich $0 \cdot 8 \times 10^{-6} \times l$, und die Senkung der Enden $2 \times 10^{-5} \times l^2$. Danach würde für einen in seiner Mitte horizontal gehaltenen 10 cm langen Stahl- oder Eisendraht, dessen Querdurchmesser $^1/_2$ mm ist, das Maximum der Elongation und der Contraction nur 0·000008, die Senkung der Enden nur 0·002 cm betragen. Ein runder Stahlstab von $^1/_2$ cm Durchmesser und 1 m Länge würde das Maximum der Elongation und der Contraction 0·00008 und die Senkung der Enden 0·2 cm erfahren. Folglich muss ein runder Stahlstab von 10 cm Durchmesser und 20 m Länge von bemerkenswerther Beschaffenheit (siehe Bd. II, Eigenschaften der Materie) sein, wenn er in der Mitte soll gehalten werden können, ohne eine recht merkliche bleibende Senkung zu erleiden, und wahrscheinlich giebt es keinen Stahl von der Beschaffenheit, dass ein 40 m langer Schaft desselben von nur 2 dm Durchmesser in der Mitte gehalten werden kann, ohne eine starke Biegung über die Grenzen der Elasticität hinaus zu erleiden oder zu zerbrechen.

741. Uebergang zur Hydrodynamik. — Beim Uebergang von der Dynamik der vollkommen elastischen festen Körper zur abstracten Hydrodynamik, oder zur Dynamik der vollkommenen Flüssigkeiten ist es zweckmässig und lehrreich, einige Ansichten in Betreff der in realen festen und flüssigen Körpern beobachteten Eigenschaften, welche nach dem für unser Werk aufgestellten (§ 449) allgemeinen Plane in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie eingehender geprüft werden sollen, kurz zu anticipiren.

Unvollkommene Elasticität fester Körper. — Eine Menge der verschiedensten Beobachtungen nöthigt uns, zu schliessen, dass keine Volumen- oder Formänderung ohne einen (wenigstens scheinbaren) Verlust an Energie (§ 275) in irgend welchem Stoffe vor sich gehen kann, so dass jedes Mal, wo eine Rückkehr zur anfänglichen Configuration stattfindet, immer eine gewisse (wenn auch kleine) Arbeit erfordert wird, um die verlorene Energie zu ersetzen und den Körper in den gleichen physischen und für die Wahrnehmung gleichen kineti-

schen Zustand zurückzubringen, in welchem er vorher gegeben war. In § 672, wo wir einige thermodynamische Principien anticipirten, haben wir gesehen, wie ein solcher Verlust unvermeidlich ist, sogar wenn man es mit der absolut vollkommenen Volumenelasticität zu thun hat, welche jede Flüssigkeit und möglicher Weise auch einige feste Körper, wie z. B. homogene Krystalle, zeigen. Aber in Körpern wie Metalle, Glas, Porzellan, natürliche Steine, Holz, Kautschuk, homogene Gallerte, Seidenfäden, Elfenbein, u. s. w. lässt sich, wie wir im zweiten Bande in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie sehen werden, ein bestimmter Reibungswiderstand*) gegen jede Formänderung durch viele Experimente nachweisen, der, wie sich herausstellt, von der Geschwindigkeit abhängt, mit welcher die Formänderung erfolgt. Einen sehr bemerkenswerthen und einleuchtenden Beweis für das Vorhandensein eines Frictionswiderstandes gegen Formänderungen in den gewöhnlichen festen Körpern liefert die allmälige, mehr oder weniger schnelle Abnahme der Vibrationen der elastischen festen Körper, die in Kautschuk und sogar in homogenen Gallerten mit erstaunlicher Schnelligkeit erfolgt, während sie in Glas und Metallfedern langsamer, aber nachweislich immer noch viel zu schnell ist, als dass man sie auf Rechnung des Widerstandes der Luft setzen könnte. Diese in elastischen festen Körpern auftretende molekulare Friction wird passend die Zähigkeit der festen Körper genannt; denn da sie ein innerer Widerstand gegen eine Formänderung ist, welcher von der Geschwindigkeit dieser Aenderung abhängt, so muss sie mit der molekularen Friction der Flüssigkeiten zusammengestellt werden, und diese letztere wird allgemein die Zähigkeit der Flüssigkeiten genannt. Wir müssen hier aber bemerken, dass das Wort Zähigkeit, wie es bisher gebraucht wurde, wenn es sich um feste oder um heterogene halbfest-halbflüssige Massen handelt, nicht entschieden auf die molekulare Friction sich bezog, namentlich nicht auf die molekulare Friction eines in hohem Grade elastischen festen Körpers innerhalb der Grenzen fast vollkommener Elasticität; dasselbe wurde vielmehr angewandt, um die Eigenschaft eines Körpers zu bezeichnen, unter der Einwirkung eines fortgesetzten Zwanges langsam, aber ununterbrochen eine sehr grosse, oder gar unbegrenzte Formänderung erleiden zu können. In diesem Sinne hat z. B. Forbes das Wort gebraucht, als er jene

*) Siehe Proceedings of the Royal Society, Mai 1865, „On the Viscosity and Elasticity of Metals" (W. Thomson).

„Zähigkeitstheorie der Gletscherbewegung“ aufstellte, die er durch seine grossartigen Beobachtungen über Gletscher bewies. Da aber er und viele Schriftsteller nach ihm die Ausdrücke Plasticität und plastisch gebraucht haben, sowohl in Beziehung auf homogene feste Körper (wie Wachs, Pech, obgleich diese auch brüchig sind; weiche Metalle, u. s. w.), als auch in Beziehung auf heterogene halbfest-halbflüssige Massen (wie Schlamm, feuchte Erde, Mörtel, Gletschereis, u. s. w.), um die allen diesen Körpern gemeinschaftliche Eigenschaft*) zu bezeichnen, unter einem fortgesetzten Zwange entweder eine unaufhörliche und unbegrenzte Formänderung zu erleiden, oder aber eine solche, die zwar allmälig sehr gross wird, aber bei unendlich wachsender Zeit mit abnehmender Geschwindigkeit sich einer endlichen Grenze nähert; und da der Gebrauch des Ausdrucks Plasticität ebenso wenig wie der des Wortes Zähigkeit eine physikalische Theorie oder Erklärung jener Eigenschaft involvirt, so ist das Wort Zähigkeit ohne Nachtheil in der oben gegebenen Definition zulässig.

742. **Die ideale vollkommene Flüssigkeit der abstracten Hydrodynamik besitzt eine vollkommene unbegrenzte, durch keine innere Friction gestörte Plasticität.** — Eine vollkommene Flüssigkeit oder (wie wir sie kurz nennen werden) eine Flüssigkeit ist, wie ein starrer, oder ein glatter Körper, ein unrealisirbarer Begriff. Wir definiren sie als einen Körper, welcher nicht im Stande ist, einer Formänderung zu widerstehen, welcher daher unfähig ist, eine schiebende oder tangentiale Reaction (§ 669) auszuüben. Folglich ist ihr Druck auf jede Oberfläche, mag dieselbe nun einem festen Körper oder einem angrenzenden Flüssigkeitstheil angehören, in jedem Punkte senkrecht zu der Oberfläche. Im Zustande des Gleichgewichts genügen alle gewöhnlichen flüssigen und gasförmigen Körper dieser Definition. Es ist jedoch eine Art Frictionswiderstand von endlicher Grösse vorhanden, welcher sich einer Formänderung mit einer Kraft von endlicher Grösse widersetzt, und daher übt eine Flüssigkeit, während sie ihre Form

*) Eine grosse Ideenverwirrung hätte seitens der Schriftsteller vermieden werden können, welche die Theorie von Forbes bekämpfen wollten, während sie thatsächlich (und, wie wir glauben, ohne Grund) nur seinen Gebrauch des Wortes Zähigkeit angriffen, wenn sie bedacht hätten, dass für jene verschiedenen Fälle eine einzige physikalische Erklärung nicht ausreicht, und dass die Theorie von Forbes bloss der durch Beobachtung gewonnene Beweis der Thatsache ist, dass die Gletscher dieselbe Eigenschaft wie Schlamm (heterogen), Mörtel (heterogen), Pech (homogen) und Wasser (homogen) haben, nämlich unter der Einwirkung eines fortgesetzten Zwanges ihre Form unbegrenzt und ununterbrochen zu ändern.

ändert, auf jede Oberfläche eine tangentiale Kraft aus, nur nicht auf die Normalebenen des Zwanges (§ 664), welcher erforderlich ist, damit diese Formänderung ihren Fortgang nehme. Folglich lassen sich zwar die hydrostatischen Resultate, zu denen wir alsbald gelangen werden, in der Praxis bewahrheiten; wenn wir aber in einem späteren Capitel die Hydrokinetik behandeln, so werden wir die Betrachtung der Reibung im Innern der Flüssigkeiten einführen müssen, ausser in Fällen, wo die Umstände so beschaffen sind, dass die Wirkungen dieser Reibung unmerklich werden.

743. **Druck in einer Flüssigkeit.** — Mit dem Ausdruck: Der Druck an irgend einem Punkte in irgend einer Richtung bezeichnen wir, wenn es sich um Flüssigkeiten handelt, den für die Flächeneinheit genommenen mittleren Druck auf eine diesen Punkt enthaltende und zu der in Rede stehenden Richtung senkrechte Ebene, wenn deren Grösse als unbegrenzt abnehmend angesehen wird.

744. **Der Druck in einer Flüssigkeit ist in allen Punkten und in allen Richtungen derselbe.** — An jedem Punkte einer in Ruhe befindlichen Flüssigkeit ist der Druck in allen Richtungen derselbe, und wenn keine Kräfte von aussen einwirken, so ist auch der Druck an allen Punkten derselbe. Zum Beweise dieser und der meisten folgenden Sätze denken wir uns nach § 564, ein bestimmter Theil der Flüssigkeit werde fest, ohne seine Masse, seine Form, oder seine Dimensionen zu ändern.

Nehmen wir an, die Flüssigkeit sei in einem geschlossenen Gefässe enthalten, und der Druck im Innern hänge nur von dem durch das Gefäss auf die Flüssigkeit ausgeübten Druck ab, nicht von einer äusseren Kraft, wie die Schwere.

745. Die Resultante der auf die Elemente eines beliebigen Theils einer Kugelfläche wirkenden Druckkräfte muss, wie jede ihrer Componenten, durch den Mittelpunkt der Kugel gehen. Wenn wir also voraussetzen (§ 564), ein Theil der Flüssigkeit, welcher die Form einer plan-convexen Linse hat, werde fest, so muss die Resultante des auf die ebene Fläche wirkenden Drucks durch das Centrum der Kugel und, da sie zur Ebene senkrecht ist, durch das Centrum der Kreisfläche gehen. Hieraus erhellt, dass der Druck in allen Punkten jeder Ebene in der Flüssigkeit derselbe ist. Folglich (§ 561) geht die Resultante der auf irgend eine ebene Fläche wirkenden Druckkräfte durch den Trägheitsmittelpunkt der Fläche.

Weiter denken wir uns, ein Theil der Flüssigkeit von der Form eines dreiseitigen Prisma, dessen Endflächen senkrecht zu

den Seitenflächen sind, werde fest. Die auf die Endflächen wirkenden resultirenden Druckkräfte wirken in der Linie, welche die Trägheitsmittelpunkte der Endflächen verbindet, und sind einander gleich (§ 551), da die Richtungen der auf die Seitenflächen wirkenden resultirenden Druckkräfte zu dieser Linie senkrecht sind. Folglich ist der Druck in allen parallelen Ebenen derselbe.

Die Trägheitsmittelpunkte der drei Seitenflächen und die in denselben angreifenden resultirenden Druckkräfte liegen aber in einem den Endflächen parallelen dreieckigen Schnitt. Die Druckkräfte wirken in den Mittelpunkten der Seiten dieses Dreiecks und senkrecht zu denselben, so dass ihre Richtungen einander in einem Punkte schneiden. Da sie nun einander das Gleichgewicht halten, so müssen sie (§ 557) beziehungsweise den Seiten des Dreiecks, d. h. den Breiten, oder auch den Grössen der Seitenflächen des Prisma proportional sein. Danach sind die auf die Seitenflächen wirkenden resultirenden Druckkräfte den Grössen dieser Flächen proportional, und folglich ist der Druck in zwei beliebigen einander schneidenden Ebenen gleich gross.

Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so sehen wir, dass der Druck in einer Flüssigkeit in allen Punkten und in allen Richtungen derselbe ist.

746. Anwendung auf die Statik der festen Körper. — Eine unmittelbare Anwendung dieses Resultats liefert uns einen einfachen, aber indirecten Beweis des zweiten Theorems des § 557. Wir haben nämlich nur vorauszusetzen, das Polyeder sei ein fest gewordener Theil einer Flüssigkeitsmasse, die sich unter der Einwirkung blosser Druckkräfte im Gleichgewicht befindet. Die Resultante der auf jede Seitenfläche wirkenden Druckkräfte wird dann der Grösse dieser Fläche proportional sein und nach § 561 im Trägheitsmittelpunkt derselben, welcher in diesem Falle der Mittelpunkt des Drucks ist, angreifen.

747. Anwendung des Princips der Energie. — Einen anderen Beweis für die Gleichheit des Drucks im Innern einer Flüssigkeit, auf welche ausser dem Druck der Gefässwände keine Kraft von aussen einwirkt, liefert leicht das aus der Theorie der Energie hergeleitete Criterium für die Natur des Gleichgewichts, § 292. Um die Betrachtung zu vereinfachen, wollen wir die Flüssigkeit als unzusammendrückbar ansehen. Wir nehmen an, in die Seitenflächen des geschlossenen Gefässes, welches die Flüssigkeit

enthält, seien eine Anzahl Cylinder eingefügt, und jeder derselben sei mit einem passenden Kolben versehen. Ist dann A die Grundfläche eines dieser Kolben, p der mittlere Druck, der auf ihn ausgeübt wird, und x der Weg, den er in seinem Cylinder nach innen oder nach aussen zu zurücklegt, so sagt das Energiecriterium, dass, wenn man die Gesammtwirkung ins Auge fasst, keine Arbeit geleistet werden soll, d. h. dass

$$A_1 p_1 x_1 + A_2 p_2 x_2 + \ldots = \Sigma (A p x) = 0$$

ist, indem die nach aussen zu gedrückten Kolben ebenso viel Arbeit verbrauchen, als von den einwärts gedrückten geleistet wird. Da ferner die Flüssigkeit unzusammendrückbar ist, so muss sie durch Zurückschiebung einiger der Kolben ebenso viel Raum gewonnen haben, als ihr durch das Eindringen der übrigen genommen wurde. Dies liefert

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots = \Sigma (A x) = 0.$$

Die letztere Gleichung ist die einzige Bedingung, welcher die Grössen x_1, x_2, u. s. w. in der ersten Gleichung unterworfen sind; die erste Gleichung kann daher nur bestehen, wenn

$$p_1 = p_2 = p_3 = \text{u. s. w.},$$

d. h. wenn der auf jedem Kolben lastende Druck derselbe ist. Auf dieser Eigenschaft beruht die Wirkung der Brahmah'schen Presse.

Wenn die Flüssigkeit zusammendrückbar ist und durch den mittleren Druck p vom Volumen V auf $V - \delta V$ gebracht wird, so ist die Grösse der verbrauchten Arbeit $p \delta V$.

Wenn wir in diesem Falle annehmen, der Druck sei überall derselbe, so erhalten wir ein Resultat, welches mit dem Energiecriterium nicht in Widerspruch steht.

Die auf die Flüssigkeit ausgeübte Arbeit ist nämlich $\Sigma (A p x)$ oder, in Folge dieser Annahme, $p \Sigma (A x)$.

Dies ist aber gleich $\qquad p \delta V$,

denn es ist offenbar $\qquad \Sigma (A x) = \delta V$.

748. **Der Flüssigkeitsdruck in seiner Abhängigkeit von äusseren Kräften.** — Wenn von einer äusseren Masse her auf die Substanz der Flüssigkeit Kräfte, wie die Schwere einwirken, die entweder der Dichtigkeit, welche die Flüssigkeit selbst in ihren verschiedenen Theilen hat, oder der Dichtigkeit der Elektricität oder des Magnetismus oder einer beliebigen anderen denkbaren accidentellen Eigenschaft derselben proportional sind, so wird

der Druck zwar in jedem Punkte noch in allen Richtungen derselbe sein, aber von Punkt zu Punkt continuirlich variiren. Denn der vorhergehende Beweis (§ 745) lässt sich auch auf diese Fälle anwenden, wenn man einfach die Dimensionen des Prisma klein genug annimmt, da die Druckkräfte den Quadraten und die von aussen einwirkenden Kräfte (wie die Schwere) den Cuben der linearen Dimensionen desselben proportional sind.

749. Die Oberflächen gleichen Drucks sind senkrecht zu den Kraftlinien. — Wenn auf die ganze Flüssigkeit Kräfte einwirken, so müssen die Flächen gleichen Drucks, falls solche vorhanden sind, in jedem Punkte zur Richtung der resultirenden Kraft senkrecht sein. Denn jeder prismatische Flüssigkeitstheil, der so gelegen ist, dass seine Endflächen einen gleichen Druck erleiden, kann (§ 551) von den äusseren Kräften keine Einwirkung in der Richtung seiner Länge erfahren; wenn daher das Prisma so klein ist, dass sich in ihm von Punkt zu Punkt die Richtung der Resultante der von aussen einwirkenden Kräfte nicht merklich ändert, so muss diese Richtung zur Länge des Prisma senkrecht sein. Hieraus folgt, dass, welches auch der physische Ursprung und das Gesetz des auf die Flüssigkeit einwirkenden Kraftsystems sei, und ganz abgesehen davon, ob dies System conservativ sei oder nicht, die Flüssigkeit sich nicht im Gleichgewicht befinden kann, wofern nicht die Kraftlinien die geometrische Eigenschaft besitzen, zu einer Schaar von Flächen rechtwinklig zu sein.

750. Im Falle eines conservativen Kraftsystems sind die Oberflächen gleichen Drucks auch Flächen gleicher Dichtigkeit und gleichen Potentials. — Weiter wollen wir zwei einander unendlich nahe liegende Flächen gleichen Drucks betrachten. Die zwischen beiden enthaltene Flüssigkeit werde in Säulen von gleichem Querschnitt getheilt, deren Längen zu den Flächen senkrecht sind. Da die Differenz der auf die beiden Endflächen wirkenden Druckkräfte für jede Säule dieselbe ist, so müssen die Resultanten der von aussen auf die sie bildenden Flüssigkeitstheile einwirkenden Kräfte gleich sein. Vergleichen wir dies Resultat mit § 488, so erkennen wir, dass, wenn die von aussen einwirkenden Kräfte ein conservatives System bilden, die Dichtigkeit der schweren Masse, oder der Elektricität oder der Eigenschaft der Substanz, von der sie sonst abhängen, in der betrachteten Schicht überall dieselbe sein muss. Dies ist der berühmte hydrostatische

Satz, dass in jeder in Ruhe befindlichen Flüssigkeit die Flächen gleichen Drucks auch Flächen gleicher Dichtigkeit und gleichen Potentials sind.

751. Fall, in welchem die Schwere die einzige von aussen wirkende Kraft ist. — Wenn daher die Schwere die einzige betrachtete Kraft ist, die von aussen einwirkt, so sind die Oberflächen gleichen Drucks und gleicher Dichtigkeit (so lange sie mässige Ausdehnungen haben) horizontale Ebenen. Hierauf beruht die Wirkung der Wasserwage, des Hebers, des Barometers, u. s. w., ebenso die Uebereinanderlagerung von verschieden dichten Flüssigkeiten, die sich nicht mit einander mischen oder chemisch verbinden, in horizontalen Schichten, u. s. w., u. s. w. Die freie Oberfläche einer Flüssigkeit ist nur dem Druck der Atmosphäre ausgesetzt, muss daher, wenn die Flüssigkeit sich im Gleichgewicht befindet, eine Fläche gleichen Drucks, folglich eine Ebene sein. In ausgedehnten Wasserflächen, wie den amerikanischen Seen, bringen Unterschiede des atmosphärischen Drucks sogar bei ziemlich ruhigem Wetter oft beträchtliche Abweichungen von einer genau ebenen Fläche hervor.

752. Grösse der Zunahme des Drucks. — Die für die Längeneinheit in der Richtung der resultirenden Kraft genommene Grösse der Zunahme des Drucks ist gleich der für die Volumeneinheit der Flüssigkeit gerechneten Intensität der Kraft. Es sei F die für die Volumeneinheit in einer der Säulen des § 750 genommene resultirende Kraft; ferner seien p und p' die an den Enden dieser Säule wirkenden Druckkräfte, l die Länge und S der Querschnitt der Säule. Wir erhalten dann für das Gleichgewicht derselben

$$(p' - p)\, S = S l F.$$

Folglich ist F die für die Längeneinheit genommene Grösse der Zunahme des Drucks.

Wenn die von aussen einwirkenden Kräfte einem conservativen System angehören, für welches V und V' die Werthe des Potentials an den Enden der Säule sind, so ist (§ 486)

$$V' - V = - l F \varrho,$$

wo ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnet. Dies liefert

$$p' - p = - \varrho\, (V' - V),$$

oder

$$dp = - \varrho\, d V.$$

Wie in dem Falle, in welchem die Schwerkraft die einzige einwirkende Kraft ist, ist folglich auch hier die für die Einheit der Tiefe in der Flüssigkeit genommene Grösse der Zunahme des Drucks im Gravitationsmaass (welches gewöhnlich in der Hydrostatik benutzt wird) ϱ, im kinetischen oder absoluten (§ 224) Maasse $g\varrho$.

Wenn die Flüssigkeit ein Gas wie Luft ist und in einer constanten Temperatur erhalten wird, so haben wir $\varrho = cp$, wo c eine Constante bezeichnet, nämlich den reciproken Werth von H, der unten (§ 753) definirten „Höhe der homogenen Atmosphäre". Folglich ist in einer ruhigen Atmosphäre von gleichmässiger Temperatur

$$\frac{dp}{p} = -c\,dV,$$

und hieraus ergibt sich durch Integration

$$p = p_0\,e^{-cV},$$

wo p_0 die Grösse des Drucks in irgend einer besonderen Höhe (z. B. am Meeresspiegel) bezeichnet, in welcher wir das Potential als Null rechnen.

Wenn die betrachteten Höhendifferenzen unendlich klein im Vergleich zum Erdradius sind, wie wir sie mit für praktische Zwecke hinlänglicher Genauigkeit ansehen können, wenn wir die Höhen von Bergen oder von Luftballons mittels des Barometers bestimmen, so ist die Schwerkraft constant, und daher sind die Differenzen des Potentials (wenn die Kraft in Gewichtseinheiten gemessen wird) einfach gleich den Höhendifferenzen. Wenn also x die Erhöhung der Horizontalebene des Drucks p über diejenige des Drucks p_0 bezeichnet, so erhalten wir in der vorhergehenden Formel

$$V = x,$$

folglich

$$p = p_0\,e^{-cx},$$

in Worten: —

753. Druck in einer ruhigen Atmosphäre von gleichmässiger Temperatur. Höhe der homogenen Atmosphäre. — Wenn die Luft eine constante Temperatur hat, so nimmt der Druck in geometrischer Progression ab, während die Höhe in arithmetischer Progression wächst. Dieser Satz rührt von Halley her. Die Wahrheit desselben erkennen wir auch ohne Anwendung der Mathematik, wenn wir beachten, dass die Druckdifferenzen (§ 752) gleich sind den Höhendifferenzen, multiplicirt mit der Dichtigkeit der Flüssigkeit, oder, falls die Dichtigkeit sich zwischen den beiden Stationen merklich ändert, mit der entsprechenden mittleren Dichtigkeit. Nach dem Gesetz von Boyle und Mariotte variirt aber die Dichtigkeit bei constanter Temperatur einfach proportional dem Drucke. Folglich sind die Druckdifferenzen zwischen Paaren von Stationen, welche dieselben Höhenunterschiede haben, den entsprechenden Mittelwerthen



des ganzen Drucks proportional, was das bekannte Zinseszinsgesetz ist. Das Verhältniss der für die Längeneinheit genommenen, nach oben zu erfolgenden Abnahme des Drucks zum gesammten Druck ist in jedem Punkte natürlich gleich dem reciproken Werth der Höhe, welche die Atmosphäre, wenn ihre Dichtigheit constant ist, über jenen Punkt haben muss, damit ihr Gewicht jenen Druck liefere. Die so definirte Höhe wird gewöhnlich mit dem recht passenden Namen: „die Höhe der homogenen Atmosphäre" bezeichnet. Dieselbe ist gleich dem Product des Volumens, welches die Masseneinheit des Gases unter irgend einem Druck einnimmt, in den mittels des Gewichtes der Masseneinheit ausgedrückten Werth, welchen jener Druck für die Flächeneinheit hat. Wird die Höhe der homogenen Atmosphäre mit H bezeichnet, so ist der Exponentialausdruck des Gesetzes

$$p = p_0 e^{-\frac{x}{H}},$$

was mit der letzten Formel des § 752 übereinstimmt.

Für trockene atmosphärische Luft von der Temperatur des Gefrierpunktes ist der Werth von H nach Regnault in der Breite von Paris 799 020 cm oder 26 215 (engl.) Fuss. Da derselbe in verschiedenen Breiten (§ 222) der Schwerkraft umgekehrt proportional ist, so beträgt er in der Breite von Edinburgh und Glasgow 798 533 cm oder 26 199 engl. Fuss.

Analytische Herleitung der vorhergehenden Sätze. — Es seien X, Y, Z die, drei zu einander senkrechten Axen parallelen, Componenten der für die Masseneinheit genommenen Kraft, welche auf den im Punkte (x, y, z) befindlichen Flüssigkeitstheil wirkt. Da die Differenz der Druckkräfte, welche die beiden Seitenflächen $\delta y \delta z$ eines rechtwinkligen Parallelepipeds der Flüssigkeit erleiden, $\delta y \delta z \frac{dp}{dx} dx$ ist, so erfordert das Gleichgewicht dieses Theils der Flüssigkeit, wenn wir denselben für einen Augenblick als starr ansehen (§ 564), dass

$$\delta y \delta z \frac{dp}{dx} \delta x - X \varrho \delta x \delta y \delta z = 0$$

sei. Hieraus und aus den auf y und z bezüglichen symmetrischen Gleichungen folgt

$$\frac{dp}{dx} = X\varrho, \quad \frac{dp}{dy} = Y\varrho, \quad \frac{dp}{dz} = Z\varrho, \tag{1}$$

und dies sind die für das Gleichgewicht einer beliebigen Flüssigkeit nothwendigen und hinreichenden Bedingungen.

Aus (1) ergibt sich

$$dp = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz = \varrho (X dx + Y dy + Z dz). \tag{2}$$

Dies zeigt, dass der Ausdruck

$$X dx + Y dy + Z dz$$

das vollständige Differential einer Function dreier unabhängig Veränderlichen sein muss, oder durch einen Factor zu einem solchen muss gemacht werden können, d. h. dass es eine Schaar von Flächen gibt, welche die Kraftlinien unter rechten Winkeln schneiden, ein Satz, den wir schon oben (§ 749) bewiesen haben.

Wenn die Kräfte einem conservativen System angehören, so ist kein Factor erforderlich, um das Differential zu einem vollständigen zu machen, und wir erhalten

$$X dx + Y dy + Z dz = - d V,$$

wenn V das Potential (§ 485) der Kräfte in (x, y, z) bezeichnet. Dann geht (2) über in

$$dp = - \varrho d V. \tag{3}$$

Dies zeigt, dass p auf den Flächen constanten Potentials constant (oder eine Function von V) ist, und liefert

$$\varrho = - \frac{dp}{dV}, \tag{4}$$

woraus ersichtlich ist, dass auch ϱ eine Function von V ist, welche Sätze wir auf einem mehr elementaren Wege schon in § 752 bewiesen haben. Da (4) ein analytischer Ausdruck ist, welcher für den Fall eines conservativen Kraftsystems den drei Gleichungen (1) äquivalent ist, so gelangen wir zu folgendem Schlusse: —

754. **Bedingungen des Gleichgewichts einer Flüssigkeit, welche ein geschlossenes Gefäss ganz ausfüllt.** — Für das Gleichgewicht einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit, welche ein starres geschlossenes Gefäss vollständig ausfüllt, und welche nur der Einwirkung eines conservativen Kraftsystems ausgesetzt ist, ist es erforderlich und hinreichend, dass der Druck auf jeder Fläche constanten Potentials, d. h. auf jeder die Kraftlinien unter rechten Winkeln schneidenden Fläche gleichförmig sei. Wenn jedoch die Umgrenzung oder irgend ein Theil der Umgrenzung der betrachteten Flüssigkeit nicht starr ist — derselbe sei nun eine biegsame feste Substanz (wie eine Membran, oder ein dünnes Blatt eines festen elastischen Körpers), oder eine bloss geometrische Umgrenzung, auf deren anderer Seite eine andere Flüssigkeit ist, oder endlich Nichts [welchen Fall wir, ohne an das Vacuum als eine Realität zu glauben, in der abstracten Dynamik (§ 438) zulassen können] — so ist eine weitere Bedingung erforderlich, wenn der Druck von aussen in jedem Punkte der Umgrenzung der Gleichung (4) genügen soll. Wenn eine Membran einen Theil der Grenze bildet, so muss diese Bedingung entweder durch einen von aussen

her künstlich angebrachten Druck oder durch die inneren Elasticitätskräfte der Substanz der Membran erfüllt werden. Wenn eine andere Flüssigkeit von einer anderen Dichtigkeit sie auf der anderen Seite der Umgrenzung ringsherum oder nur in einem gewissen Theil berührt, ohne durch eine Membran von ihr getrennt zu sein, so muss die Bedingung des Gleichgewichts einer heterogenen Flüssigkeit von der gesammten aus den beiden Flüssigkeiten bestehenden Masse erfüllt sein, woraus hervorgeht, dass der Druck an der Grenze constant und gleich dem Druck der Flüssigkeit auf der anderen Seite sein muss. So ist für das Gleichgewicht von Wasser, Oel, Quecksilber oder irgend einer anderen Flüssigkeit, die sich in einem offenen Gefässe befindet und deren freie Oberfläche der Luft ausgesetzt ist, bloss erforderlich, dass diese Oberfläche eine Ebene sei.

755. **Eine Flüssigkeit in einem geschlossenen Gefäss unter der Einwirkung eines nicht conservativen Kraftsystems.** — Indem wir jetzt zur Betrachtung einer Flüssigkeitsmasse von endlicher Grösse, welche ein starres geschlossenes Gefäss vollständig erfüllt, zurückkehren, ersehen wir aus dem Vorhergehenden, dass, wenn die Flüssigkeit homogen und unzusammendrückbar ist, ihr Gleichgewicht durch kein conservatives Kraftsystem gestört werden kann. Diesen Satz zu beweisen, bedarf es keiner analytischen Untersuchung; denn wenn derselbe nicht richtig wäre, so würden wir ein „Perpetuum mobile“ erhalten, was der Voraussetzung, dass das System der Kräfte ein conservatives sei, widerspricht. Andererseits kann ein nichtconservatives Kraftsystem unter keinen Umständen eine Flüssigkeit in den Zustand des Gleichgewichts versetzen, welche entweder überall von gleichmässiger Dichtigkeit ist, oder welche aus einer homogenen Substanz besteht, die, was die Dichtigkeit betrifft, nur durch Verschiedenheit des Drucks heterogen gemacht worden ist. Wenn aber die Kräfte zwar nicht conservativ, doch so beschaffen sind, dass durch jeden Punkt des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes eine Oberfläche gezogen werden kann, welche alle Kraftlinien, die sie trifft, unter rechten Winkeln schneidet, so wird eine heterogene Flüssigkeit unter ihrer Einwirkung im Gleichgewicht bleiben, vorausgesetzt (§ 750), dass ihre Dichtigkeit auf jeder dieser orthogonalen Flächen von Punkt zu Punkt umgekehrt variirt, wie das Product der resultirenden Kraft in die Dicke der unendlich dünnen Schicht, welche zwischen jener Fläche und einer anderen der orthogonalen Flächen liegt, die ihr auf einer Seite unendlich nahe ist (vergl. § 488).

Eine Flüssigkeit unter der Einwirkung eines beliebigen Kraftsystems. — Dasselbe Resultat ergibt sich als etwas Selbstverständliches aus (1), da jene Gleichung bloss der analytische Ausdruck der Bedingung ist, dass die Kraft in jedem Punkte (x, y, z) die Richtung der Normalen an die durch (x, y, z) gehende Oberfläche hat, welche zu der Schaar der Flächen gehört, die durch verschiedene Werthe von C in $p = C$ erhalten werden, und dass ferner die Grösse der resultirenden Kraft

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dz}\right)^2}}{\varrho}$$

ist, in welchem Ausdruck der Zähler gleich $\frac{\delta C}{\tau}$ ist, wenn τ die Dicke der Schicht im Punkte (x, y, z) bezeichnet, welche zwischen den beiden einander zu beiden Seiten von (x, y, z) unendlich nahe liegenden Flächen

$$p = C \text{ und } p = C + \delta C$$

enthalten ist.

Der analytische Ausdruck der Bedingung, welcher X, Y, Z genügen müssen, damit die Gleichungen (1) möglich seien, wird folgendermaassen gefunden: — Aus

$$\frac{d}{dz}\frac{dp}{dy} = \frac{d}{dy}\frac{dp}{dz}, \text{ u. s. w.}$$

folgt zunächst

$$(5) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dz}(\varrho Y) = \frac{d}{dy}(\varrho Z) \\ \frac{d}{dx}(\varrho Z) = \frac{d}{dz}(\varrho X) \\ \frac{d}{dy}(\varrho X) = \frac{d}{dx}(\varrho Y). \end{cases}$$

Wenn wir die angedeuteten Differentiationen ausführen und die erste der resultirenden Gleichungen mit X, die zweite mit Y, die dritte mit Z multipliciren, so erhalten wir

$$(6) \qquad X\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + Y\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + Z\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right) = 0,$$

was bloss die bekannte Bedingung dafür ist, dass der Ausdruck

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

durch einen Factor zu dem vollständigen Differential einer Function dreier unabhängig Veränderlichen gemacht werden könne.

Oder wenn wir die erste der Gleichungen (5) mit $\frac{d\varrho}{dx}$, die zweite mit $\frac{d\varrho}{dy}$, die dritte mit $\frac{d\varrho}{dz}$ multipliciren und die Resultate addiren, so erhalten wir

$$(7) \qquad \frac{d\varrho}{dx}\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + \frac{d\varrho}{dy}\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + \frac{d\varrho}{dz}\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right) = 0.$$

Dies zeigt, dass die Linie, deren Richtungscosinus proportional

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \quad \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}$$

sind, auf der durch (x, y, z) gehenden Oberfläche gleicher Dichtigkeit senkrecht steht, und aus (6) geht hervor, dass dieselbe Linie senkrecht ist zur resultirenden Kraft. Die genannte Linie ist daher Tangente sowohl für die Oberfläche gleicher Dichtigkeit, als für die gleichen Drucks, folglich auch für die Schnittcurve beider Flächen. Die Differentialgleichungen dieser Curve sind somit

$$(8) \qquad \frac{dx}{\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}} = \frac{dy}{\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}} = \frac{dz}{\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}}.$$

756. Gleichgewichtsbedingung. — Wir denken uns jetzt, die ganze Flüssigkeit werde starr, mit Ausnahme eines unendlich dünnen geschlossenen röhrenförmigen Theils, welcher in einer Oberfläche gleicher Dichtigkeit liegt. Wenn die Flüssigkeit in dieser Röhre eine beliebige Strecke längs der Röhre fortbewegt und dann in Ruhe gelassen wird, so wird sie in der neuen Lage im Gleichgewicht bleiben, da alle ihre Lagen in der Röhre der Homogenität wegen gleichwerthig sind. Folglich wird die (positive oder negative) Arbeit, welche die Kraft (X, Y, Z) auf irgend einen Theil der Flüssigkeit bei einer Verschiebung längs der Röhre ausübt, durch die (negative oder positive) Arbeit aufgewogen, welche auf die übrige in der Röhre befindliche Flüssigkeit ausgeübt wird. Wenn sich daher ein einzelner Massenpunkt, auf welchen nur X, Y, Z einwirken, durch den Umfang bewegt, d. h. eine beliebige geschlossene Curve auf einer Oberfläche gleicher Dichtigkeit durchläuft, so hat er nach Zurücklegung eines vollständigen Umgangs in einigen Theilen seines Laufes genau so viel Arbeit gegen die Kraft geleistet, als die Kräfte in den übrigen Theilen seines Laufes auf ihn ausgeübt haben.

Wir können dieses Resultat analytisch beweisen durch eine interessante Anwendung von § 190 (j). Nehmen wir nämlich für α, β, γ unsere jetzigen Kräftecomponenten X, Y, Z und für die dort benutzte Oberfläche eine Fläche gleicher Dichtigkeit in unserer heterogenen Flüssigkeit, so muss der Ausdruck

$$\iint dS \left\{ l\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + m\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + n\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right)\right\}$$

wegen (7) verschwinden, und daraus lässt sich der Schluss ziehen, dass für jede geschlossene Curve auf einer Oberfläche gleicher Dichtigkeit

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0$$

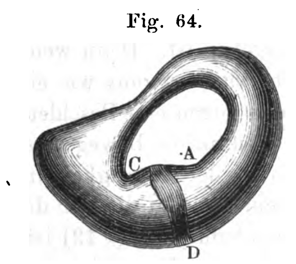
ist.

757. Imaginäres Beispiel des Gleichgewichts einer Flüssigkeit unter der Einwirkung nicht conservativer Kräfte. — Das folgende imaginäre Beispiel und seine Realisation in einem späteren Paragraphen (§ 759) zeigen eine merkwürdig interessante praktische Anwendung der Theorie des Gleichgewichts der Flüssigkeiten unter aussergewöhnlichen Umständen, während man diese Theorie allgemein als eine bloss abstracte analytische Theorie ansieht, die praktisch werthlos und ganz unnatürlich sei, „weil die Kräfte in der Natur von conservativer Art seien."

758. Es mögen die Kraftlinien Kreise sein, deren Mittelpunkte sämmtlich auf einer Linie liegen, und deren Ebenen senkrecht zu dieser Linie sind. Dieselben werden von den durch diese Axe gehenden Ebenen unter rechten Winkeln geschnitten, und daher kann eine Flüssigkeit unter einem solchen System von Kräften im Gleichgewicht sein. Das System wird nicht conservativ sein, wenn die Intensität der Kraft nicht dem Abstande von jener Axe umgekehrt proportional ist, sondern nach irgend einem andern Gesetz variirt, und damit die Flüssigkeit sich im Gleichgewicht befinde, muss sie heterogen und so vertheilt sein, dass ihre Dichtigkeit auf jeder durch die Axe gehenden Ebene von Punkt zu Punkt umgekehrt wie das Product der Kraft in den Abstand von der Axe variire. Aber von einer solchen Ebene zu einer andern kann die Dichtigkeit gleichförmig sein, oder sich willkürlich ändern. Um bestimmtere Bedingungen zu stellen, wollen wir voraussetzen, die Kraft stehe in directer einfacher Proportion zum Abstande von der Axe. Dann wird die Flüssigkeit im Gleichgewicht sein, wenn ihre Dichtigkeit auf jeder durch die Axe gehenden Ebene von Punkt zu Punkt umgekehrt wie das Quadrat jenes Abstandes variirt. Wenn wir noch weiter specialisiren, indem wir die Kraft um jede kreisförmige Kraftlinie herum gleichförmig machen, so wird die Vertheilung der Kraft genau die der kinetischen Reactionen der Theile eines starren Körpers gegen eine beschleunigte Rotation. Der Flüssigkeitsdruck wird dann (§ 749) auf jeder durch die Axe gehenden Ebene überall der nämliche sein, und auf einer solchen Ebene, welche wir uns um die Axe in der Richtung der Kraft herumgeführt denken können, wird der Flüssigkeitsdruck eine dem Winkel einfach proportionale Zunahme erfahren, deren Betrag, genommen für die Einheit des Winkels (§ 41), gleich dem Product aus der Dichtigkeit, welche die Flüssigkeit in der Einheit des Abstandes hat, in die Grösse der Kraft in der Einheit des Abstandes ist. Folglich ist zu bemerken, dass, wenn eine geschlos-

sene Linie um die Axe gezogen werden kann, ohne dass man die Flüssigkeit zu verlassen braucht, kein Gleichgewicht bestehen kann ohne eine feste Scheidewand, welche jede solche geschlossene Linie schneidet und die dem Winkel 2π entsprechende Differenz der zu ihren beiden Seiten wirkenden Druckkräfte erträgt. Wenn also die Axe durch irgend einen Theil der Flüssigkeit geht, so muss eine Scheidewand da sein, welche sich von diesem Theil der Axe continuirlich bis zur äusseren Grenzfläche der Flüssigkeit erstreckt. Oder wenn die Grenzfläche der ganzen Flüssigkeit ringförmig (wie ein hohler Ankerring, oder von einer beliebigen unregelmässigen Form) ist, mit anderen Worten, wenn die Flüssigkeit einen röhrenförmigen geschlossenen Raum erfüllt, und die Axe (A) durch die Oeffnung des Ringes geht (ohne in die Flüssigkeit einzutreten), so muss eine feste Scheidewand (CD) da sein, welche irgendwo den Canal oder die Röhre ganz verschliesst und die Flüssigkeit verhindert, ganz herum zu fliessen; sonst könnte unter der Einwirkung der vorausgesetzten Kräfte kein Gleichgewicht stattfinden. Wenn wir weiter in dem bisher betrachteten System voraussetzen, die Flüssigkeit sei ringsum längs jeder der kreisförmigen Kraftlinien von gleichförmiger Dichtigkeit (so dass die Dichtigkeit auf jedem Cylinder von kreisförmiger Basis, welcher die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Kraftlinien zur Axe hat, gleich ist und von einer solchen Cylinderfläche zu einer andern umgekehrt wie die Quadrate der Radien derselben variirt), so können wir, ohne das Gleichgewicht zu stören, ein beliebiges conservatives System von Kräften hinzufügen, deren Richtungen zur Axe senkrecht sind, d. h. (§ 488) ein beliebiges System von Kräften, welche die genannten Richtungen haben, und deren Intensität wie irgend eine Function des Abstandes variirt. Wenn diese Function der einfache Abstand selbst ist, so stimmt das neu hinzugefügte Kraftsystem genau mit den Reactionen gegen eine Krümmung, d. h. mit den Centrifugalkräften der Theile eines rotirenden starren Körpers überein.

Fig. 64.



759. Realisation des vorhergehenden Beispiels. — Wir gelangen auf diese Weise zu dem bemerkenswerthen Schluss, dass, wenn ein starres geschlossenes Gefäss vollständig mit einer unzusammendrückbaren heterogenen Flüssigkeit erfüllt ist, deren Dich-

tigkeit umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes von einer gewissen Linie variirt, und wenn das Gefäss sich um diese Linie als eine feste Axe bewegen kann und auf irgend eine Weise von Kräften angegriffen wird, die auf seine Aussenseite einwirken, die Flüssigkeit in Beziehung auf das Gefäss im Gleichgewicht bleiben, d. h. sich mit demselben herumbewegen wird, als wäre das Ganze ein starrer Körper, und mit dem Gefäss zur Ruhe kommen wird, wenn das letztere wieder zur Ruhe gebracht wird; immer vorausgesetzt, dass die oben angegebene Bedingung hinsichtlich der Scheidewände erfüllt ist, wenn die Axe durch die Flüssigkeit geht, oder von geschlossenen Flüssigkeitslinien umgeben ist. Denn wenn sich die Flüssigkeit beim Uebergang von Ruhe zu Bewegung wie ein starrer fester Körper bewegt, so sind Reactionen gegen eine Beschleunigung vorhanden, deren Richtungen Tangenten an die Bewegungskreise sind, und die für die Einheit der Masse der Flüssigkeit im Abstande r von der Axe die Grösse $\dot{\omega} r$ haben, wenn $\dot{\omega}$ die für die Zeiteinheit genommene Grösse der Winkelbeschleunigung (§ 42) ist; ausserdem (siehe Bd. II) ist in der zur Axe senkrechten Richtung eine nach aussen zu wirkende Reaction gegen die Krümmung der Bahn, d. h. eine „Centrifugalkraft“ vorhanden, welche für die Masseneinheit der Flüssigkeit $\omega^2 r$ beträgt. Nun haben wir im vorhergehenden Paragraphen bewiesen, dass die Flüssigkeit, wenn wir voraussetzen, sie befinde sich in Ruhe und werde in irgend einer Weise von zwei Kraftsystemen (dem nicht-conservativen mit kreisförmigen Kraftlinien und dem conservativen radialen Systeme) angegriffen, welche mit jenen Kräften der kinetischen Reaction übereinstimmen, im Gleichgewicht ist. Dies beweist uns jetzt D'Alembert's (§ 264) Gleichgewichtsbedingung für die Bewegung der ganzen Flüssigkeit als eines starren Körpers, welcher eine beschleunigte Rotation erfährt, d. h. zeigt uns, dass diese Art der Bewegung für die wirklich vorhandenen Umstände die Gesetze der Bewegung erfüllt und somit die von der Flüssigkeit wirklich angenommene Bewegung ist.

760. Relation zwischen der Dichtigkeit und dem Potential der von aussen einwirkenden Kräfte. — Wenn die Flüssigkeit von homogener Substanz und überall von derselben Temperatur, aber wie alle realen Flüssigkeiten zusammendrückbar ist, so kann sie nur wegen der Verschiedenheit des Drucks an verschiedenen Stellen von ungleichförmiger Dichtigkeit sein. Die Oberflächen gleicher Dichtigkeit müssen auch Oberflächen gleichen

Drucks sein, und es kann, wie wir oben (§ 753) gesehen haben, kein Gleichgewicht stattfinden, wofern das System der Kräfte nicht conservativ ist. Die Dichtigkeit ist eine Function des Drucks, und diese Function muss als bekannt vorausgesetzt werden (§ 448), da sie von den physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeit abhängt (vergl. § 752).

Es sei

$$\varrho = f(p). \tag{9}$$

Wenn wir die Formel § 753 (3) integriren, so erhalten wir

$$\int \frac{dp}{f(p)} = C - V, \tag{10}$$

oder, wenn F eine Function bezeichnet, für welche

$$F\left\{\int \frac{dp}{f(p)}\right\} = p \tag{11}$$

ist,

$$p = F(C - V),$$

oder nach (9)

$$\varrho = f\{F(C - V)\}. \tag{12}$$

761. Resultante der auf ein ebenes Flächenstück wirkenden Druckkräfte. — In § 746 haben wir die Resultante der auf eine ebene Fläche wirkenden Druckkräfte unter der Voraussetzung einer gleichmässigen Vertheilung dieser Kräfte betrachtet. Wir wollen jetzt kurz die Resultante der auf ein ebenes Flächenstück wirkenden Druckkräfte unter der Voraussetzung betrachten, dass sich der Druck von Punkt zu Punkt ändert. Dabei werden wir unsere Aufmerksamkeit auf einen Fall von grosser Wichtigkeit beschränken, nämlich auf den Fall, in welchem die Schwere die einzige einwirkende Kraft und die Flüssigkeit nur äusserst wenig zusammendrückbar (wie z. B. Wasser) ist. In diesem Falle ist die Bestimmung der Lage des Mittelpunkts des Drucks sehr einfach, und der Gesammtdruck ist derselbe, wie wenn das ebene Flächenstück um seinen Trägheitsmittelpunkt in eine horizontale Lage gedreht wäre.

Der Druck in einem Punkte von der Tiefe z in der Flüssigkeit kann durch

$$p = \varrho z + p_0$$

ausgedrückt werden, wo ϱ die (constante) Dichtigkeit der Flüssigkeit und p_0 der auf der freien Oberfläche lastende (atmosphärische) Druck ist, ausgedrückt in Gewichtseinheiten per Flächeneinheit.

Es werde nun als x-Axe der Durchschnitt der Ebene der eingetauchten Platte mit der freien Oberfläche der Flüssigkeit angenommen. Die

y-Axe liege in der Ebene der Platte senkrecht zur x-Axe, und es sei α der Neigungswinkel der Platte gegen die Verticale. Ferner habe der betrachtete Theil der Platte die Fläche A und sein Trägheitsmittelpunkt die Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$.

Dann ist der gesammte Druck

$$\iint p\,dx\,dy = \iint (p_0 + \varrho y \cos\alpha)\,dx\,dy$$
$$= A p_0 + A \varrho \bar{y} \cos\alpha.$$

Das Moment des Drucks in Beziehung auf die x-Axe ist

$$\iint p y\,dx\,dy = A p_0 \bar{y} + A k^2 \varrho \cos\alpha,$$

wo k der Gyrationsradius des ebenen Flächenstücks in Beziehung auf die x-Axe ist.

Für das Trägheitsmoment in Beziehung auf die y-Axe erhalten wir

$$\iint p x\,dx\,dy = A p_0 \bar{x} + \varrho \cos\alpha \iint x y\,dx\,dy.$$

Die ersten Theile der rechten Glieder dieser drei Gleichungen liefern uns bloss die Resultate von § 746; wir können diese Theile daher fortlassen. Dies läuft darauf hinaus, dass wir über die freie Oberfläche eine Flüssigkeitsschicht von solcher Höhe setzen, dass der dadurch erzeugte Druck dem atmosphärischen äquivalent ist. Wird jetzt der Anfangspunkt der Coordinaten in die obere Fläche dieser Schicht verlegt, so ergibt sich:

$$\text{Druck} = A \varrho \bar{y} \cos\alpha,$$
$$\text{Moment in Beziehung auf } Ox = A k^2 \varrho \cos\alpha,$$
$$\text{Abstand des Mittelpunktes des Drucks von der } x\text{-Axe} = \frac{k^2}{\bar{y}}.$$

Wenn aber k_1 der Gyrationsradius des ebenen Flächenstücks in Beziehung auf eine in seiner Ebene liegende und durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende horizontale Axe ist, so haben wir nach § 283

$$k^2 = k_1^2 + \bar{y}^2.$$

Folglich ist der der y-Axe parallel gemessene Abstand des Mittelpunkts des Drucks von dem Trägheitsmittelpunkt

$$\frac{k_1^2}{\bar{y}},$$

und dieser Abstand wird, wie wir erwarten konnten, um so kleiner, je mehr das ebene Flächenstück untergetaucht wird. Wenn man das ebene Flächenstück um die durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende, der x-Axe parallele Linie dreht, so variirt jener Abstand wie der Cosinus der Neigung des Flächstücks gegen die Verticale; dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die Grösse des untergetauchten Theils der Fläche durch die Rotation keine Aenderung erleidet.

762. Gewichtsverlust eines Körpers in einer Flüssigkeit. — Ein ganz oder zum Theil in irgend eine unter der Einwirkung der Schwerkraft stehende Flüssigkeit eingetauchter Körper verliert in Folge des Drucks der Flüssigkeit so viel von seinem Ge-

wicht, als die verdrängte Flüssigkeit wiegt. Denn wenn der Körper entfernt und an seine Stelle eine mit der umgebenden Flüssigkeit homogene flüssige Masse gesetzt würde, so würde Gleichgewicht bestehen, selbst wenn man voraussetzte, diese Flüssigkeit würde starr. Die Resultante des Drucks der umgebenden Flüssigkeit auf diesen Theil ist daher eine einzige dem Gewicht derselben gleiche Kraft, welche in der durch den Schwerpunkt derselben gehenden Verticallinie wirkt. Der Druck der Flüssigkeit auf den anfänglich eingetauchten Körper war aber überall derselbe, wie der Druck auf den starr gewordenen Flüssigkeitstheil, durch welchen wir jenen für einen Augenblick ersetzt haben; er muss daher auch dieselbe Resultante haben. Dieser Satz ist von grosser Bedeutung in der Hydrometrie, der Bestimmung des specifischen Gewichts, u. s. w.

Wir wollen den Satz analytisch herleiten. Interessant ist der folgende Beweis, namentlich wegen der Analogien mit einigen vorhergehenden Sätzen, und einigen Sätzen, die wir in den Capiteln über Elektricität und Magnetismus antreffen werden.

Wenn V das Potential der einwirkenden Kräfte ist, so ist $-\frac{dV}{dx}$ die der x-Axe parallele Componente der Kraft, welche auf die im Punkte (x, y, z) befindliche Masseneinheit wirkt, und es ist $\varrho\, dx\, dy\, dz$ die Masse eines Elements der Flüssigkeit. Folglich wird die Resultante aller der x-Axe parallelen Componenten der Kräfte, welche auf einen an die Stelle des eingetauchten Körpers gesetzten Flüssigkeitstheil wirken, durch das dreifache Integral

$$-\iiint \varrho \frac{dV}{dx}\, dx\, dy\, dz$$

dargestellt, welches für den ganzen von der Fläche umgrenzten Raum zu nehmen ist. Nach § 752 ist aber

$$\frac{dp}{dx} = -\varrho \frac{dV}{dx},$$

und daher verwandelt sich das dreifache Integral in

$$\iiint \frac{dp}{dx}\, dx\, dy\, dz = \iint p\, dy\, dz,$$

welches letztere Integral über die ganze Fläche genommen werden muss.

Es sei nun dS ein in x, y, z liegendes Element irgend einer Oberfläche; ferner seien λ, μ, ν die Richtungscosinus der an dies Element gelegten Normale und p der Druck in der Flüssigkeit, welche mit demselben in Berührung ist. Dann ist die der x-Axe parallele Componente des Gesammtdrucks

$$P_x = \iint \lambda p\, dS$$
$$= \iint p\, dy\, dz,$$

und dieser Ausdruck stimmt mit dem obigen völlig überein.



Das um die z-Axe drehende Kräftepaar, welches aus den auf irgend eine flüssige Masse einwirkenden Kräften herrührt, ist (§ 559)

$$\Sigma\, dm (Xy - Yx),$$

wo dm die Masse eines Flüssigkeitselements bezeichnet.

Dieser Ausdruck kann in der Form

$$-\iiint \varrho\, dx\, dy\, dz \left(y \frac{dV}{dx} - x \frac{dV}{dy}\right)$$

geschrieben werden, wo das Integral für den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum zu nehmen ist.

Der letzte Ausdruck ist offenbar gleich

$$\iiint \left(y \frac{dp}{dx} - x \frac{dp}{dy}\right) dx\, dy\, dz$$

$$= \iint p\, y\, dy\, dz - \iint p\, x\, dz\, dx$$

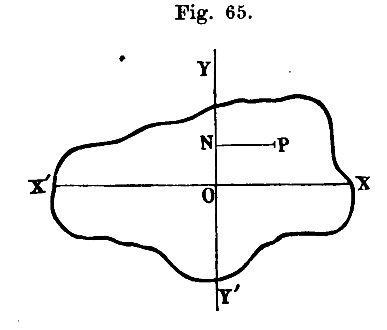
$$= \iint p\, (\lambda y - \mu x)\, dS,$$

und dies ist das nur aus dem Oberflächendruck herrührende Kräftepaar.

763. Hilfssatz. — Der nachstehende, an und für sich schon interessante Hilfssatz ist insofern von grossem Nutzen, als er uns befähigt, die folgenden Untersuchungen über die Stabilität des Gleichgewichts schwimmender Körper zu vereinfachen.

Ein homogener fester Körper, dessen Volumeneinheit das Gewicht Eins haben möge, werde von einer horizontalen Ebene in $XYX'Y'$ geschnitten, und es sei O der Trägheitsmittelpunkt, XX' und YY' die Hauptaxen dieses Schnittes.

Fig. 65.



Weiter werde der feste Körper von einer zweiten Ebene geschnitten, die gleichfalls durch YY' geht und mit der ersteren den unendlich kleinen Winkel ϑ bildet. Dann gelten folgende Sätze: —

1. Die Volumina der durch diese Schnitte aus dem festen Körper geschnittenen beiden Keile sind einander gleich.

2. Ihre Trägheitsmittelpunkte liegen in einer zu YY' senkrechten Ebene.

3. In Beziehung auf YY' ist das Moment des Gewichts jedes dieser Keile gleich dem mit ϑ multiplicirten in Beziehung auf YY' genommenen Trägheitsmoment des entsprechenden Theils der Fläche.

Wir nehmen OX, OY zu Coordinatenaxen, und es sei ϑ der Winkel an der Spitze des Keils. Dann ist die Dicke des Keils in irgend einem Punkte P (x, y) gleich ϑx und das Volumen eines geraden prismatischen Theils, welcher die unendlich kleine in P liegende Fläche $dx\,dy$ zur Basis hat, gleich

$$\vartheta x\,dx\,dy.$$

Wir bedienen uns jetzt der Zeichen [ ] und ( ), um die Integrationen, welche sich beziehungsweise über die rechts und links von der y-Axe liegenden Flächentheile erstrecken, von einander zu unterscheiden, während den auf die ganze Fläche bezüglichen Integralen keine solchen Unterscheidungszeichen beigefügt werden. Es seien α und α' diese Flächen, v und v' die Volumina der Keile, $(\bar{x}, \bar{y})$, $(\bar{x}', \bar{y}')$ die Coordinaten ihrer Trägheitsmittelpunkte. Dann ist

$$v = \vartheta\,[\textstyle\int\int x\,dx\,dy] = \alpha\bar{x}$$

$$-\,v' = \vartheta\,(\textstyle\int\int x\,dx\,dy) = \alpha'\bar{x}',$$

folglich

$$v - v' = \vartheta\,\textstyle\int\int x\,dx\,dy = 0,$$

da O der Trägheitsmittelpunkt ist. Hieraus ergibt sich

$$v = v',$$

womit der Satz (1) bewiesen ist.

Nehmen wir weiter die Momente in Beziehung auf die Axe XX', so folgt

$$v\bar{y} = \vartheta\,[\textstyle\int\int xy\,dx\,dy]$$

und

$$-\,v'\bar{y}' = \vartheta\,(\textstyle\int\int xy\,dx\,dy),$$

mithin

$$v\bar{y} - v'\bar{y}' = \vartheta\,\textstyle\int\int xy\,dx\,dy.$$

Für eine Hauptaxe ist aber (§ 281) $\Sigma xy\,dm$ gleich Null. Wir erhalten also $v\bar{y} - v'\bar{y}' = 0$ und daraus, da $v = v'$ ist,

$$\bar{y} = \bar{y}',$$

was den Satz (2) beweist.

Der Satz (3) drückt bloss die Gleichung

$$[\textstyle\int\int x\,.\,x\,\vartheta\,dx\,dy] = \vartheta\,[\textstyle\int\int x^2\,.\,dx\,dy],$$

deren Richtigkeit auf der Hand liegt, in Worten aus.

764. Stabilität des Gleichgewichts eines schwimmenden Körpers. — Wenn ein positiver Betrag von Arbeit erfordert wird, um irgend eine mögliche unendlich kleine Verschiebung eines Körpers aus einer Gleichgewichtslage zu erzeugen, so ist das Gleichgewicht in dieser Lage stabil (§ 291). Um dieses Unterscheidungsmittel auf den Fall eines schwimmenden Körpers anzuwenden, bemerken wir, dass jede mögliche unendlich kleine Verschiebung passend als aus zwei horizontalen Verschiebungen, deren Richtungen senkrecht zu einander sind, einer verticalen Verschiebung und drei

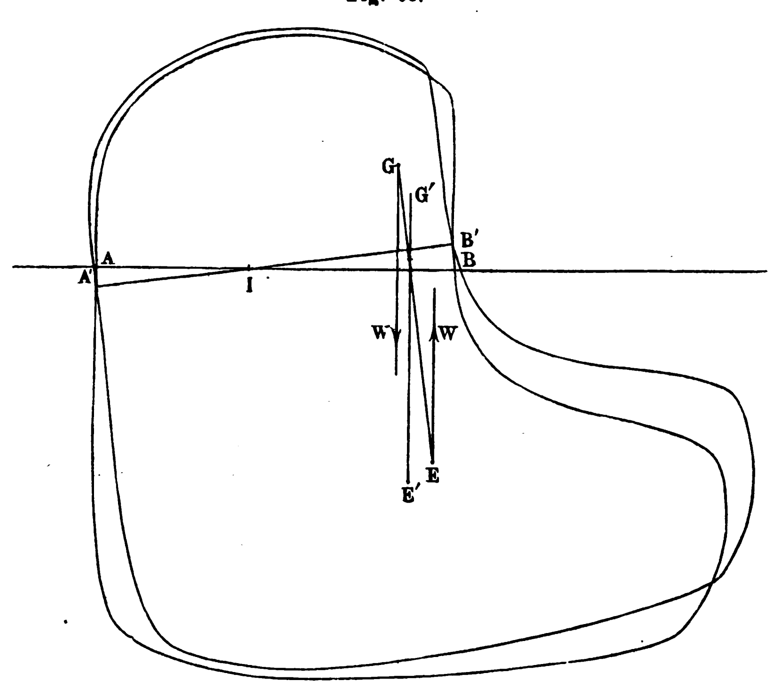
Rotationen um drei durch einen beliebig gewählten Punkt gehende, zu einander senkrechte Axen bestehend angesehen werden kann (§§ 26, 95). Wenn eine dieser Axen vertical ist, so erfordern drei dieser Verschiebungscomponenten — nämlich die beiden horizontalen Verschiebungen und die Rotation um die verticale Axe — keine (positive oder negative) Arbeit, und daher ist das Gleichgewicht, soweit diese Componenten in Betracht kommen, ein neutrales. Was aber die drei anderen Verschiebungsarten betrifft, so kann das Gleichgewicht stabil oder instabil oder neutral sein, jenachdem gewisse Bedingungen erfüllt sind, die wir im Folgenden herleiten wollen.

765. Verticale Verschiebungen. — Wenn zunächst eine einfache verticale Verschiebung etwa nach unten erfolgt, so wird Arbeit geleistet gegen eine zunehmende Resultante des nach oben wirkenden Flüssigkeitsdrucks. Diese Arbeit ist natürlich gleich der mittleren Zunahme dieser Kraft, multiplicirt mit dem ganzen Wege. Wenn wir diesen Weg mit z, die Grösse der Schwimmfläche, d. h. des durch den schwimmenden Körper fortgenommenen Theils der ebenen Oberfläche der Flüssigkeit, mit A und das Gewicht der Volumeneinheit der Flüssigkeit mit w bezeichnen, so ist die Zunahme des eingetauchten Volumens offenbar Az. Folglich ist die Zunahme der Resultante des Flüssigkeitsdrucks w Az und wirkt in einer durch den Schwerpunkt von A vertical nach oben zu gehenden Linie. Die mittlere Kraft, gegen welche Arbeit geleistet wird, ist daher $\frac{1}{2}\, wAz$, da dies ein Fall ist, in welchem Arbeit gegen eine Kraft geleistet wird, die von Null an einfach proportional dem Wege zunimmt. Die geleistete Arbeit ist also $\frac{1}{2}\, wAz^2$. Wir sehen daraus, dass, soweit verticale Verschiebungen allein in Betracht kommen, das Gleichgewicht nothwendig stabil ist, so lange nicht der Körper ganz untergetaucht ist. In diesem letzteren Falle ist die Grösse der Schwimmfläche Null und das Gleichgewicht neutral.

766. Verschiebung durch Rotation um eine Axe in der Schwimmebene. Grösse der bei dieser Verschiebung geleisteten Arbeit. — Nach dem Hilfssatze des § 763 empfiehlt es sich, als die beiden horizontalen Rotationsaxen die Hauptaxen der Schwimmebene anzunehmen. Unter dieser Voraussetzung wollen wir jetzt eine Rotation durch einen unendlich kleinen Winkel ϑ um eine dieser Axen betrachten. Es seien G und E die nach Ausführung der Rotation von den Schwerpunkten des festen Körpers und desjenigen Theils seines Volumens, der, als der Körper im Gleichgewicht sich befand, untergetaucht war, eingenommenen

Lagen. Dieselben Punkte sollen im Gleichgewichtszustande des Körpers sich in G', E' befunden haben. Diese vier Punkte sind

Fig. 66.



sämmtlich auf die Ebene der Zeichnung projicirt, von der wir voraussetzen, dass sie durch den Trägheitsmittelpunkt J der Schwimmebene geht. Die Resultante der Wirkung der Schwerkraft auf den verschobenen Körper ist sein Gewicht W, welches durch G nach unten wirkt. Die Resultante des Flüssigkeitsdrucks auf den verschobenen Körper ist eine durch E nach oben hin wirkende Kraft W, vermehrt um einen (aufwärts gerichteten) Betrag, der daher rührt, dass jetzt der keilförmige Theil AJA' auch untergetaucht ist, und vermindert um einen (abwärts gerichteten) Betrag, der daher rührt, dass der keilförmige Theil BJB' jetzt aus der Flüssigkeit herausgetreten ist. Die Gesammtwirkung der Schwere und des Flüssigkeitsdrucks auf den verschobenen Körper besteht also aus dem Kräftepaar, dessen Kräfte vertical nach oben und nach unten hin durch G und E wirken, und aus der für die keilförmigen Theile erforderten Correction. Letztere besteht aus einer Kraft, welche vertical nach oben durch den Schwerpunkt von $A'JA$ und

einer zweiten Kraft, welche durch den Schwerpunkt von BJB' vertical nach unten wirkt. Diese Kräfte sind gleich [§ 763 (1)] und machen daher ein Kräftepaar aus, welches [§ 763 (2)] die Axe der Verschiebung zur Axe hat, und dessen Moment [§ 763 (3)] gleich $\vartheta w k^2 A$ ist, wenn A die Fläche der Schwimmebene und k der Gyrationsradius derselben (§ 281) in Beziehung auf die in Rede stehende Hauptaxe ist. Da aber die Linien GE, welche in der Gleichgewichtslage vertical $(G'E')$ war, in dem verschobenen Körper mit der Verticalen den unendlich kleinen Winkel ϑ bildet, so hat das Paar, dessen Kräfte W in den durch G und E gehenden Verticallinien wirken, das Moment $Wh\vartheta$, wenn h die Linie GE bezeichnet; dieses Kräftepaar liegt in einer zur Axe senkrechten Ebene und ist so gerichtet, dass es die Verschiebung zu vergrössern strebt, wenn sich G über E befindet. Folglich ist die Resultante der Wirkung der Schwere und des Flüssigkeitsdrucks auf den verschobenen Körper ein Kräftepaar, welches das Moment

$$(wAk^2 - Wh)\vartheta \text{ oder } w(Ak^2 - Vh)\vartheta$$

hat, wenn V das eingetauchte Volumen ist. Daraus geht hervor, dass, soweit diese Verschiebung allein in Betracht kommt, das Gleichgewicht stabil ist, wenn man $Ak^2 > Vh$ hat.

Da ferner das Kräftepaar, gegen welches bei der Erzeugung der Verschiebung Arbeit geleistet wird, von Null an einfach proportional dem Verschiebungswinkel zunimmt, so ist sein Mittelwerth die Hälfte des oben angegebenen Betrages; der Gesammtbetrag der geleisteten Arbeit ist folglich gleich

$$\tfrac{1}{2} w (Ak^2 - Vh)\vartheta^2.$$

767. Allgemeine Verschiebung. — Wenn wir jetzt eine Verschiebung betrachten, welche aus einer (abwärts gerichteten) verticalen Verschiebung z und Rotationen durch die unendlich kleinen Winkel ϑ, ϑ' um die beiden horizontalen Hauptaxen der Schwimmebene besteht, so sehen wir (§§ 765, 766), dass die zu ihrer Hervorbringung erforderte Arbeit gleich

$$\tfrac{1}{2} w[Az^2 + (Ak^2 - Vh)\vartheta^2 + (Ak'^2 - Vh)\vartheta'^2]$$

ist; daraus schliessen wir, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die vollkommene Stabilität des Gleichgewichts in Betreff aller möglichen Verschiebungen dieser Art folgende sind: —

$$h < \frac{Ak^2}{V} \text{ und } h < \frac{Ak'^2}{V}.$$

768. Das Metacentrum. Bedingungen seines Vorhandenseins. — Wenn die Verschiebung um irgend eine durch den Trägheitsmittelpunkt der Schwimmebene gehende Axe erfolgt, so ist die Resultante der Flüssigkeitsdruckkräfte gleich dem Gewicht des Körpers; diese Resultante liegt aber nur dann in der Ebene der Verschiebung, wenn die Axe eine Hauptaxe der Schwimmebene ist. In einem solchen Falle heisst der Durchschnittspunkt der Resultante mit der durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden, vor der Verschiebung verticalen Linie das Metacentrum. Aus den obigen Entwicklungen erhellt, dass die Bedingung des stabilen Gleichgewichts für jede dieser Verschiebungsebenen die ist, dass das Metacentrum über dem Schwerpunkte liege.

769. Die analytische Behandlung sphäroidaler Formen, mit der wir diesen Band schliessen werden, ist nur dann für hydrodynamische Probleme geeignet oder praktisch brauchbar, wenn die Abweichungen von der sphärischen Symmetrie unendlich klein oder doch so klein sind, dass wir die Quadrate der Excentricitäten (§ 801) vernachlässigen dürfen, oder, was dasselbe ist, dass wir das Princip der Superposition der störenden Kräfte und der durch dieselben erzeugten Abweichungen ohne jede Beschränkung zulassen können. Wir werden aber zuerst einen Fall betrachten, welcher eine sehr einfache synthetische Lösung gestattet, ohne uns die Beschränkung der Annäherung an die Kugelgestalt aufzuerlegen, und für welchen Newton und Maclaurin den folgenden bemerkenswerthen Satz entdeckt haben: —

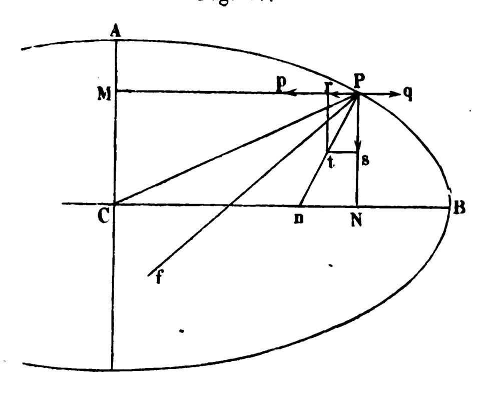
770. Ein homogenes Ellipsoid ist eine Gleichgewichtsfigur einer rotirenden Flüssigkeit. — Die Figur eines abgeplatteten Rotationsellipsoids von beliebig gegebener Excentricität genügt den Bedingungen des Gleichgewichts einer homogenen unzusammendrückbaren Flüssigkeitsmasse, welche mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit um eine Axe rotirt, und deren Theile keiner Kraft ausser der Schwere unterworfen sind.

Für eine gegebene Excentricität ist die Winkelgeschwindigkeit unabhängig von der Masse der Flüssigkeit und der Quadratwurzel der Dichtigkeit derselben proportional.

771. Der Beweis dieses Satzes lässt sich leicht aus den schon erhaltenen Resultaten über die Attraction eines Ellipsoids und die Eigenschaften der freien Oberfläche einer Flüssigkeit entnehmen,

Es sei in Fig. 67 APB ein Meridianschnitt eines homogenen abgeplatteten Sphäroids, AC die Polaraxe, CB ein Aequatorialradius und P ein beliebiger Punkt der Oberfläche. Dann wissen

Fig. 67.



wir aus § 522, dass die Attraction des Sphäroids in zwei Theile zerlegt werden kann, von denen der eine, Pp, zur Polaraxe senkrecht ist und wie die Ordinate PM variirt, während der andere, Ps, der Polaraxe parallel ist und wie PN variirt. Diese Componenten sind nicht gleich, wenn MP und PN gleich sind; denn sonst würde die Resultante der Attraction in allen Punkten in der Oberfläche durch C gehen, während wir wissen, dass sie eine Richtung wie etwa Pf hat, welche den Radius BC zwischen B und C in einem Punkte schneidet, der näher an C liegt, als der Fusspunkt n der in P gelegten Normale. Es sei jetzt

$$Pp = \alpha . PM$$

und

$$Ps = \beta . PN,$$

wo α und β bekannte Constanten sind, die bloss von der Dichtigkeit (ϱ) und der Excentricität (e) des Sphäroids abhängen.

Ferner wissen wir aus der Geometrie, dass

$$Nn = (1 - e^2)\, CN$$

ist.

Um jetzt die Grösse einer zur Axe des Sphäroids senkrechten Kraft Pq zu finden, welche, verbunden mit der Attraction, die resultirende Kraft in die Richtung der Normalen Pn bringt, machen wir $pr = Pq$; dann ist

$$\frac{Pr}{Ps} = \frac{Nn}{PN} = (1 - e^2)\frac{CN}{PN} = (1 - e^2)\frac{\beta . Pp}{\alpha . Ps},$$

folglich

$$Pr = (1 - e^2)\frac{\beta}{\alpha} Pp$$

$$Pp - Pq = (1 - e^2)\frac{\beta}{\alpha} Pp,$$

oder

$$Pq = \left(1 - (1 - e^2)\frac{\beta}{\alpha}\right) Pp$$
$$= \left(\alpha - (1 - e^2)\,\beta\right) PM.$$

Wenn wir jetzt das Sphäroid mit der Winkelgeschwindigkeit ω um AC rotiren liessen, so würde die Centrifugalkraft (§§ 32, 35 a, 259) die Richtung Pq haben und von der Grösse

$$\omega^2 . PM$$

sein. Wenn wir also

$$\omega^2 = \alpha - (1 - e^2)\,\beta$$

machen, so hat die auf P wirkende Gesammtkraft, d. i. die Resultante der Attraction und der Centrifugalkraft, die Richtung der Normalen an die Oberfläche, was die Bedingung für die freie Oberfläche einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeitsmasse ist.

Nun ist nach § 522

$$\alpha = 2\pi\varrho\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\,arcsin\,e - \frac{1-e^2}{e^2}\right),$$

$$\beta = 4\pi\varrho\left(\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\,arcsin\,e\right),$$

folglich

$$(1)\qquad \omega^2 = 2\pi\varrho\left\{\frac{(3-2e^2)\sqrt{1-e^2}}{e^3}\,arcsin\,e - 3\,\frac{1-e^2}{e^2}\right\}.$$

Diese Formel bestimmt die Winkelgeschwindigkeit und beweist, dass dieselbe proportional $\sqrt{\varrho}$ ist.

772. Wenn wir nach Laplace statt e eine durch die Gleichung

$$(2)\qquad \begin{cases} 1 - e^2 = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2} \\ \text{oder}\quad \varepsilon = \dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}} = tan\,(arcsin\,e) \end{cases}$$

definirte Grösse ε einführen, so wird der Ausdruck (1) für ω^2 bedeutend vereinfacht, und man erhält

$$(3) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \frac{3+\varepsilon^2}{\varepsilon^3} \operatorname{arctan} \varepsilon - \frac{3}{\varepsilon^2}.$$

Wenn e und daher auch ε klein ist, so lässt sich dieser Ausdruck leicht berechnen mittels der Formel

$$(4) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \frac{4}{15}\varepsilon^2 - \frac{8}{35}\varepsilon^4 + \ldots,$$

deren erstes Glied genügt, wenn es sich um ein Sphäroid von so geringer Abplattung wie die Erde handelt.

Mittels dieser vereinfachten Formeln ist die nachstehende Tabelle berechnet worden. Die beiden letzten Columnen werden einige Paragraphen später erklärt werden.

i.	ii.	iii.	iv.	v.
e.	$\frac{1}{\varepsilon}$.	$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$.	$\frac{2\pi}{\omega}$, wenn $\varrho = 3{\cdot}68 \times 10^{-7}$	$(1+\varepsilon^2)^{2/3} \frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$.
0·1	9·950	0·0027	79,966	0·0027
2	4·899	0107	39,397	0110
3	3·180	0243	26,495	0258
4	2·291	0436	19,780	0490
5	1·732	0690	15,730	0836
6	1·333	1007	13,022	1356
7	1·020	1387	11,096	2172
8	0·750	1816	9,697	3588
9	4843	2203	8,804	6665
91	4556	2225	8,759	7198
92	4260	2241	8,729	7813
93	3952	2247	8,718	8533
94	3629	2239	8,732	9393
95	3287	2213	8,783	1·045
96	2917	2160	8,891	1·179
97	2506	2063	9,098	1·359
98	2030	1890	9,504	1·627
99	1425	1551	10,490	2·113
1·00	0·0000	0·0000	∞	∞

Wir sehen daraus, dass der Werth von $\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$ allmälig von Null zu einem Maximalwerthe zunimmt, wenn die Excentricität e von Null



bis ungefähr 0·93 wächst; darauf nimmt der Werth von $\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$ wieder bis Null ab (und zwar schneller, als er vorher gewachsen war), wenn die Excentricität von 0·93 bis 1 zunimmt. Die diesem Maximum entsprechenden Werthe der übrigen Grössen sind in der Tabelle gegeben.

773. Wenn die Winkelgeschwindigkeit den aus der Formel

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = 0{\cdot}2247, \tag{5}$$

in welcher für ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit zu substituiren ist, berechneten Werth übertrifft, so ist das Gleichgewicht in der Form eines Rotationsellipsoids unmöglich. Wenn die Winkelgeschwindigkeit kleiner als der so berechnete Grenzwerth ist, so gibt es immer zwei Rotationsellipsoide, welche den Bedingungen des Gleichgewichts genügen. In dem einen dieser Ellipsoide ist die Excentricität grösser, in dem andern kleiner als 0·93.

774. Mittlere Dichtigkeit der Erde, ausgedrückt in Attractionseinheiten. — Für besondere Anwendungen kann es von Nutzen sein, kurz anzugeben, wie ϱ in diesen Formeln gemessen wird. In den Definitionen der §§ 459, 460, auf welche die Formeln über die Attraction basirt sind, wird die Masseneinheit als die Masse definirt, welche auf eine in der Entfernung Eins befindliche gleich grosse Masse die Einheit der Kraft ausübt, und die Einheit der Dichtigkeit im Raum ist die Dichtigkeit eines Körpers, welcher in der Einheit des Volumens die Masse Eins hat. Wenn wir also den (engl.) Fuss als Längeneinheit annehmen, so erhalten wir für die Attraction, welche die Erde auf einen an ihrer Oberfläche befindlichen Massenpunkt Eins ausübt,

$$\frac{{}^4/_3\,\pi\,\sigma\,R^3}{R^2} = {}^4/_3\,\pi\,\sigma\,R = 32{\cdot}2;$$

darin bezeichnet R den in (engl.) Fuss ausgedrückten Erdradius [die Erde wird als Kugel angesehen] und σ die durch die eben definirte Einheit ausgedrückte mittlere Dichtigkeit der Erde.

Wird 20,900,000 (engl.) Fuss als der Werth von R angenommen, so ergibt sich

$$\sigma = 0{\cdot}000000368 = 3{\cdot}68 \times 10^{-7}. \tag{6}$$

Da die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr 5·5 mal so gross als

die des Wassers ist (§ 479), so ist die Dichtigkeit des Wassers, ausgedrückt durch unsere jetzige Einheit,

$$\frac{3{\cdot}68}{5{\cdot}5}\,10^{-7} = 6{\cdot}7 \times 10^{-8}.$$

775. Rotationsdauer eines Sphäroids von gegebener Excentricität. — Die vierte Columne der obigen Tabelle gibt die jedem Werthe der Excentricität entsprechende Rotationsdauer in Secunden an; es ist dabei ϱ gleich der mittleren Dichtigkeit der Erde angenommen. Für eine Wassermasse müssen diese Zahlen mit $\sqrt{5{\cdot}5}$ multiplicirt werden, da die Rotationsdauer, wenn dieselbe Figur entstehen soll, der Quadratwurzel der Dichtigkeit umgekehrt proportional sein muss.

Für eine homogene flüssige Masse von der mittleren Dichtigkeit der Erde, welche in $23^h\ 56^m\ 4^s$ eine Rotation vollendet, erhalten wir $e = 0{\cdot}093$, was ungefähr einer Ellipticität $\frac{1}{230}$ entspricht.

776. Die Masse und das Moment der Bewegungsgrösse einer Flüssigkeit sind gegeben. — Eine gleichfalls von Laplace behandelte interessante Form dieses Problems ist die, in welcher das Moment der Bewegungsgrösse und die Masse der Flüssigkeit, nicht aber die Winkelgeschwindigkeit gegeben sind und die Excentricität des entsprechenden Rotationsellipsoids ermittelt werden soll, welches, wie sich ergibt, eindeutig bestimmt ist.

Es leuchtet ein, dass eine in irgend einem Bewegungszustande sich selbst überlassene Masse einer gewöhnlichen Flüssigkeit (nicht nur eine vollkommene Flüssigkeit, § 742) das Moment ihrer Bewegungsgrösse (§ 235) unverändert bewahren muss. Aber die Zähigkeit oder die innere Reibung (§ 742) wird, wenn die Masse continuirlich bleibt, zuletzt jede relative Bewegung der Theilchen gegen einander zerstören, so dass die Flüssigkeit zuletzt wie ein starrer fester Körper rotirt. Wenn die Endform ein Rotationsellipsoid ist, so können wir leicht zeigen, dass die Excentricität desselben einen einzigen bestimmten Werth hat. Da aber bisher noch nicht entdeckt worden ist, ob es nicht noch eine andere mit einem stabilen Gleichgewicht verträgliche Form gibt, so wissen wir nicht, dass die Masse nothwendig die Form dieses besonderen Ellipsoids annimmt. Ebensowenig wissen wir sogar, ob das Rotationsellipsoid nicht vielleicht eine instabile Form wird, wenn das Moment der

Bewegungsgrösse eine von der Masse der Flüssigkeit abhängige Grenze überschreitet. Wir werden im zweiten Bande zu diesem Gegenstande zurückkehren, da er ein vortreffliches Beispiel der schwierigen und grosse Vorsicht erfordernden Frage nach der **kinetischen Stabilität** (§ 346) liefert.

Wenn wir mit a den äquatorialen Halbmesser, mit e die Excentricität des Ellipsoids und mit ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnen, mit welcher dasselbe rotirt, so sind die gegebenen Grössen die Masse

$$M = \frac{4}{3}\pi\varrho a^3 \sqrt{1 - e^2}$$

und das Moment der Bewegungsgrösse

$$A = \frac{8}{15}\pi\varrho\omega a^5 \sqrt{1 - e^2}\,.$$

In Verbindung mit (2) bestimmen diese Gleichungen die drei Grössen a, e und ω.

Wird aus den beiden letzten Gleichungen a eliminirt und wie oben e durch ε ausgedrückt, so erhalten wir

$$\frac{A^2}{M^{10/3}} = \frac{3}{25}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \frac{\omega^2(1 + \varepsilon^2)^{2/3}}{(\pi\varrho)^{4/3}}\,.$$

Dies liefert

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \frac{k}{(1 + \varepsilon^2)^{2/3}},$$

wo k ein bestimmtes Vielfache von $\varrho^{1/3}$ ist. Durch Einsetzung dieses Werthes in § 772 (3) erhält man

$$k = (1 + \varepsilon^2)^{2/3}\left(\frac{3 + \varepsilon^2}{\varepsilon^3}\,arctan\,\varepsilon - \frac{3}{\varepsilon^2}\right).$$

Nun zeigt die letzte Columne der Tabelle des § 772, dass der Werth dieser Function von ε (welche zugleich mit ε verschwindet) beständig mit ε zunimmt und unendlich gross wird, wenn ε unendlich gross wird. Es gibt folglich immer einen und nur einen Werth von ε und daher auch von e, welcher den Bedingungen des Problems genügt.

777. Alle obigen Resultate hätten wir ohne grosse Mühe durch eine Discussion der Gleichungen analytisch herleiten können; wir haben aber dieses Mal vorgezogen, an einem realen Falle zu zeigen, dass die numerische Berechnung zuweilen von grossem Nutzen sein kann.

778. Gleichgewichts-Ellipsoid mit drei ungleichen Axen. — Noch Niemand scheint versucht zu haben, das allgemeine Problem zu lösen: Alle Gleichgewichtsformen zu ermitteln, welche eine homogene unzusammendrückbare Flüssigkeitsmasse, die mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit rotirt, annehmen kann. Wofern nicht die Geschwindigkeit so klein ist, dass die Gestalt, welche die Flüssigkeit annimmt, sich nur wenig von einer Kugel unterscheidet (welcher Fall später sorgfältig behandelt werden soll), bietet das Problem ganz ungemeine Schwierigkeiten dar. Es ist deshalb von einiger Wichtigkeit, durch ein synthetisches Verfahren zu zeigen, dass ausser dem Rotationsellipsoid noch eine andere Form, nämlich ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen, von denen die kleinste die Axe der Rotation ist, mit dem Gleichgewicht verträglich ist. Dieser merkwürdige Satz ist 1834 von Jacobi entdeckt worden und scheint von demselben, so einfach er ist, als eine Herausforderung an die französischen Mathematiker*) ausgesprochen zu sein. Der Beweis, den wir folgen lassen, stimmt im Wesentlichen mit dem von Archibald Smith**) gegebenen überein.

Nach § 522 sind die Componenten der Attraction eines homogenen Ellipsoides mit den Halbaxen a, b, c auf einen Punkt ξ, η, ζ seiner Oberfläche

$$\frac{3}{2} M\xi \int_0^\infty \frac{d\psi}{(a^2+\psi)\sqrt{(a^2+\psi)(b^2+\psi)(c^2+\psi)}}, \text{ u. s. w.};$$

wir wollen dieselben für jetzt $A\xi$, $B\eta$, $C\zeta$ nennen.

Wenn das Ellipsoid mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe der ζ rotirt, so sind die Componenten der Centrifugalkraft

$$\omega^2\xi,\ \omega^2\eta,\ 0.$$

Folglich sind die Componenten der aus der Schwere und der Centrifugalkraft für den in ξ, η, ζ befindlichen Massenpunkt resultirenden Gesammtkraft

$$(A-\omega^2)\xi,\ (B-\omega^2)\eta,\ C\zeta.$$

Es sind aber die Richtungscosinus der im Punkte ξ, η, ζ an die Oberfläche des Ellipsoides gelegten Normale den Grössen

$$\frac{\xi}{a^2},\ \frac{\eta}{b^2},\ \frac{\zeta}{c^2}$$

proportional, und im Falle des Gleichgewichts muss die resultirende Kraft zur freien Oberfläche senkrecht sein. Mithin ist

---

*) Siehe eine Note von Liouville, *Journal de l'École Polytechnique*, cahier XXIII, Anmerkung zu p. 290.

**) *Cambridge Math. Journal*, Feb. 1838.

(1) $$a^2(A - \omega^2) = b^2(B - \omega^2) = c^2 C.$$

Diese Gleichungen liefern

(2) $$\omega^2 = \frac{a^2 A - c^2 C}{a^2} = \frac{b^2 B - c^2 C}{b^2}.$$

Wir haben nun erstens zu zeigen, dass sich für beliebig gegebene Werthe von a und b ein Werth von c angeben lässt, welcher diese Werthe von ω^2 gleich macht. Dann muss gezeigt werden, dass der so gefundene Werth von ω^2 positiv ist, also einen reellen Werth von ω liefert. Setzen wir, wie in § 522,

(3) $$\Phi = \int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{(a^2+\psi)(b^2+\psi)(c^2+\psi)}},$$

so erhalten wir

(4) $$A = -\frac{3}{2} M \frac{d\Phi}{d(a^2)},\ B = -\frac{3}{2} M \frac{d\Phi}{d(b^2)},\ C = -\frac{3}{2} M \frac{d\Phi}{d(c^2)}.$$

Werden diese Werthe in (2) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{d\Phi}{d(a^2)} - \frac{d\Phi}{d(b^2)} = c^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\frac{d\Phi}{d(c^2)},$$

oder

(5) $$0 = (a^2 - b^2)\int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{(a^2+\psi)(b^2+\psi)(c^2+\psi)}} \left\{-\frac{1}{(a^2+\psi)(b^2+\psi)} + \frac{c^2}{a^2 b^2}\frac{1}{c^2+\psi}\right\}.$$

$a^2 = b^2$ liefert das schon behandelte Rotationsellipsoid. Die Gleichung kann aber auch befriedigt werden, ohne dass man $a^2 = b^2$ annimmt; denn der eingeklammerte Factor unter dem Integralzeichen kann in der Form

$$\frac{(c^2 a^2 + c^2 b^2 - a^2 b^2)\psi + c^2\psi^2}{a^2 b^2 (a^2+\psi)(b^2+\psi)(c^2+\psi)}$$

geschrieben werden, und in diesem Ausdruck kann nur der Zähler sein Vorzeichen ändern. Wenn nun c grösser als die grösste der beiden Zahlen a und b ist, so ist das Integral positiv; wenn c sehr klein ist, so ist dasselbe offenbar negativ. Man kann also dadurch, dass man c einen passenden Werth gibt, für ganz beliebige endliche Werthe von a und b bewirken, dass das Integral gleich Null werde. Bei diesem Werthe von c enthält das Integral einen gleichen Betrag an positiven und negativen Elementen. Dasselbe kann aber keine negativen Elemente enthalten, ausser wenn $c^2 a^2 + c^2 b^2 - a^2 b^2$ negativ, d. h. c kleiner als die kleinste der Grössen a, b ist.

Endlich erhält man aus (2) und (4)

$$\omega^2 = \frac{3}{2}\frac{M}{a^2}\left\{c^2 \frac{d\Phi}{d(c^2)} - a^2 \frac{d\Phi}{d(a^2)}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{M}{a^2}\int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{(a^2+\psi)(b^2+\psi)(c^2+\psi)}} \frac{(a^2-c^2)\psi}{(a^2+\psi)(c^2+\psi)};$$

da, wie wir gezeigt haben, c kleiner als a ist, so ist dieser Ausdruck positiv; derselbe liefert, wenn c aus (5) bestimmt worden ist, die gesuchte Winkelgeschwindigkeit.

779. Excurs über harmonische Kugelfunctionen. Das harmonische Sphäroid. — Einige erläuternde Worte und graphische Illustrationen der Natur der harmonischen Flächenfunctionen werden zum Verständniss nicht nur des Potentials und der hydrostatischen Anwendungen der Laplace'schen Entwicklung, die uns alsbald beschäftigen wird, sondern auch der viel wichtigeren Anwendungen beitragen, die im zweiten Bande bei der Behandlung der Wellen und der Vibrationen in kugelförmigen Flüssigkeiten oder elastischen festen Massen zu machen sind. Um Umschreibungen zu vermeiden, werden wir mit dem Ausdruck „harmonisches Sphäroid" eine Fläche bezeichnen, deren Radius sich in jedem Punkte von dem einer Kugel durch eine unendlich kleine Länge unterscheidet, welche wie der Werth einer harmonischen Flächenfunction der Lage dieses Punktes auf der Kugelfläche variirt. Die Definitionen der räumlichen harmonischen Kugelfunctionen und der harmonischen Flächenfunctionen [Zusatz B (a), (b), (c)] zeigen, dass das harmonische Sphäroid zweiter Ordnung eine Oberfläche zweiten Grades ist, welche nur der Bedingung unterworfen ist, annähernd kugelförmig zu sein, d. h. dasselbe kann ein beliebiges elliptisches Sphäroid (oder Ellipsoid mit annähernd gleichen Axen) sein. Allgemein ist ein harmonisches Sphäroid von einer beliebigen Ordnung $n > 2$ eine Oberfläche vom algebraischen Grade n, welche annähernd kugelförmig, aber auch noch anderen Beschränkungen unterworfen ist.

Es sei S_n eine harmonische Flächenfunction $n$ter Ordnung, in welcher der Coefficient des Hauptgliedes so gewählt ist, dass das grösste Maximum der Function den Werth Eins habe. Ist dann a der Radius der mittleren Kugel und c die grösste Abweichung von demselben, so ist die Polargleichung eines harmonischen Sphäroids $n$ter Ordnung

$$(1) \qquad r = a + c\,S_n,$$

wenn S_n als eine Function der polaren Winkel-Coordinaten ϑ, φ angesehen wird. Wenn wir berücksichtigen, dass $\frac{c}{a}$ unendlich klein ist, so können wir diese Gleichung auf eine Gleichung $n$ten Grades in rechtwinkligen

Coordinaten reduciren, und zwar auf folgende Weise: — Wird jedes Glied von (1) aufs Quadrat erhoben und $\frac{c}{a}$ durch die um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung davon verschiedene Grösse $\frac{c\,r^n}{a^{n+1}}$ ersetzt, so erhalten wir

$$(2) \qquad r^2 = a^2 + \frac{2c}{a^{n-1}} \cdot r^n S_n.$$

Diese Gleichung, auf rechtwinklige Coordinaten reducirt, ist vom algebraischen Grade n.

780. Harmonischer Knotenkegel und Knotenlinie. — Die Verbindungslinie der Punkte des harmonischen Sphäroids, welche auf der mittleren Kugelfläche liegen, heisst die Knotenlinie des harmonischen Sphäroids. Es ist dies die Linie, in welcher die Kugelfläche von dem harmonischen Knotenkegel — einem bestimmten Kegel, dessen Scheitel im Mittelpunkt der Kugel liegt, und dessen algebraischer Grad gleich der Ordnung der harmonischen Function ist — geschnitten wird. Eine wichtige Eigenschaft der harmonischen Knotenlinie, zu welcher ein von Rankine*) gefundener interessanter hydrodynamischer Satz geführt hat, besteht darin, dass, wenn diese Linie in einem oder in mehreren Punkten sich selbst schneidet, ihre verschiedenen Zweige um jeden Schnittpunkt herum gleiche Winkel mit einander bilden.

Wenn wir die Function $r^n S_n$ des § 779 mit V_n bezeichnen, so erhalten wir als Gleichung der harmonischen Knotenlinie

$$(3) \qquad V_n = 0.$$

Da [Zusatz B (a)] V_n eine homogene Function $n$ten Grades ist, so können wir

$$(4) \qquad V_n = H_0 z^n + H_1 z^{n-1} + H_2 z^{n-2} + H_3 z^{n-3} + \text{u. s. w.}$$

schreiben, wo H_0 eine Constante ist, während H_1, H_2, H_3, u. s. w. ganze homogene Functionen von x, y bezeichnen, deren Grade beziehungsweise 1, 2, 3, u. s. w. sind. Dann liefert die Bedingung $\nabla^2 V_n = 0$ [Zusatz B (a)]

$$(5) \qquad \begin{cases} \nabla^2 H_2 + n(n-1) H_0 = 0, \ \nabla^2 H_3 + (n-1)(n-2) H_1 = 0, \\ \qquad \nabla^2 H_s + (n-s+2)(n-s+1) H_{s-2} = 0, \end{cases}$$

wodurch alle Bedingungen ausgedrückt sind, denen H_0, H_1, H_2, u. s. w. genügen müssen.

Nun wollen wir voraussetzen, der Knotenkegel schnitte sich selbst, und der Kürze und Einfachheit wegen möge OZ längs einer Schnittlinie

*) „Summary of the Properties of certain Stream-Lines." Phil. Mag., Oct. 1864.

angenommen werden; dann macht die Annahme $z = a$ die Gleichung (3) zur Gleichung einer Curve, welche in der in einem Doppelpunkte oder vielfachen Punkte der Knotenlinie an die Kugelfläche gelegten Tangentialebene liegt und zwei oder alle Zweige der Knotenlinie in diesem Punkte berührt. Die Bedingung, dass die Curve in der Tangentialebene einen mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfallenden Doppelpunkt oder vielfachen Punkt habe, ist, wenn (4) für V_n gesetzt wird,

$$H_0 = 0 \text{ und, für alle Werthe von } x,\ y,\ H_1 = 0.$$

Folglich liefert (5)

$$\nabla^2 H_2 = 0,$$

so dass wir, wenn

$$H_2 = Ax^2 + By^2 + 2\,Cxy$$

ist,

$$A + B = 0$$

erhalten. Dies zeigt, dass die beiden Zweige einander unter rechten Winkeln schneiden.

Wenn der Anfangspunkt ein 3facher, oder ein $n$facher Punkt ist, so muss

$$H_0 = 0,\ H_1 = 0,\ \ldots,\ H_{n-1} = 0$$

sein, und (5) liefert

$$\nabla^2 H_n = 0.$$

Folglich ist [§ 707 (23)]

$$H_n = A\,\{(x + y\sqrt{-1})^n + (x - y\sqrt{-1})^n\} \\ + B\sqrt{-1}\,\{(x + y\sqrt{-1})^n - (x - y\sqrt{-1})^n\},$$

oder, wenn $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$ gesetzt wird,

$$H_n = 2\,\varrho^n (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi),$$

woraus ersichtlich ist, dass die n Zweige einander im Coordinatenanfangspunkt unter gleichen Winkeln schneiden.

781. Fälle, in welchen räumliche harmonische Functionen in Factoren zerlegbar sind. Zonale und sectoriale harmonische Functionen. — In sehr vielen Fällen kann der harmonische Knotenkegel aus anderen Kegeln niedrigerer Grade bestehen [V_n ist dann in Factoren zerlegbar]. So hat (es ist dies die einzige bisher ausgearbeitete Classe von Fällen) jede der $2n + 1$ harmonischen Elementarfunctionen [wie wir passend die durch (36) oder (37) des Zusatzes B ausgedrückten Functionen nennen können, wenn sie jede nur einen der $2n + 1$ Coefficienten A_s, B_s enthalten] Kreise der Kugelfläche zu Knotenlinien. Diese Kreise sind für jedes solche harmonische Element entweder (1) sämmtlich in parallelen Ebenen (wie Breitekreise auf einem Globus) und theilen die Kugelfläche in Zonen, in welchem Falle die harmonische Function eine zonale genannt wird; oder (2) sie liegen sämmtlich in Ebenen, die durch einen Durchmesser gehen (wie Meridiane auf einem Globus)

und theilen die Oberfläche in gleiche Sectoren, in welchem Falle die harmonische Function eine sectoriale genannt wird; oder (3) einige derselben liegen in parallelen Ebenen, während die übrigen in Ebenen liegen, die durch den zu den ersteren Ebenen senkrechten Durchmesser gehen, so dass sie die Oberfläche in rechteckige Vierseite und (in der Nähe der Pole) dreiseitige Segmente theilen. Solche Flächenstücke werden auf einem Globus durch parallele Breitenkreise und Meridiane begrenzt, die in gleichen Abständen von einander gelegt sind.

Wenn ein gegebener Durchmesser die Axe der Symmetrie ist, so gibt es für vollkommene harmonische Functionen [Zusatz B (c), (d)] nur eine zonale und zwei sectoriale harmonische Functionen jeder Ordnung. Die zonale ist bloss eine Function der Breite $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right.$, nach der Bezeichnung des Zusatzes B$\left.\right)$, nämlich der Ausdruck $\Theta_n^{(0)}$, den man erhält, wenn man in Zusatz B (38) $s = 0$ setzt. Die sectorialen Functionen $n$ter Ordnung, die man aus derselben Formel durch die Annahme $s = n$ erhält, sind

$$(1) \qquad \sin^n \vartheta \cos n\varphi, \quad \sin^n \vartheta \sin n\varphi.$$

Die allgemeine harmonische Elementarfunction $n$ter Ordnung, welche aus $\Theta_n^{(s)} \cos s\varphi$ und $\Theta_n^{(s)} \sin s\varphi$ des Zusatzes B (38) erhalten wird, wenn man s einen beliebigen zwischen 0 und n liegenden Werth beilegt, hat zu Knotenlinien $n - s$ Kreise in parallelen Ebenen und s grösste Kreise, welche einander in ihren Polen unter gleichen Winkeln schneiden. Längs des Aequators oder irgend eines Parallelkreises ist die Variation dieser Function vom Maximum zum Minimum eine einfach harmonische Function. Es lässt sich leicht beweisen (der mathematisch gebildete Leser möge dies selbst herleiten), dass für jede harmonische Elementarfunction hoher Ordnung, welche eine grosse Anzahl von Knotenlinien in parallelen Ebenen hat (d. h. für welche $n - s$ eine grosse Zahl ist), das Gesetz der Variation näherungsweise einfach harmonisch ist längs der einem der beiden Pole nicht zu nahe liegenden Strecken jedes Meridians, welche nur eine kleine Anzahl der parallelen Knotenkreise schneiden. Das Gesetz, nach welchem harmonische Elementarfunctionen hoher Ordnungen längs eines Meridians in der Nähe eines Poles variiren, wird im zweiten Bande bei der Betrachtung der Wasserwellen in einem Gefäss mit kreisförmigem Boden und der Vibrationen einer kreisförmigen gespannten Membran sorgfältig untersucht und erläutert werden.

782. Murphy's analytische Behandlung der zonalen harmonischen Function. — Die nachstehende einfache und schöne Untersuchung Murphy's*) über die zonale harmonische Function wird dem Freunde der Analysis willkommen sein; wir geben sie aber nur (§ 453), weil sie zu einer nützlichen Formel führt, und weil sich aus dieser letzteren Entwicklungen herleiten lassen, die von allen oben im Zusatz B enthaltenen verschieden sind.

„Prop. I.

„Eine rationale und ganze Function von gegebener Dimension „in Beziehung auf eine beliebige Veränderliche zu finden, welche so „beschaffen ist, dass, wenn man sie mit einer beliebigen rationalen „und ganzen Function niedrigerer Dimension multiplicirt, das „zwischen den Grenzen 0 und 1 genommene Integral des Products „immer verschwindet."

„Es sei $f(t)$ die gesuchte Function, die in Beziehung auf die Veränder„liche t von der νten Dimension ist; dann erfordert die aufgestellte Bedin„gung offenbar, dass jede der folgenden Gleichungen einzeln erfüllt sei:

(a) $\int f(t)\,dt = 0,\ \int f(t)\,.\,t\,dt = 0,\ \int f(t)\,.\,t^2\,dt = 0, \ldots\ldots, \int f(t)\,.\,t^{\nu-1}\,dt = 0,$

„darin wird jedes Integral zwischen den gegebenen Grenzen genommen."

„Es möge nun das unbestimmte Integral von $f(t)$, die untere Grenze „$t = 0$ angenommen, durch $f_1(t)$, das unbestimmte Integral von $f_1(t)$ für „dieselbe untere Grenze $t = 0$ durch $f_2(t)$ dargestellt werden, u. s. w.; „dadurch gelangen wir schliesslich zu einer Function $f_\nu(t)$, welche offenbar „von der Dimension 2ν ist. Dann liefert die Methode der partiellen Inte„gration allgemein

$$\int f(t)\,.\,t^x dt = t^x f_1(t) - x t^{x-1} f_2(t) + x(x-1) t^{x-2} f_3(t) - \text{u. s. w.}$$

„Setzen wir jetzt $t = 1$ und substituiren für x successive die Werthe „1, 2, 3, ... $(n - 1)$, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (a)

(b) $\qquad f_1(t) = 0,\ f_2(t) = 0,\ f_3(t) = 0, \ldots f_n(t) = 0.$

„Folglich verschwindet die Function $f_n(t)$, sowie ihre $(n - 1)$ ersten „Differentialquotienten sowohl für $t = 0$, als auch für $t = 1$, d. h. jede „der Grössen t^n und $(1 - t)^n$ ist ein Factor von $f_n(t)$, und da diese Func„tion von der Dimension $2n$ ist, so lässt sie keinen anderen Factor, mit „Ausnahme einer Constanten c, zu.

„Setzen wir $1 - t = t'$, so erhalten wir also

$$f_n(t) = c\,.\,(t\,t')^n,$$

„folglich

$$f(t) = c\,\frac{d^n(t\,t')^n}{d\,t^n}.$$

*) *Treatise on Electricity.* Cambridge, 1833.

„Zusatz. — Wenn wir annehmen, $f(t)$ sei nach steigenden Potenzen „von t geordnet und das erste Glied sei Eins, so erhalten wir offenbar

$$c = \frac{1}{1.2.3\ldots n};$$

„unter dieser Voraussetzung wollen wir die obige Grösse mit Q_n bezeichnen.

„Prop. II.

„Die in der vorhergehenden Aufgabe bestimmte Function Q_n „stimmt mit dem Coefficienten von e^n in der Entwicklung der Grösse

$$\{1 - 2e.(1 - 2t) + e^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

„überein.

„Es sei u eine Grösse, welche der Gleichung

$$\text{(c)} \qquad u = t + e.u\,(1 - u)$$

„genügt, d. h.

$$u = -\frac{1-e}{2e} + \frac{1}{2e}\left\{1 - 2e\,(1 - 2t) + e^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

„folglich

$$\frac{du}{dt} = \left\{1 - 2e\,(1 - 2t) + e^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

„Wenn wir aber, wie vorher, t' für $1 - t$ schreiben und den Lagrange'- „schen Satz auf die Gleichung (c) anwenden, so erhalten wir

$$u = t + e.tt' + \frac{e^2}{1.2}\frac{d(tt')^2}{dt} + \frac{e^3}{1.2.3}\frac{d^2(tt')^3}{dt^2} + \text{u. s. w.}$$

„Wird dieser Ausdruck differentiirt und $\frac{d^n(tt')^n}{dt^n}$ durch seinen in Prop. I „erhaltenen Werth $1.2.3\ldots n\,Q_n$ ersetzt, so folgt

$$\frac{du}{dt} = 1 + Q_1 e + Q_2 e^2 + Q_3 e^3 + \text{u. s. w.}$$

„Der Vergleich dieses Resultats mit dem obigen Werthe von $\frac{du}{dt}$ lehrt die „Richtigkeit des vorliegenden Satzes.

„Prop. V.

„Die Function Q_n in eine Reihe zu entwickeln.

„*Erste Entwicklung.* — Nach Prop. I haben wir

$$Q_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n(tt')^n}{dt^n},$$

„folglich ist

$$Q_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n}{dt^n}\left\{t^n - n\,t^{n+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}t^{n+2} - \text{u. s. w.}\right\},$$

„d. h.

(e) $Q_n = 1 - \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{1} \cdot t + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} t^2 -$ u. s. w.

„*Zweite Entwicklung.* — Wenn u und v Functionen einer beliebigen „Veränderlichen t sind, so liefert der Leibnitz'sche Satz die Identität

$$\frac{d^n(uv)}{dt^n} = v\frac{d^n u}{dt^n} + n\frac{dv}{dt}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2 v}{dt^2}\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}} + \text{u. s. w.}$$

„Setzen wir hierin $u = t^n$, $v = t'^n$ und dividiren durch $1.2.3\ldots n$, so „erhalten wir

$$\text{(f)} \quad \begin{cases} Q_n = t'^n - \left(\frac{n}{1}\right)^2 t'^{n-1} t + \left\{\frac{n(n-1)}{1.2}\right\}^2 t'^{n-2} t^2 \\ \qquad - \left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right\}^2 t'^{n-3} t^3 + \text{u. s. w.} \end{cases}$$

„*Dritte Entwicklung.* — Wir setzen $1 - 2t = \mu$, folglich $tt' =$ „$\frac{1-\mu^2}{2^2}$; dann ist

$$Q_n = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^n(\mu^2-1)^n}{d\mu^n}$$

$$= \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{d^n}{d\mu^n} \cdot \left\{\mu^{2n} - n\mu^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \mu^{2n-4} - \text{u. s. w.}\right\},$$

„oder endlich

$$\text{(g)} \quad \begin{cases} Q_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \left\{\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cdot \mu^{n-2}\right. \\ \qquad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} \cdot \mu^{n-4} - \text{u. s. w.}\right\}.\text{“} \end{cases}$$

Den Zusammenhang zwischen den Grössen t, t' und μ der Murphy'schen Bezeichnung und der von uns oben benutzten Grösse ϑ drücken folgende Gleichungen aus: —

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} t = \left(2 \sin \frac{1}{2}\vartheta\right)^2, \; t' = \left(2 \cos \frac{1}{2}\vartheta\right)^2 \\ \mu = \cos \vartheta. \end{cases}$$

Auch ist es gut, sich aus Zusatz B (v'), (38), (40) und (42) ins Gedächtniss zurückzurufen, dass für $\vartheta = 0$ der Werth von Q_n [oder $\mathfrak{d}_n^{(0)}$ des Zusatzes B (60)] die Einheit ist, und dass Q_n mit der Grösse $\Theta_n^{(s)}$, womit wir hier die harmonischen Functionen-Elemente bezeichnen, in folgendem Zusammenhange steht: —

$$\text{(3)} \quad \mathfrak{d}_n^{(0)} = Q_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\,\Theta_n^{(0)},$$

was auch dadurch bewiesen werden kann, dass man (g) mit Zusatz B (38) vergleicht. Wir fügen noch die folgende Formel hinzu, welche aus (38) unmittelbar hervorgeht und zeigt, wie $\Theta_n^{(s)}$ sich aus $\Theta_n^{(0)}$ herleiten lässt, was schon deshalb von Nutzen ist, weil es beweist, dass die $n-s$ Wurzeln von $\Theta_n^{(s)} = 0$ sämmtlich reell und ungleich sind, insofern nach Zusatz B (p)

die n Wurzeln der Gleichung $\Theta_n^{(0)} = 0$ sämmtlich reell und ungleich sind: —

$$\frac{\Theta_n^{(s)}}{\sin\vartheta} = \frac{1}{n-s+1}\,\frac{d}{d\mu}\left[\frac{\Theta_n^{(s-1)}}{\sin^{s-1}\vartheta}\right]. \tag{4}$$

Hieraus und aus (3) erhalten wir

$$\Theta_n^{(s)} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-s)}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}\,\sin^s\vartheta\,\frac{d^s Q_n}{d\mu^s}. \tag{5}$$

Endlich mögen mit Bezug auf Zusatz B (w)

$$Q_n' \text{ und } Q_n\,[\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')]$$

das bezeichnen, was aus Q_n wird, wenn man $\cos\vartheta$ beziehungsweise durch $\cos\vartheta'$ und $\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')$ ersetzt, und es werde $\cos\vartheta$ mit μ, sowie $\cos\vartheta'$ mit μ' bezeichnet. Dann können wir nach dem Vorhergehenden die Formel (60) des Zusatzes B auf die folgende mit der von Murphy (*Electricity*, p. 24) gegebenen übereinstimmende passendere Form bringen: —

$$\left\{\begin{aligned} &Q_n[\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')] \\ &= Q_n Q_n' + 2\left\{\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{n(n+1)}\sin\vartheta\sin\vartheta'\frac{dQ_n}{d\mu}\frac{dQ_n'}{d\mu}\right. \\ &\left.+\frac{\cos 2(\varphi-\varphi')}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sin^2\vartheta\sin^2\vartheta'\frac{d^2Q_n}{d\mu^2}\frac{d^2Q_n'}{d\mu^2} + \text{u.s.w.}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

783. Physikalische Probleme, welche rechteckige oder kreisförmige ebene Platten betreffen. — In einem Grenzfalle der Theorie der harmonischen Kugelfunctionen werden die harmonischen Elementarfunctionen, sowohl bei Anwendung von Polarcoördinaten, wie von geradlinigen rechtwinkligen Coordinaten, die geeigneten harmonischen Functionen für die Behandlung von Problemen, in welchen wir statt einer Kugelfläche oder zweier concentrischen Kugelflächen eine Ebene oder zwei parallele Ebenen haben.

Es sei zunächst S_n eine beliebige harmonische Flächenfunction $n$ter Ordnung und V_n und V_{-n-1} die auf der Kugelfläche vom Radius a ihr gleichen räumlichen Functionen [Zusatz B (b)], so dass

$$V_n = \left(\frac{r}{a}\right)^n S_n \text{ und } V_{-n-1} = \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} S_n$$

ist. Nun ist (vergl. § 655)

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = e^{n\log\frac{r}{a}};$$

wenn also a unendlich gross und $r - a$ eine endliche Grösse ist, die wir mit x bezeichnen wollen, welche Annahme

$$\log\frac{r}{a} = \frac{x}{a}$$

liefert, und wenn n unendlich gross und $\frac{a}{n} = p$ ist, so erhalten wir

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = e^{\frac{n}{a}x}, \text{ und auf ähnliche Weise } \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} = e^{-\frac{n+1}{a}x} = e^{-\frac{x}{p}};$$

die räumlichen harmonischen Functionen werden dann

$$e^{\frac{x}{p}} S_n \text{ und } e^{-\frac{x}{p}} S_n.$$

Wenn wir jetzt voraussetzen, S_n sei eine elementare harmonische Function, und, wie Green in seinem berühmten Essay on Electricity that, eine um einen Pol liegende nahezu ebene Fläche oder auch ein von jedem Pol weit entfernt liegendes nahezu ebenes Flächenstück betrachten, so ist es interessant und lehrreich, zu untersuchen, wie die Formeln [Zusatz B (36) ... (40), (60), (64); und § 782 (e), (f), (g)] in die für ebene Polar- oder rechtwinklige Coordinaten geltenden Formeln übergehen. Wir können dies dem mathematisch gebildeten Leser überlassen. Im zweiten Bande wird die Lösung in ebenen Polarcoordinaten vollständig untersucht werden. Hier bemerken wir bloss, dass S_n, ausgedrückt in rechtwinkligen Flächencoordinaten (y, x), auf der in eine Ebene degenerirten Kugelfläche jede beliebige Function sein kann, welche der Gleichung

$$\frac{d^2 S_n}{d y^2} + \frac{d^2 S_n}{d z^2} + \frac{S_n}{p^2} = 0$$

genügt, und dass die Lösung in rechtwinkligen Coordinaten, in welche die elementare harmonische Function für nahezu ebene Theile der Kugelfläche, die von den Polen weit entfernt sind, übergeht,

$$S_n = \cos\frac{y}{q} \cos\frac{z}{q'}$$

ist, wo q und q' zwei Constanten bezeichnen, die der Bedingung

$$q^2 + q'^2 = p^2$$

genügen.

784. Beispiele elementarer harmonischer Functionen. — Die folgenden Tabellen und graphischen Darstellungen aller elementaren harmonischen Functionen der 6. und 7. Ordnung wird für das tiefere Verständniss des Gegenstandes von Nutzen sein.

$$Q_6 = \frac{1}{16}(231\mu^6 - 315\mu^4 + 105\mu^2 - 5) = \frac{231}{16}\Theta_6^{(0)}$$

$$\frac{1}{21}\cdot\frac{dQ_6}{d\mu} = \frac{1}{8}(33\mu^4 - 30\mu^2 + 5)\mu = \frac{33}{8}\Theta_6^{(1)}(1-\mu^2)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{210}\cdot\frac{d^2Q_6}{d\mu^2} = \frac{1}{16}(33\mu^4 - 18\mu^2 + 1) = \frac{33}{16}\Theta_6^{(2)}(1-\mu^2)^{-1}$$

$$\frac{1}{1260}\cdot\frac{d^3Q_6}{d\mu^3} = \frac{1}{8}(11\mu^2 - 3)\mu = \frac{11}{8}\Theta_6^{(3)}(1-\mu^2)^{-3/2}$$

$$\frac{1}{4725}\cdot\frac{d^4Q_6}{d\mu^4} = \frac{1}{10}(11\mu^2 - 1) = \frac{11}{10}\Theta_6^{(4)}(1-\mu^2)^{-2}$$

$$\frac{1}{10395}\cdot\frac{d^5Q_6}{d\mu^5} = \mu = \Theta_6^{(5)}(1-\mu^2)^{-5/2}$$

$$\frac{1}{10395}\cdot\frac{d^6Q_6}{d\mu^6} = 1 = \Theta_6^{(6)}(1-\mu^2)^{-3}$$ nicht angegeben.

$$Q_7 = \frac{1}{16}(429\mu^6 - 693\mu^4 + 315\mu^2 - 35)\,\mu = \frac{429}{16}\Theta_7^{(0)}.$$

$$\frac{1}{28}\cdot\frac{dQ_7}{d\mu} = \frac{1}{64}(429\mu^6 - 495\mu^4 + 135\mu^2 - 5) = \frac{429}{64}\Theta_7^{(1)}(1-\mu^2)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{378}\cdot\frac{d^2Q_7}{d\mu^2} = \frac{1}{48}(143\mu^4 - 110\mu^2 + 15)\mu = \frac{143}{48}\Theta_7^{(2)}(1-\mu^2)^{-1}$$

$$\frac{1}{3150}\cdot\frac{d^3Q_7}{d\mu^3} = \frac{1}{80}(143\mu^4 - 66\mu^2 + 3) = \frac{143}{80}\Theta_7^{(3)}(1-\mu^2)^{-3/2}$$

$$\frac{1}{17325}\cdot\frac{d^4Q_7}{d\mu^4} = \frac{1}{10}(13\mu^2 - 3)\mu = \frac{13}{10}\Theta_7^{(4)}(1-\mu^2)^{-2}$$

$$\frac{1}{62370}\cdot\frac{d^5Q_7}{d\mu^5} = \frac{1}{12}(13\mu^2 - 1) = \frac{13}{12}\Theta_7^{(5)}(1-\mu^2)^{-5/2}$$

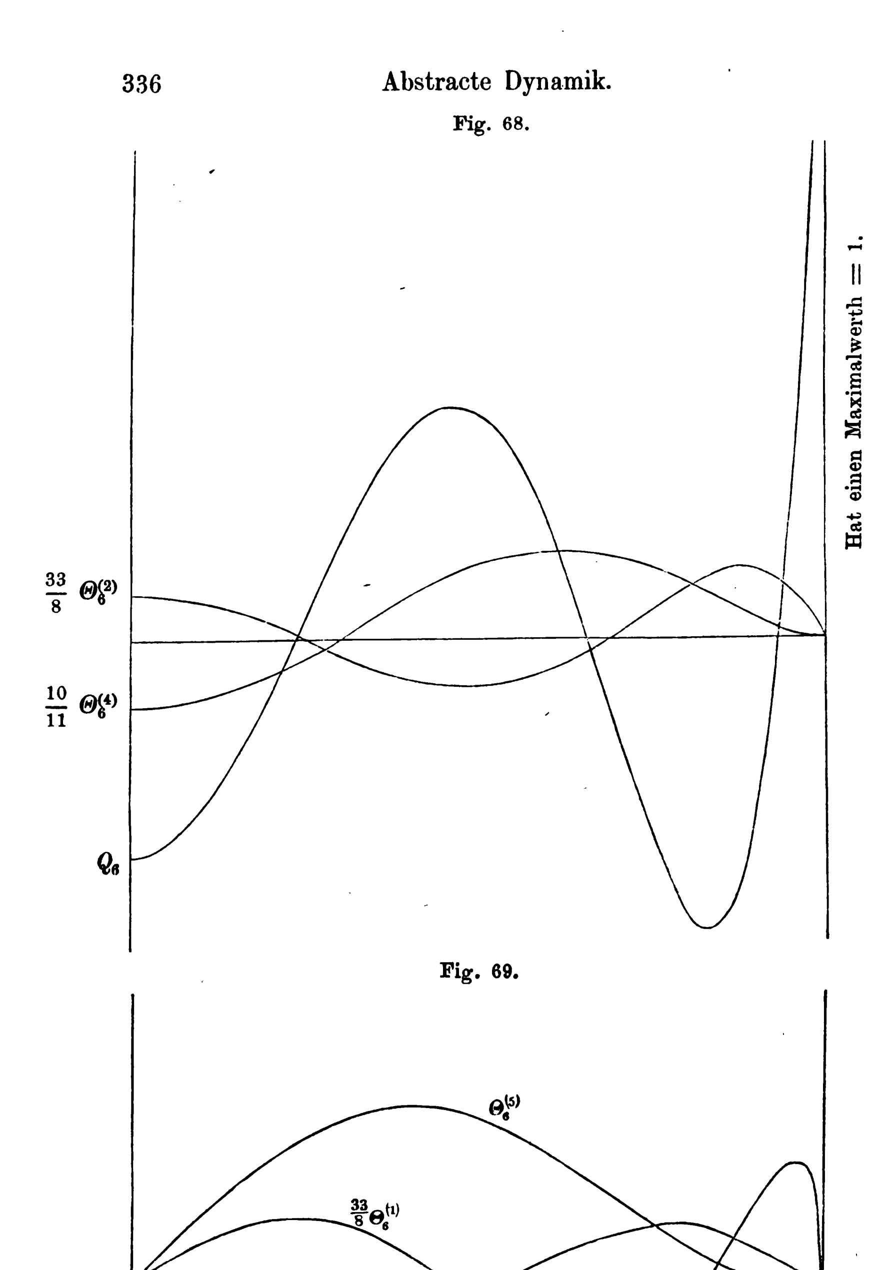
$$\frac{1}{135135}\cdot\frac{d^6Q_7}{d\mu^6} = \mu = \Theta_7^{(6)}(1-\mu^2)^{-3}$$

$$\frac{1}{135135}\cdot\frac{d^7Q_7}{d\mu^7} = 1 = \Theta_7^{(7)}(1-\mu^2)^{-7/2}$$ nicht angegeben.

μ.	Q_6.	$\frac{1}{21}\frac{dQ_6}{d\mu}$	$\frac{33}{8}\Theta_6^{(1)}$.	$\frac{1}{210}\frac{d^2Q_6}{d\mu^2}$.	$\frac{33}{16}\Theta_6^{(2)}$.
·0	— ·3125	·0000	·0000	+ ·0625	+ ·0625
·01	— ·3118	......	......	......	......
·05	— ·2961	+ ·0308	+ ·0307	+ ·0597	+ ·0595
·08	— ·2738	......	......	......	......
·10	— ·2488	+ ·0588	+ ·0585	+ ·0515	+ ·0510
·13	— ·2072	......	......	......	......
·15	— ·1746	+ ·0814	+ ·0805	+ ·0382	+ ·0373
·17	— ·1390	......	......	......	......
·2	— ·0806	+ ·0963	+ ·0944	+ ·0208	+ ·0200
·24	+ ·0029	......	......	......	......
·25	+ ·0243	+ ·1017	+ ·0984	+ ·0002	+ ·0002
·2506	......	......	......	·0000	·0000
·3	+ ·1293	+ ·0966	+ ·0921	— ·0221	— ·0201
·34	+ ·2053	......	......	......	......
·35	+ ·2225	+ ·0796	+ ·0745	— ·0441	— ·0387
·36	+ ·2388	......	......	......	......
·4	+ ·2926	+ 0·522	+ ·0479	— ·0647	— ·0544
·43	+ ·3191	......	......	......	......
·45	......	+ ·0157	+ ·0140	— ·0807	— ·0644
·46	+ ·3314	......	......	......	......
·4688	......	·0000	·0000	......	......
·469	+ ·3321	......	......	......	......
·5	+ ·3233	— ·0273	— ·0237	— ·0898	— ·0674
·54	+ ·2844	......	......	......	......
·55	......	— ·0726	— ·0606	— ·0891	— ·0622
·56	+ ·2546	......	......	......	......
·6	+ ·1721	— ·1142	— ·0914	— ·0752	— ·0481
·63	+ ·0935	......	......	......	......
·65	......	— ·1450	— ·1102	— ·0446	— ·0258
·66	+ ·0038	......	......	......	......
·7	— ·1253	— ·1555	— ·1110	+ ·0064	+ ·0033
·74	— ·2517	......	......	......	......
·75	— ·2808	— ·1344	— ·0889	+ ·0823	+ ·0360
·76	— ·3087	......	......	......	......
·8	— ·3918	— ·0683	— ·0410	+ ·1873	+ ·0674
.82	— ·4119	......	......	......	......
·8302	— ·4147	·0000	·0000	......	......
·84	— ·4119	......	......	......	......
·85	— ·4030	+ ·0586	+ ·0308	+ ·3263	+ ·0905
·87	— ·3638	......	......	......	......
·90	— ·2412	+ ·2645	+ ·1153	+ ·5044	+ ·0958
·92	— ·1084	+ ·1764	+ ·1464	......	......
·93	......	+ ·4346	+ ·1597	......	......
·9325	·0000	......	......	......	......
·94	+ ·0751	+ ·5002	+ ·1706	......	......
·95	......	+ ·5704	+ ·1778	+ ·7271	+ ·0709
·96	+ ·3150	......	......	......	......
·97	......	+ ·7260	+ ·1764	......	......
·98	+ ·6203	+ ·8117	+ ·1615	+ ·8844	+ ·0350
·99	+ ·8003	+ ·9029	+ ·1274	+ ·9411	+ ·0187
1·00	+ 1·0000	+ 1·0000	·0000	+ 1·0000	+ ·0000

μ.	$\frac{1}{1260}\frac{d^3 Q_6}{d\mu^3}$.	$\frac{11}{8}\,\Theta_6^{(3)}$.	$\frac{1}{4725}\frac{d^4 Q_6}{d\mu^4}$.	$\frac{11}{10}\,\Theta_6^{(4)}$.	$\Theta_6^{(5)}$.
·0	·0000	·0000	— ·1000	— ·1000	·0000
·05	— ·0186	— ·0185	— ·0975	— ·0970	+ ·0497
·1	— ·0361	— ·0356	— ·0890	— ·0886	+ ·0975
·15	— ·0516	— ·0499	— ·0753	— ·0720	+ ·1417
·2	— ·0640	— ·0602	— ·0560	— ·0516	+ ·1806
·25	— ·0723	— ·0656	— ·0313	— ·0275	+ ·2127
·3	— ·0754	— ·0655	— ·0010	— ·0008	+ ·2370
·35	— ·0767	— ·0630	+ ·0348	+ ·0268	+ ·2524
·4	— ·0620	— ·0477	+ ·0760	+ ·0536	+ ·2586
·45	— ·0435	— ·0310	+ ·1227	+ ·0773	+ ·2555
·5	— ·0156	— ·0101	+ ·1750	+ ·0984	+ ·2436
·55	+ ·0225	+ ·0131	+ ·2327	+ ·1132	+ ·2234
·6	+ ·0720	+ ·0369	+ ·2960	+ ·1211	+ ·1966
·63	......	......	+ ·3366	+ ·1224	......
·65	+ ·1338	+ ·0587	+ ·3647	+ ·1204	+ ·1647
·7	+ ·2091	+ ·0750	+ ·4390	+ ·1139	+ ·1300
·75	+ ·2988	+ ·0865	+ ·5188	+ ·0991	+ ·0949
·8	+ ·4040	+ ·0873	+ ·6040	+ ·0783	+ ·0622
·83	......	......	+ ·6578	+ ·0637	......
·85	+ ·5257	+ ·0768	+ ·6947	+ ·0535	+ ·0344
·87	......	......	+ ·7326	+ ·0433	......
·89	......	......	+ ·7713	+ ·0333	......
·9	+ ·6649	+ ·0551	+ ·7910	+ ·0285	+ ·0150
·92	......	......	......	......	+ ·0085
·93	+ ·7572	+ ·0376	+ ·8514	+ ·0155	......
·95	+ ·8226	+ ·0249	+ ·8928	+ ·0084	+ ·0028
·96	+ ·8565	......	+ ·9138	......	......
·97	+ ·8911	+ ·0128	+ ·9350	+ ·0032	......
·98	+ ·9216	+ ·0073	+ ·9564	+ ·0015	......
·99	+ ·9629	......	+ ·9781	+ ·0004	......
1·00	+ 1·0000	·0000	+ 1·0000	·0000	·0000

Fig. 68.



$\frac{33}{8}\ \Theta_6^{(2)}$
$\frac{10}{11}\ \Theta_6^{(4)}$
Q_6
Hat einen Maximalwerth = 1.

Fig. 69.

$\Theta_6^{(5)}$
$\frac{33}{8}\Theta_6^{(1)}$
$\frac{11}{8}\Theta_6^{(3)}$

Fig. 70.

$\Theta_7^{(6)}$

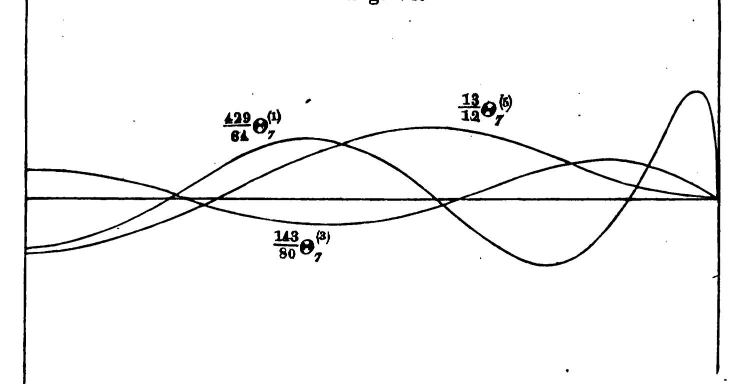
$\frac{143}{48}\Theta_7^{(2)}$

$\frac{13}{10}\Theta_7^{(4)}$

Q_7

hat einen Maximalwerth = 1.

Fig. 71.



μ.	Q_7.	$\frac{1}{28}\frac{dQ_7}{d\mu}$.	$\frac{429}{64}\Theta_7^{(1)}$.	$\frac{1}{278}\frac{d^2Q_7}{d\mu^2}$.	$\frac{143}{48}\Theta_7^{(2)}$.
·0	·0000	— ·0781	— ·0781	·0000	·0000
·05	— ·1069	— ·0720	— ·0719	+ ·0153	+ ·0153
·1	— ·1995	— ·0578	— ·0522	+ ·0290	+ ·0287
·15	— ·2649	— ·0345	— ·0341	+ ·0394	+ ·0385
·18	— ·2873	......	......	......	......
·2	— ·2935	— ·0057	— ·0056	+ ·0451	+ ·0433
·2093	......	·0000	·0000	......	......
·2261	......	......	......	+ ·0459	......
·23	— ·2905	......	......	......	......
·24	......	+ ·0190	......	......	......
·25	— ·2799	+ ·0251	+ ·0243	+ ·0452	+ ·0424
·3	— ·2240	+ ·0540	+ ·0515	+ ·0391	+ ·0356
·35	— ·1318	+ ·0765	+ ·0717	+ ·0268	+ ·0235
·38	— ·0635	......	......	......	......
·4	— ·0365	+ ·0888	+ ·0814	+ ·0084	+ ·0074
·42	+ ·0356	......	......	......	......
·4209	......	+ ·0901	......	·0000	·0000
·45	+ ·1106	+ ·0875	+ ·0782	— ·0132	— ·0105
·5	+ ·2231	+ ·0706	+ ·0611	— ·0371	— ·0278
·53	......	......	......	......	— ·0366
·55	+ ·3007	+ ·0378	+ ·0315	......	— ·0415
·57	+ ·3207	......	......	......	......
·58	......	......	......	......	— ·0415
·5917	+ ·3236	·0000	·0000	......	......
·6	+ ·3226	— ·0115	— ·0092	— ·0758	— 0·485
·62	+ ·3121	......	......	......	......
·6406	......	......	......	— ·0809	......
·65	+ ·2737	— ·0619	— ·0471	— ·0806	— ·0465
·7	+ ·1502	— ·1129	— ·0806	— ·0666	— ·0340
·7415	·0000	......	......	......	......
·75	— ·0342	— ·1458	— ·0964	— ·0254	— ·0111
·7694	......	— ·1490	......	......	......
·7695	......	......	......	·0000	·0000
·8	— ·2397	— ·1390	— ·0834	+ ·0529	+ ·0190
·82	— ·3134	......	......	......	......
·85	— ·3913	— ·0634	— 0·334	+ ·1801	+ ·0500
·86	— ·4054	......	......	......	......
·8717	— ·4117	·0000	·0000	......	......
·88	— ·4082	......	......	......	......
·9	— ·3678	+ ·1183	+ ·0515	+ ·3698	+ ·0723
·92	— ·2713	......	......	......	......
·93	......	......	......	+ ·5276	+ ·0712
·9491	·0000	......	......	......	......
·95	+ ·0112	+ ·4533	+ ·1413	+ ·6373	+ ·0621
·97	+ ·3165	+ ·6421	+ ·1563	+ ·7699	+ ·0455
·98	+ ·5115	+ ·7517	+ ·1458	......	......
·99	+ ·7384	+ ·8706	+ ·1230	+ ·9190	+ ·0184
1·00	+ 1·0000	+ 1·0000	·0000	+ 1·0000	·0000

μ.	$\frac{1}{3150}\frac{d^3 Q_7}{d\mu^3}$.	$\frac{143}{80}\Theta_7^{(3)}$.	$\frac{1}{17325}\frac{d^4 Q_7}{d\mu^4}$.	$\frac{13}{10}\Theta_7^{(4)}$.	$\frac{1}{62370}\frac{d^5 Q_7}{d\mu^5}$.	$\frac{13}{12}\Theta_7^{(5)}$.	$\Theta_7^{(6)}$.
·0	+ ·0375	+ ·0375	·0000	·0000	— ·0833	— ·0833	·0000
·05	+ ·0355	·0353	— ·0148	— ·0147	— ·0806	— ·0801	+ ·0496
·1	+ ·0294	·0290	— ·0287	— ·0281	— ·0725	— ·0707	+ ·0970
·15	+ ·0198	·0192	— ·0406	— ·0387	— ·0590	— ·0557	+ ·1401
·2	+ ·0074	·0068	— ·0496	— ·0457	— ·0400	— ·0361	+ ·1769
·2261	·0000	·0000	......	......	......	......	......
·25	— ·0071	— ·0064	— ·0544	— ·0478	— ·0156	— ·0133	+ ·2059
·2773	......	......	— ·0555	......	·0000	·0000	......
·3	— ·0225	— ·0195	— ·0549	— ·0454	+ ·0142	+ ·0112	+ ·2260
·35	— ·0367	— ·0302	— ·0493	— ·0378	+ ·0494	+ ·0356	+ ·2364
·4	— ·0487	— ·0375	— ·0368	— ·0260	+ ·0900	+ ·0582	+ ·2369
·45	— ·0563	— ·0400	— ·0165	— ·0104	+ ·1361	+ ·0773	+ ·2281
·4804	— ·0577	......	·0000	·0000	......	......	......
·5	— ·0570	— ·0370	+ ·0125	+ ·0070	+ ·1875	+ ·0913	+ ·2110
·55	— ·0485	— ·0282	+ ·0513	+ ·0248	+ ·2564	+ ·1041	+ ·1859
·6	— ·0278	— 0·142	+ ·0708	+ ·0412	+ ·3067	+ .1004	+ ·1573
·6406	·0000	·0000	......	......	......	......	......
·65	+ ·0080	+ ·0035	+ ·1620	+ ·0540	+ ·3744	+ ·0948	+ ·1252
·7	+ ·0624	+ ·0227	+ ·2359	+ ·0613	+ ·4475	+ ·0831	+ ·0928
·75	+ ·1390	+ ·3401	+ ·3234	+ ·0619	+ ·5260	+ ·0665	+ ·0627
·8	+ ·2417	+ ·0521	+ ·4256	+ ·0551	+ ·6100	+ ·0474	+ ·0373
·85	+ ·3745	+ ·0546	+ ·5434	+ ·0418	+ ·6994	+ ·0283	+ ·0181
·9	+ ·5420	+ ·0448	+ ·6777	+ ·0244	+ ·7942	+ ·0132	+ ·0065
·92	+ ·6197	+ .0373	+ ·7363	+ ·0170	......	......	+ ·0033
·95	+ ·7489	+ ·0227	+ ·8732	+ ·0083	+ ·8944	+ ·0026	+ ·0087
·97	+ ·8062	+ ·0116	+ ·9230	+ ·0032	......	......	+ ·0002
·98	+ ·9564	+ ·0076	......	......	......	......	......
·99	......	......	......	......	......	......	......
1·00	1·0000	·0000	+1·0000	·0000	+1·0000	·0000	·0000

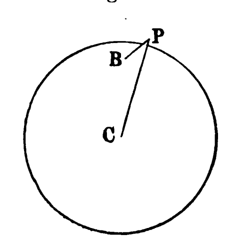
785. Excurs über die Theorie des Potentials. — Ein kurzer Excurs über die Theorie des Potentials und speciell über Flächen constanten Potentials, die nur wenig von concentrischen Kugeln verschieden sind, wird die hydrostatischen Beispiele, die wir folgen lassen, vereinfachen. Zunächst werden wir rein synthetisch einige Fälle behandeln, in denen bei gegebenen Massenvertheilungen die resultirenden Kräfte und die Niveauflächen (§ 487) bestimmt werden; darauf sollen gewisse Probleme der Green'schen und Gauss'schen Analysis folgen, in welchen entweder die Grössen der Kraft oder die Werthe des Potentials auf individuellen Flächen oder die Formen individueller Niveauflächen gegeben werden, und die Vertheilung der Kraft in einem zusammenhängenden leeren Raume bestimmt werden soll. Da wir jetzt diese Fragen hauptsächlich ihrer Anwendung auf die physische Geographie wegen herbeiziehen, so werden wir bei dieser Gelegenheit der Kürze wegen uns gleich auf die Erde beziehen, auch wenn irgend eine andere anziehende Masse mit annähernd kugelförmigen äusseren Flächen constanten Potentials unserem Zwecke ebenso gut entsprechen würde. Auch werden wir zuweilen von der „Meeresoberfläche“ (§§ 750, 754) sprechen, indem wir darunter bloss eine „Niveaufläche“ oder eine „Gleichgewichtsoberfläche“ (§ 487) verstehen, welche den festen Körper ganz oder mit Ausnahme verhältnissmässig kleiner Theile, wie sie unser trockenes Land ist, umschliesst. Eine solche Fläche wird natürlich eine Fläche constanten Potentials für die blosse Gravitation sein, wenn weder eine Rotation, noch eine aus der Anziehung anderer Körper, wie des Mondes und der Sonne, herrührende Störung und durch diese Kräfte für die Erde erzeugte „Aenderung der Bewegung“ vorhanden ist; aber auch trotz dieser Störungen kann jene Fläche immer eine Fläche constanten Potentials genannt werden, da, wie wir in § 793 sehen werden, sowohl die Centrifugalkraft, als auch die übrigen erwähnten Störungen sich durch Potentiale darstellen lassen.

786. Störung der Meeresoberfläche durch eine Masse, deren Dichtigkeit von der mittleren Dichtigkeit der Erde verschieden ist. — Um zu bestimmen, welchen Einfluss die Existenz von Felsen, deren Dichtigkeit grösser oder kleiner als die mittlere Dichtigkeit der Erde ist, in einem begrenzten unter der Oberfläche liegenden Raume auf die Meeresoberfläche hat, und um welchen Betrag dadurch die Schwerkraft in den anliegenden Theilen vermehrt oder vermindert wird, denken wir uns, eine Masse, welche nur einen sehr kleinen Bruchtheil $\frac{1}{n}$ der ganzen Erdmasse aus-

macht, sei irgendwo in einem unter der Oberfläche liegenden Punkte concentrirt, dessen Entfernung von der Oberfläche wir als klein im Vergleich zum Radius, aber gross im Vergleich zu $\frac{1}{\sqrt{n}}$ des Radius voraussetzen. Unmittelbar über dem Centrum der Störung wird sich die Meeresoberfläche in Folge der störenden Anziehung erheben, und zwar um eine Höhe, die sich zum Radius verhält, wie der Abstand des störenden Punktes von dem Hauptcentrum zur $n$fachen Tiefe desselben unter der so gestörten Meeresoberfläche. Die Zunahme der Schwerkraft in diesem Punkte der Meeresoberfläche wird derselbe Bruchtheil der ganzen Schwerkraft sein, der das $n$fache des Quadrats der Tiefe des anziehenden Punktes von dem Quadrat des Radius ist. Da wir uns auf Umstände, wie sie die Natur darbietet, beschränken wollen, so müssen wir diesen Bruch als sehr klein voraussetzen. Die Aenderung der Richtung der Schwerkraft wird für die Meeresoberfläche ein Maximum in den Punkten eines Kreises sein, welcher von A als Centrum mit $\frac{D}{\sqrt{2}}$ als Radius beschrieben wird, wo D die Tiefe des Mittelpunkts der Störung bezeichnet. Die Grösse dieser grössten Abweichung wird $\frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{a^2}{nD^2}$ der Winkeleinheit [57·296⁰ (§ 41)] betragen, wenn a den Erdradius bezeichnet.

Es sei C der Mittelpunkt der Hauptmasse $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, um deren Anziehung es sich handelt, und B der Mittelpunkt der störenden Masse $\left(\frac{1}{n}\right)$, und es werde vorausgesetzt, beide Massen wirkten so, als wären sie beziehungsweise in diesen beiden Punkten concentrirt. Ferner sei P irgend ein Punkt auf der Fläche constanten Potentials, für welche das Potential den Werth hat, den es auf einer Kugelfläche vom Radius a und dem Mittelpunkt C haben würde, wenn die ganze Masse in C vereinigt wäre. Dann ist (§ 491)

Fig. 72.



$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{CP} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{BP} = \frac{1}{a},$$

und dies ist die Gleichung der in Rede stehenden Fläche constanten Potentials. Sie liefert

$$CP - a = \frac{a}{nBP}(CP - BP).$$

Dies ist für jeden Punkt der exacte Ausdruck der positiven oder negativen Erhebung der gestörten Gleichgewichtsfläche über die ungestörte Fläche desselben Potentials. Für den über dem Centrum der Störung liegenden Punkt A erhält man daraus

$$CA - a = \frac{a}{nBA} \cdot CB,$$

was genau mit dem vorhergehenden Ausspruch übereinstimmt und beweist, dass derselbe, auf die Meeresoberfläche angewandt, approximativ richtig ist, wenn wir beachten, dass, wenn BP ein grosses Vielfache von BA ist, $CP - a$ vielmals kleiner als sein Werth in A sein wird. Wir überlassen den Beweis der übrigen Sätze dieses und der folgenden Paragraphen (§§ 787 ... 792) dem Leser als Uebungsaufgabe.

787. **Wirkung einer Masse, deren Dichtigkeit die mittlere übertrifft, auf die Niveaufläche, sowie auf die Richtung und Intensität der Schwerkraft.** — Wenn ϱ die allgemeine Dichtigkeit der Rinde und σ die mittlere Dichtigkeit der Erde ist, und wenn die § 786 angegebene Störung die Folge des Vorhandenseins einer Masse von einer anderen Dichtigkeit ϱ' ist, welche eine Kugel vom Radius b, deren Centrum sich in einer Tiefe D unter der Meeresoberfläche befindet, ganz ausfüllt, so wird n den Werth $\dfrac{\sigma a^3}{(\varrho' - \varrho) b^3}$ haben, und die Erhöhung der Meeresfläche, sowie die entsprechende Vergrösserung der Schwerkraft in dem gerade darüber befindlichen Punkte werden beziehungsweise folgende sein:

$$\frac{(\varrho' - \varrho) b^2}{\sigma a D} \cdot b \text{ und } \frac{(\varrho' - \varrho) b^3}{\sigma a D^2}.$$

Der wirkliche Werth von σ ist ungefähr doppelt so gross als der von ϱ. Wir wollen, um ein Beispiel zu geben, annehmen, es sei $D = b = 1000$ Fuss (engl.) oder $= \dfrac{1}{21000}$ des Erdradius und ϱ' entweder gleich 2ϱ oder gleich Null. Dann gehen die vorstehenden Resultate über in

$$\pm \frac{1}{42} \text{ Fuss und } \pm \frac{1}{42000} \text{ der Schwerkraft;}$$

dies ist also die Erhöhung oder Senkung der Meeresoberfläche, und die Vermehrung oder Verminderung der Schwerkraft, welche durch einen kugelförmigen Massentheil vom Durchmesser 2000 Fuss, dessen Centrum 1000 Fuss unter der Oberfläche liegt, und dessen Dichtigkeit entweder das Doppelte von derjenigen der Erde oder Null ist,



hervorgebracht werden. Die grösste Abweichung des Senkbleis erfolgt in den Punkten des Kreises, der mit dem Radius 707 Fuss um die Projection des Mittelpunktes der störenden Substanz auf die Oberfläche gezogen ist, und beläuft sich auf $\frac{1}{109000}$ der Winkeleinheit, oder nahezu auf $2''$.

788. Es verdient bemerkt zu werden, dass als Aequivalent gegen die aus der Attraction der störenden Masse herrührende Zunahme im Betrage der Schwerkraft, die wir für die benachbarten Punkte der Meeresoberfläche berechnet haben, nur eine unmerkliche Abnahme der Attraction der Hauptmasse stattfindet, die in der durch den störenden Einfluss erzeugten Vergrösserung des Abstandes der Meeresoberfläche vom Mittelpunkt der Hauptmasse ihren Grund hat. Dieselbe Bemerkung gilt offenbar für Störungen im Betrage der Schwerkraft, die von isolirten Bergen oder von Inseln von kleinen Dimensionen herrühren, und in § 794 werden wir beweisen, dass sie auch für Formabweichungen richtig ist, welche durch harmonische Functionen hoher Ordnungen dargestellt werden. Dagegen werden wir in § 789 sehen, dass es anders ist mit harmonischen Abweichungen niedriger Ordnungen, und folglich mit weit ausgedehnten Störungen, wie sie durch grosse Strecken hohen Landes oder tiefer See hervorgebracht werden. Wir beabsichtigen, zu diesem Gegenstande im zweiten Bande in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie zurückzukehren, wenn wir Gelegenheit haben werden, die durch Naturerscheinungen und Experimente gewonnenen Grundlagen unserer Kenntniss der Schwerkraft zu prüfen; wir werden dann die §§ 477 (b), (c), (d), 478, 479 und die Lösungen der übrigen verwandten Probleme dazu benutzen, die Wirkungen zu bestimmen, welche isolirte Berge, Gebirgsketten, grosse Tafelländer und entsprechende Senkungen, wie Seen oder begrenzte tiefe Stellen im Meere, grosse Thäler oder Klüfte, grosse Strecken tiefen Meeres auf die Grösse und Richtung der Schwere, wie auf die Niveauflächen haben.

789. **Harmonische Sphäroidalflächen.** — Alle Niveauflächen für ein harmonisches Sphäroid (§ 779) von homogener Masse sind harmonische Sphäroide von derselben Ordnung und Natur. Diejenige dieser Flächen, welche ebenso sehr innerhalb wie ausserhalb des festen Körpers liegt, schneidet die Umgrenzung des festen Körpers in einer Linie (oder Gruppe von Linien) — der mittleren

Niveaulinie der Oberfläche des festen Körpers. Diese Linie liegt auf der mittleren Kugelfläche und bildet daher (§ 780) die Knoten jeder der beiden Sphäroidflächen, welche einander in ihr schneiden. Wenn i die Ordnung der harmonischen Function ist, so beträgt die Abweichung des Niveausphäroids (§§ 545, 815) genau $\frac{3}{2i+1}$ von der Abweichung der sphäroidalen Oberfläche, jede Abweichung von der mittleren Kugelfläche aus gerechnet.

So fällt, wenn $i = 1$ ist, die Niveaufläche mit der Umgrenzung des festen Körpers zusammen: der Grund davon leuchtet ein, wenn man beachtet, dass eine jede sphärische harmonische Abweichung erster Ordnung von einer gegebenen Kugelfläche eine gleiche Kugelfläche um einen Mittelpunkt ausmacht, welcher eine gewisse unendlich kleine Entfernung von dem Mittelpunkt der gegebenen Oberfläche hat.

Wenn $i = 2$ ist, so weicht die Niveaufläche von der mittleren Kugel um $\frac{3}{5}$ der Abweichung der umgrenzenden Oberfläche ab. Dies ist der Fall einer ellipsoidalen Umgrenzung, welche unendlich wenig von einer Kugel verschieden ist. Wir bemerken, dass, wie sich leicht aus § 522 herleiten lässt, von den auf ein homogenes Ellipsoid bezüglichen Flächen constanten Potentials diejenigen, welche ganz innerhalb des Ellipsoides liegen, gleichfalls Ellipsoide sind; das ist aber nicht der Fall mit den Gleichgewichtsflächen, welche die Umgrenzung des Ellipsoides schneiden oder ganz ausserhalb derselben liegen; diese letzteren sind nur dann näherungsweise ellipsoidal, wenn die Abweichung von der Kugelgestalt sehr klein ist.

790. Harmonische Sphäroidflächen hoher Ordnungen. — Die Verhältnisse bei sehr hoher Ordnung werden zur Genüge erläutert, wenn wir unsere Aufmerksamkeit auf sectoriale harmonische Functionen beschränken (§ 781). Die Linie, in welcher ein sectoriales harmonisches Sphäroid von irgend einer zu seiner Polaraxe senkrechten Ebene geschnitten wird, ist [§ 781 (1)] gewissermassen eine harmonische Curve (§ 62), von einer kreisförmigen statt von einer geraden Abscissenlinie aus gezogen. Ihre Wellenlänge (oder die doppelte Strecke auf der Abscissenlinie von einem Null- oder Knotenpunkte zum nächstfolgenden) ist $\frac{1}{i}$ des Umfangs des Kreises. Wenn i sehr gross ist, so macht der Factor $\sin^i \vartheta$ die sectoriale harmonische Function sehr klein, ausgenommen für Werthe

von ϑ, welche wenig von einem rechten Winkel verschieden sind; daher besteht ein sectoriales harmonisches Sphäroid sehr hoher Ordnung aus einer Schaar paralleler Bergrücken und Thäler, die senkrecht zu einem grössten Kreise der Kugel sind, in dem Schnitt mit der Ebene dieses Kreises (oder des Aequators) eine nahezu einfach harmonische Form haben und deren Hebung und Senkung zu beiden Seiten derselben symmetrisch abnimmt, so dass sie beiderseits in einem grossen angularen Abstande von demselben (oder in grosser „Breite") unmerklich sind. Die Niveaufläche, welche die Attraction eines homogenen festen Körpers dieser Gestalt liefert, ist eine Figur derselben Art, aber von einem viel geringeren Grade der Erhöhungen und Senkungen, d. h., wie wir gesehen haben, nur $\frac{3}{2i+1}$ derjenigen der Figur, oder näherungsweise das Dreifache des Bruchtheils der Ungleichheiten der Figur, welches die halbe Wellenlänge vom Umfang der Kugel ist. Man sieht leicht, dass, wenn i sehr gross ist, die Niveaufläche an jeder Stelle durch die Ungleichheiten in den entfernteren Theilen der Figur keine merkliche Einwirkung erleidet.

791. Wellenförmige Gestalt der Niveaufläche, hervorgerufen durch parallele Bergrücken und Thäler. — Wir schliessen daraus Folgendes: — Wenn die Substanz der Erde homogen wäre, so würde eine Reihe paralleler Bergketten und Thäler eine entsprechende näherungsweise wellenförmige Gestalt der Niveaufläche in dem mittleren District erzeugen; die Höhe, zu welcher sich dieselbe unter jeden Bergkamm erhebt, oder sich unter die Höhe der ungestörten Niveaufläche über der Mitte eines Thales hinabsenkt, ist das Dreifache desselben Bruchtheils der Höhe des Berges über das mittlere Niveau oder der Tiefe des Thales unter dasselbe, welches die Breite des Berges oder Thales von dem Umfang der Erde ist.

792. Wenn die Kugel nicht homogen ist, so ist die Störung in der Grösse und Richtung der Schwerkraft, welche irgend eine Ungleichheit in der Gestalt ihrer Umgrenzungsfläche hervorruft, (§ 787) $\frac{\varrho}{\sigma}$ von dem Betrage, den sie haben würde, wenn die Substanz homogen wäre. Weiter bemerken wir, dass, da die Störungen als klein vorausgesetzt werden, wir Störungen, wie wir sie jetzt beschrieben haben, zu beliebigen anderen kleinen Störungen hinzu-

fügen können, wie z. B. zu den Störungen, die in der Abplattung der Erde, mit der wir uns alsbald beschäftigen werden, ihren Grund haben.

Da die Dichtigkeit der oberen Kruste überall ungefähr die Hälfte der mittleren Dichtigkeit der Erde ist, so können wir sagen, dass die Wirkung, welche eine Reihe paralleler Bergketten und Thäler auf die Niveaufläche ausübt, von der in § 791 dargelegten allgemeinen Beschaffenheit ist, aber nur die Hälfte des dort angegebenen Betrages hat. So z. B. würde eine Reihe mehrerer breiter Bergketten und Thäler, bei denen Kamm von Kamm oder Thal von Thal 20 Seemeilen entfernt wäre, und deren Länge mehrmals 20 Meilen betrüge, während die verticale Erhebung des Kamms über das Thal 7200 engl. Fuss ausmachte, die Niveaufläche so erhöhen und erniedrigen, dass sie $2^1/_2$ engl. Fuss von der Fläche abweicht, welche die Niveaufläche sein würde, wenn man die herausragenden Theile der Masse entfernte und mit denselben die Thäler ausfüllte.

793. **Das Potential ist überall bestimmt, wenn sein Werth für jeden Punkt einer Oberfläche gegeben ist.** — Green's Theorem [Zusatz A (e)]*) und der in § 497 gegebene Satz von Gauss zeigen, dass, wenn das Potential einer nach dem Newton'schen Gesetze anziehenden beliebig vertheilten Masse für jeden Punkt einer diese Masse vollständig umschliessenden Oberfläche gegeben ist, das Potential und daher auch die Kraft für den ganzen ausserhalb der Umgrenzungsfläche der Masse liegenden Raum bestimmt ist, mag die Oberfläche nun nur aus einer oder aus beliebig vielen isolirten geschlossenen Flächen bestehen, von denen jede einfach continuirlich ist. Allerdings kann man für das Problem, den Werth des Potentials im Raume zu bestimmen, noch keine allgemeine Lösung geben. Und sogar in den Fällen, in welchen das Potential für den Raum ausserhalb der Oberfläche, auf welcher es gegeben ist, vollständig bestimmt worden ist, ist es der mathematischen Analysis bisher nicht gelungen, den Werth desselben für den Raum zu bestimmen, welcher zwischen dieser Oberfläche und der eingeschlossenen anziehenden Masse liegt. Wir hoffen, in den folgenden Bänden auf

*) Man wende zuerst Green's Theorem auf die Oberfläche an, auf welcher das Potential gegeben ist. Dann zeigt der Satz von Gauss, dass es nicht zwei Vertheilungen des Potentials geben kann, welche in dem ganzen ausserhalb dieser Oberfläche liegenden Raum übereinstimmen, aber für irgend einen Theil des Raums verschieden sind, welcher zwischen ihr und der Umgrenzungsfläche der Masse liegt.



das durch den **Gauss**'schen Satz des § 497 gegebene wichtige Problem zurückzukommen. Inzwischen beschränken wir uns auf Fragen, welche für die physische Geographie von praktischem Nutzen sind.

Beispiel (1). — Die einschliessende Fläche sei eine Kugel vom Radius a, und es sei $F(\vartheta, \varphi)$ das in irgend einem Punkte dieser Oberfläche, der in der gewöhnlichen Weise durch seine Polarcoordinaten ϑ, φ bestimmt ist, gegebene Potential. Green's Lösung [§ 499 (3) und Zusatz B (46)] seines Problems für die Kugelfläche lässt sich unmittelbar auf einen Theil des vorliegenden Problems anwenden und liefert als Werth des Potentials in irgend einem ausserhalb der Kugelfläche liegenden Punkte (r, ϑ, φ)

$$(3)\quad V = \frac{1}{4\pi a} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \frac{(r^2 - a^2) F(\vartheta', \varphi') r^2 \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'}{\{r^2 - 2ar[\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi')] + a^2\}^{3/2}}.$$

Da aber Laplace's Gleichung $\nabla^2 u = 0$ durch den Ausdruck (46) des Zusatz B sowohl in dem ganzen inneren, als auch in dem ganzen äusseren Raume erfüllt wird, und da in dem vorliegenden Problem die Gleichung $\nabla^2 V = 0$ nur für den Theil des inneren Raumes gilt [§ 491 (c)], welcher keine Masse enthält, so liefert der Ausdruck (3) die Lösung nur für den äusseren Raum. Wenn $F(\vartheta, \varphi)$ eine solche Function ist, dass für das bestimmte Integral ein Ausdruck in geschlossener Form gefunden werden kann, so ist dieser Ausdruck nothwendig die Lösung unseres Problems für den ganzen ausserhalb des anziehenden Körpers befindlichen Raum. Oder wenn $F(\vartheta, \varphi)$ so beschaffen ist, dass das bestimmte Integral (3) in ein anderes bestimmtes Integral transformirt werden kann, welches beim Durchgang durch die Kugelfläche überall oder in einem gewissen Theil derselben stetig variirt, so wird dieses zweite Integral die Lösung auch für einen gewissen Theil des inneren Raumes darstellen, nämlich für den Theil, den man erreichen kann, ohne dass das Integral discontinuirlich wird (d. h. dass seine Elemente unendlich gross werden), und ohne dass man einen Theil der anziehenden Masse trifft. Wir hoffen, den Gegenstand später in Verbindung mit dem Gauss'schen Satze (§ 497) wieder aufzunehmen; für unsern jetzigen Zweck ist es aber wünschenswerth, den Ausdruck (3) nach steigenden Potenzen von $\frac{a}{r}$ zu entwickeln, ganz wie es oben in Zusatz B (s) geschah. Das Resultat [Zusatz B (5[illegible])] ist

$$(3^*)\quad V = \frac{a}{r} F_0(\vartheta, \varphi) + \left(\frac{a}{r}\right)^2 F_1(\vartheta, \varphi) + \left(\frac{a}{r}\right)^3 F_2(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.},$$

wo $F_0(\vartheta, \varphi)$, $F_1(\vartheta, \varphi)$, $F_2(\vartheta, \varphi)$, u. s. w. die successiven Glieder der Entwicklung [Zusatz B (51)] von $F(\vartheta, \varphi)$ in harmonische Kugelflächenfunctionen sind; das allgemeine Glied dieser Entwicklung wird durch die Formel

$$(4)\qquad F_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Q_n F(\vartheta' \varphi') \, d\vartheta' \, d\varphi'$$

gegeben, wo Q_n die durch Zusatz B (60) ausgedrückte Function von $(\vartheta, \varphi)(\vartheta', \varphi')$ ist.

In jedem Falle, in welchem die anziehende Masse ganz innerhalb einer inneren concentrischen Kugelfläche vom Radius a' liegt, muss die Entwicklung von $F(\vartheta, \varphi)$ nach harmonischen Functionen wenigstens ebenso stark convergent sein, wie die geometrische Reihe

$$\frac{a'}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \left(\frac{a'}{a}\right)^3 + \cdots;$$

daher wird die Reihe (3*) für jeden Werth von r, der grösser als a' ist, convergiren, folglich die Lösung für die Punkte des von der Kugelfläche umschlossenen Raumes wenigstens bis an diese zweite Kugelfläche hin darstellen.

Beispiel (2). — **Bestimmung des Potentials aus der Form einer die Masse umgebenden näherungsweise kugelförmigen Fläche constanten Potentials.** — Es sei die anziehende Masse näherungsweise centrobarisch (§ 526) und eine dieselbe vollständig umschliessende Fläche constanten Potentials gegeben. Man soll die Vertheilung der Kraft und des Potentials in dem ganzen Raume ausserhalb der kleinsten Kugelfläche bestimmen, welche um diese Masse von dem Schwerpunkt derselben als Mittelpunkt aus gezogen werden kann. Es sei a ein approximativer oder mittlerer Radius; ferner möge der Trägheitsmittelpunkt (§ 230) zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen werden und die Polargleichung der Oberfläche constanten Potentials

$$r = a\,[1 + F(\vartheta, \varphi)] \tag{5}$$

sein, wo F für alle Werthe von ϑ und φ so klein ist, dass wir sein Quadrat sowie seine höheren Potenzen vernachlässigen dürfen. Betrachten wir jetzt die beiden benachbarten Punkte (r, ϑ, φ), (a, ϑ, φ). Die Entfernung beider Punkte ist $a\,F(\vartheta, \varphi)$, und die Verbindungslinie derselben geht durch den Coordinatenanfangspunkt O. Bezeichnet M die gesammte Masse, so ist die resultirende Kraft in irgend einem Punkte dieser Linie näherungsweise gleich $\frac{M}{a^2}$, und ihre Richtung ist die dieser Linie. Folglich ist die Differenz der Potentiale (§ 486) zwischen ihnen $\frac{M F(\vartheta, \varphi)}{a}$, und wenn a der genaue mittlere Radius ist, so wird der constante Werth des Potentials an der gegebenen Oberfläche (5) genau $\frac{M}{a}$ sein. Daher ist bis zu dem Grade der Genauigkeit, der durch Vernachlässigung der Quadrate von $F(\vartheta, \varphi)$ erreicht wird, das Potential im Punkte (a, ϑ, φ)

$$\frac{M}{a} + \frac{M}{a} F(\vartheta, \varphi). \tag{6}$$

Danach ist das Problem auf das des vorhergehenden Beispiels reducirt, und wenn wir beachten, dass der von dem Gliede $\frac{M}{a}$ von (6) abhängende Theil seiner Lösung einfach $\frac{M}{r}$ ist, so erhalten wir nach (3*) für das jetzt gesuchte Potential

$$U = M\left\{\frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} F_1(\vartheta, \varphi) + \frac{a^2}{r^3} F_2(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.}\right\}, \tag{7}$$

wo F_n durch (4) gegeben ist. F_0 ist Null, weil a der genaue mittlere Radius ist; die Gleichung, welche diese Bedingung ausdrückt, ist

$$(8) \qquad \int\int F(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0.$$

Wird weiter O in einer geeigneten mittleren Lage, d. h. so angenommen, dass

$$(9) \qquad \int\int Q_1 F(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0$$

ist, so verschwindet F_1, und es ist [§ 539 (12)] O der Schwerpunkt der anziehenden Masse; die Entwicklung von $F(\vartheta, \varphi)$ nach harmonischen Functionen wird dann

$$(10) \qquad F(\vartheta, \varphi) = F_2(\vartheta, \varphi) + F_3(\vartheta, \varphi) + F_4(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.}$$

Wenn a' der Radius der kleinsten Kugelfläche ist, welche O zum Mittelpunkt hat und die ganze anziehende Masse umschliesst, so convergirt die Reihe (7) für alle Werthe von ϑ und φ nothwendig wenigstens ebenso rasch als die geometrische Reihe

$$(11) \qquad 1 + \frac{a'}{r} + \left(\frac{a'}{r}\right)^2 + \left(\frac{a'}{r}\right)^3 + \text{u. s. w.}$$

für jeden Werth von r, der grösser als a' ist. Folglich drückt der Ausdruck (7) die Lösung unseres jetzigen besonderen Problems aus. Derselbe kann die Lösung des Problems sogar noch für weitere Raumtheile innerhalb der Oberfläche ausdrücken, da die gegebene Fläche (6) eine solche sein kann, dass die Entwicklung (10) rascher convergirt als die Reihe

$$1 + \frac{a'}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \left(\frac{a'}{a}\right)^3 + \text{u. s. w.}$$

Resultirende Kraft. — Die Richtung und die Grösse der resultirenden Kraft lassen sich natürlich [§§ 486, 491) unmittelbar aus (7) für den ganzen Raum herleiten, für welchen dieser Ausdruck anwendbar ist, d. h. für den ganzen Raum, in welchem derselbe convergirt, und welcher von der gegebenen Oberfläche aus ohne einen Durchgang durch einen Theil der anziehenden Masse erreicht werden kann. Es ist wichtig zu bemerken, dass, da die resultirende Kraft von der radialen Richtung um unendlich kleine Winkelgrössen von derselben Ordnung wie $F(\vartheta, \varphi)$ abweicht, ihre Grösse von derjenigen der radialen Componente um kleine Grössen von derselben Ordnung wie das Quadrat von $F(\vartheta, \varphi)$ verschieden sein wird; bezeichnet also R die Grösse der resultirenden Kraft, so ist für unseren Grad von Genauigkeit

$$(12) \quad R = -\frac{dU}{dr} = \frac{M}{r^2}\left\{1 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^2 F_2(\vartheta, \varphi) + 4\left(\frac{a}{r}\right)^3 F_3(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.}\right\}.$$

Um die Resultante der Kraft in irgend einem Punkte der Kugelfläche zu finden, welche nur äusserst wenig von der gegebenen Fläche abweicht, setzen wir in dieser Formel $r = a$ und finden

$$(13) \qquad \frac{M}{a^2}\left\{1 + 3\, F_2(\vartheta, \varphi) + 4\, F_3(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.}\right\}.$$

In dem Punkte (r, ϑ, φ) der gegebenen Oberfläche genügt es für die Genauigkeit, die wir hier fordern, in allen Gliedern der Reihe (12), mit

Ausnahme des ersten, $r = a$ zu setzen; im ersten Gliede $\frac{M}{r^2}$ aber müssen wir $r = a\,\{1 + F(\vartheta, \varphi)\}$ setzen, so dass sich dasselbe in

$$\frac{M}{r^2} = \frac{M}{a^2\{1 + F(\vartheta, \varphi)\}^2} = \frac{M}{a^2}\{1 - 2F(\vartheta, \varphi)\} \tag{14}$$

$$= \frac{M}{a^2}\{1 - 2[F_2(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.}]\}$$

verwandelt, und wir erhalten für die in Richtung der Normalen genommene Componente der resultirenden Kraft im Punkte (ϑ, φ) der gegebenen näherungsweise kugelförmigen Fläche constanten Potentials

$$\frac{M}{a^2}\{1 + F_2(\vartheta, \varphi) + 2F_3(\vartheta, \varphi) + 3F_4(\vartheta, \varphi) + \cdots\}. \tag{15}$$

Nehmen wir der Einfachheit wegen ein Glied F_i in der Entwicklung von F allein und betrachten, mittels Zusatz B (38), (40), (p) und §§ 779 ... 784 die Beschaffenheit der harmonischen Kugelflächenfunctionen, so sehen wir, dass die im Bogenmaass (§ 404) gemessene grösste Abweichung der Normalen an die Oberfläche

$$r = a\,\{1 + F_i(\vartheta, \varphi)\} \tag{16}$$

von der radialen Richtung genau das $i$fache der halben Entfernung zwischen einem Minimum und einem Maximum in den Werthen von $F_i(\vartheta, \varphi)$ für alle harmonischen Functionen zweiter Ordnung (Fall $i = 2$) und für alle sectorialen harmonischen Functionen (§ 781) jeder Ordnung ist, und dass es sich näherungsweise so verhält auch für die äquatorialen Theile aller zonalen harmonischen Functionen sehr hohen Grades. Auch sind für harmonische Functionen hohen Grades benachbarte Maxima und Minima näherungsweise gleich. Wir schliessen daraus folgendes: —

794. Resultante der Gravitationskräfte in irgend einem Punkte einer näherungsweise kugelförmigen Niveaufläche. — Wenn eine Niveaufläche (§ 487), welche eine nach dem Newton'schen Gesetz anziehende Masse umschliesst, von einer nahezu kugelförmigen Form um eine rein harmonische Undulation (§ 779) $i$ter Ordnung abweicht, so wird die Grösse der Schwerkraft in irgend einem ihrer Punkte den mittleren Werth derselben um das $(i - 1)$ fache des sehr kleinen Bruchs übertreffen, um welchen der Abstand jenes Punktes vom Centrum grösser ist als der mittlere Radius. Die grösste Neigung der resultirenden Kraft gegen die genau radiale Richtung, gerechnet in Bruchtheilen der Winkeleinheit 57·3° (§ 404), ist für harmonische Abweichungen der zweiten Ordnung gleich dem Verhältniss der ganzen Entfernung zwischen Minimum und Maximum zum mittleren Radius. Für die oben unter der Bezeichnung sectoriale harmonische Functionen beliebigen Grades i beschriebene Classe steht die grösste Abweichung in der Richtung zu der ent-



sprechenden Abweichung von dem mittleren Radius genau in dem Verhältniss $i : (i - 1)$; für zonale harmonische Functionen hoher Grade ist dies Verhältniss nahezu gleich Eins.

Beispiel (3). — **Resultante der Schwere und der Centrifugalkraft in irgend einem Punkte einer näherungsweise kugelförmigen Niveaufläche.** — Die anziehende Masse sei wieder näherungsweise centrobarisch und rotire mit der Winkelgeschwindigkeit ω um OZ; dabei sei eine der sie vollständig umschliessenden Niveauflächen (§ 487) durch die Formel (5) des § 793 ausgedrückt. Das Potential der Centrifugalkraft (§§ 800, 813) wird $\frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2 + y^2)$, oder in räumlichen harmonischen Functionen

$$\frac{1}{3}\,\omega^2 r^2 + \frac{1}{6}\,\omega^2 (x^2 + y^2 - 2\,z^2)$$

sein. Für den Grad der Genauigkeit, an den wir gebunden sind, ist dies für jeden Punkt der gegebenen Oberfläche (5) gleich

$$\frac{1}{3}\,\omega^2 a^2 + \frac{1}{2}\,\omega^2 a^2 \left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right).$$

Da die Summe dieses Ausdrucks und des Gravitationspotentials in jedem Punkte dieser Oberfläche constant sein muss, so ist das Gravitationspotential im Punkte (ϑ, φ) der gegebenen Oberfläche (5) gleich

$$\frac{M}{a} - \frac{1}{2}\,\omega^2 a^2 \left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right),$$

und daher erhalten wir jetzt, wenn alle übrigen Umstände und ebenso die Bezeichnung wie im Beispiel 2 (§ 793) sind, für das Gravitationspotential im Punkte (a, ϑ, φ) statt (6) den folgenden Ausdruck: —

$$(16) \qquad \frac{M}{a} + \frac{M}{a}\,F(\vartheta, \varphi) - \frac{1}{2}\,\omega^2 a^2 \left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right).$$

Wenn wir also die Lage von O und die Grösse von a nach (9) und (8) wählen, so erhalten wir für das Potential der reinen Gravitation in jedem Punkte (r, ϑ, φ) statt (7)

$$(17) \qquad U = M\left\{\frac{1}{r} + \frac{a^2}{r^3}\left[F_2(\vartheta, \varphi) - \frac{1}{2}\,m\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right] + \frac{a^3}{r^4}\,F_3(\vartheta, \varphi) + \frac{a^4}{r^5}\,F_4(\vartheta, \varphi) + \cdots\right\},$$

wo $m = \omega^2 a : \frac{M}{a^2}$ ist, also das Verhältniss der Centrifugalkraft am Aequator zur Schwerkraft im mittleren Abstande a bezeichnet. Die Grösse der reinen Schwerkraft im Punkte (ϑ, φ) der gegebenen Oberfläche (5) wird folglich statt durch (15) durch die folgende Formel ausgedrückt: —

$$(18) \; \frac{M}{a^2}\left\{1 + F_2(\vartheta, \varphi) - 3\,.\,\frac{1}{2}\,m\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right) + 2\,F_3(\vartheta, \varphi) + 3\,F_4(\vartheta, \varphi) + \cdots\right\}.$$

Will man den Gesammtbetrag der zur gegebenen Oberfläche normalen resultirenden Kraft g (der scheinbaren Schwerkraft) finden, so hat man

von (18) die radiale Componente der Centrifugalkraft, welche (in harmonischen Functionen ausgedrückt) gleich

$$\frac{2}{3}\,\omega^2 a + \omega^2 a\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)$$

ist, zu subtrahiren; es ist also

$$(19)\quad \begin{cases} g = \dfrac{M}{a^2}\Big\{1 - \dfrac{2}{3}\,m + F_2(\vartheta,\varphi) - \dfrac{5}{2}\,m\left(\dfrac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right) \\ \qquad\qquad + 2\,F_3(\vartheta,\varphi) + 3\,F_4(\vartheta,\varphi) + \cdots\Big\}. \end{cases}$$

Wenn wir in einem besonderen Falle

$F_i(\vartheta,\varphi) = 0$ [ausser für $i = 2$) und $F_2(\vartheta,\varphi) = e\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)$

haben, so geht (19) über in

$$(20)\qquad g = \frac{M}{a^2}\left\{1 - \frac{2}{3}\,m - \left(\frac{5}{2}\,m - e\right)\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right\}.$$

795. Wenn also ausserhalb eines rotirenden festen Körpers die Linien der Resultante der Gravitations- und der Centrifugalkraft von einem um die Rotationsaxe symmetrischen elliptischen Sphäroid*) unter rechten Winkeln geschnitten werden, so variirt die Grösse der Resultante in den Punkten dieser Oberfläche wie das Quadrat des Sinus der Breite, und der Ueberschuss der polaren Resultante über die äquatoriale steht zum ganzen Betrage einer jeden in einem Verhältniss, welches, zur Ellipticität (§ 801) der Figur addirt, zwei und ein halb mal so gross als das Verhältniss der äquatorialen Centrifugalkraft zur Schwerkraft ist.

Satz von Clairaut. — Für den Fall einer rotirenden Flüssigkeitsmasse oder eines festen Körpers, dessen Dichtigkeit in den verschiedenen Punkten eine solche ist, als wenn der Körper flüssig wäre, wurden diese Sätze, von denen der zweite jetzt unter dem Namen des Clairaut'schen Satzes allgemein bekannt ist, zuerst von Clairaut entdeckt, der sie im Jahre 1743 in seinem berühmten Werke: *La Figure de la Terre* veröffentlichte. Laplace erweiterte dieselben, indem er die Formel (19) des § 794 für jeden festen Körper bewies, welcher aus näherungsweise kugelförmigen Schichten

---

*) Nach dem Vorgange der besten französischen Schriftsteller gebrauchen wir den Ausdruck Sphäroid, um irgend eine Oberfläche zu bezeichnen, welche nur sehr wenig von einer Kugel abweicht. Der in englischen Werken gewöhnliche Gebrauch, jenen Ausdruck auf ein um eine Axe symmetrisches Ellipsoid zu beschränken, und ihn auch dann bei Flächen dieser Art anzuwenden, wenn dieselben nicht näherungsweise kugelförmig sind, ist verwerflich. (Auch von deutschen Schriftstellern wird der Name Sphäroid oft in dem von den Autoren hier getadelten Sinne gebraucht).



von gleicher Dichtigkeit besteht. Endlich führte Stokes*) aus, dass die Gleichung (19) ihre Geltung behält, wenn nur die auf die Gravitation allein und ebenso die auf die Resultante der Gravitation und der Centrifugalkraft bezüglichen Gleichgewichtsflächen näherungsweise kugelförmig sind, die Flächen gleicher Dichtigkeit mögen kugelförmig sein oder nicht. Eine sich hieraus ergebende Folgerung, die praktisch von der äussersten Wichtigkeit ist, ist die, dass man unabhängig von jeder Voraussetzung hinsichtlich der Vertheilung der Dichtigkeit der Erde die wahre Gestalt der Meeresoberfläche allein aus Pendelbeobachtungen bestimmen kann, ohne eine Hypothese über den Zustand des Innern der Erde aufzustellen.

Es sei der Kürze wegen

$$g\left\{1+\frac{5}{2}m\left(\frac{1}{3}-\cos^2\vartheta\right)\right\}=f(\vartheta,\varphi), \tag{21}$$

wo m (§ 801) gleich $\frac{1}{290}$ und der Werth von g durch an verschiedenen Orten angestellte Beobachtungen, sowie durch eine nach dem Quadrate des Abstandes vom Erdmittelpunkt (nicht nach der Young'schen Regel) ausgeführte Reduction auf die Meeresoberfläche bestimmt ist. Die Entwicklung dieses Ausdrucks nach harmonischen Kugelfunctionen sei

$$f(\vartheta,\varphi)=f_0+f_2(\vartheta,\varphi)+f_3(\vartheta,\varphi)+\text{u. s. w.} \tag{22}$$

Da nach (19)

$$F_i(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{i}\,\frac{f_i(\vartheta,\varphi)}{f_0} \tag{23}$$

ist, so geht die Gleichung (5) der Niveaufläche über in

$$r=a\left\{1+\frac{1}{f_0}\left[\frac{1}{2}f_2(\vartheta,\varphi+\frac{1}{3}f_3(\vartheta,\varphi)+\text{u. s. w.}\right]\right\}. \tag{24}$$

Wir wollen jetzt unsere Aufmerksamkeit für einen Augenblick auf die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks beschränken. Der explicite Werth von f_2 ist, wie sich aus Zusatz B (38) ergibt,

$$\left\{\begin{aligned} f_2(\vartheta,\varphi) = {} & A_0\left(\cos^2\vartheta-\frac{1}{3}\right)+(A_1\cos\varphi+B_1\sin\varphi)\sin\vartheta\cos\vartheta \\ & +(A_2\cos 2\varphi+B_2\sin 2\varphi)\sin^2\vartheta. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Wird dies in die Gleichung (24) substituirt, nachdem dieselbe aufs Quadrat erhoben ist, so erhält man, wenn man noch

$$\cos\vartheta=\frac{z}{r},\ \sin\vartheta\cos\varphi=\frac{x}{r},\ \sin\vartheta\sin\varphi=\frac{y}{r}$$

setzt und einige leichte Reductionen ausführt,

---

*) „On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth." — *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 1849.

$$(26)\quad \begin{cases} \left(f_0 + \frac{1}{3} A_0 - A_2\right) x^2 + \left(f_0 + \frac{1}{3} A_0 + A_2\right) y^2 \\ \qquad + \left(f_0 - \frac{2}{3} A_0\right) z^2 - B_1 yz - A_1 zx - 2 B_2 xy = f_0 a^2. \end{cases}$$

Nun ersehen wir aus §§ 539, 534, dass, wenn OX, OY, OZ Hauptaxen der Trägheit sind, die Glieder von f_2, welche, in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt, die Producte yz, zx, xy enthalten, verschwinden müssen, d. h. es muss $B_1 = 0$, $A_1 = 0$, $B_2 = 0$ sein. Wenn aber OZ eine Hauptaxe ist, so muss, B_2 mag verschwinden oder nicht, $A_1 = 0$ und $B_1 = 0$ sein; dies ist also zu einem äusserst grossen Grade von Genauigkeit der Fall, wenn für OZ die mittlere Rotationsaxe der Erde gewählt wird, wie wir im zweiten Bande unter der durch die unten angeführten Gründe wahrscheinlich gemachten Voraussetzung beweisen werden, dass die Unvollkommenheit der Starrheit der Erde nur eine kleine oder nicht merkliche Störung der Bewegung derselben herbeiführt. Die Entwicklung (22) reducirt sich also auf

$$(27)\quad \begin{cases} f(\vartheta, \varphi) = f_0 + A_0 \left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) \\ \qquad + (A_2 \cos 2\varphi + B_2 \sin 2\varphi) \sin^2\vartheta + f_3(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Wenn $f_3(\vartheta, \varphi)$ und die höheren Glieder vernachlässigt werden, so ist die Niveaufläche ein Ellipsoid, dessen eine Axe mit der Rotationsaxe der Erde zusammenfallen muss. Bezeichnen wir mit e die mittlere Ellipticität der Meridianschnitte, mit e' die Ellipticität des äquatorialen Schnittes und mit I die Neigung einer der Axen des letzteren gegen OX, so erhalten wir

$$e = \frac{1}{2} \frac{A_0}{f_0}, \; e' = \frac{\sqrt{(A_2^2 + B_2^2)}}{f_0}, \; I = \frac{1}{2} \arctan \frac{B_2}{A_2}.$$

Im Allgemeinen sind die Constanten der Entwicklung (22): f_0 (d. i. der mittlere Betrag der Schwerkraft), A_0, A_2, B_2, die sieben Coefficienten in $f_3(\vartheta, \varphi)$, die neun Coefficienten in $f_4(\vartheta, \varphi)$, u. s. w. aus Beobachtungen über die Grösse der Schwerkraft zu bestimmen, die zahlreich genug und an weit von einander entfernten Orten angestellt sein müssen.

796. Bestimmung der Gestalt der Meeresoberfläche durch Messungen der Schwerkraft. — Ein erstes approximatives Resultat, das auf diese Weise durch Pendelbeobachtungen gewonnen und durch direkte geodätische Messungen bestätigt worden ist, besteht darin, dass die Form der Meeresoberfläche sich einem abgeplatteten Rotationssphäroid nähert, dessen Ellipticität ungefähr $\frac{1}{295}$ beträgt. Beide Methoden werden in hohem Grade von den localen Unregelmässigkeiten der festen Erdoberfläche und der Dichtigkeit des Erdinnern beeinträchtigt, zu deren Elimination viele Arbeit und mathematische Geschicklichkeit mit bis jetzt nur theilweisem Erfolge aufgewendet worden sind. Wenn wir die allgemeine Vertheilung

der grossen Landzüge und Oceane betrachten, so können wir kaum daran zweifeln, dass eine sorgfältige Reduction der zahlreichen genauen Pendelbeobachtungen, welche in weit über die Erde zerstreuten Orten angestellt worden sind*), zu der Bestimmung eines Ellipsoides mit drei ungleichen Axen führen wird, welches im Ganzen mit der wahren Gestalt der Meeresoberfläche genauer als irgend ein Rotationssphäroid zusammenfällt. So lange dies nicht erreicht oder als unausführbar erwiesen ist, würde es vergeblich sein, über die Möglichkeit zu speculiren, aus erlangbaren Daten eine noch grössere Annäherung durch Einführung einer harmonischen Function dritter Ordnung [$f_3(\vartheta, \varphi)$ in (27)] zu erzielen. Es ist ferner wenig Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass sich harmonische Functionen vierter oder höherer Ordnungen je von Nutzen erweisen werden, und man muss — nach dem zuerst von Maskelyne in seiner Untersuchung der durch den Shehallien hervorgebrachten Abweichung gegebenen Beispiele — zu localen Quadraturen seine Zuflucht nehmen, um Unregelmässigkeiten in besonderen Distrikten zu erklären, mögen diese Unregelmässigkeiten nun die durch das Pendel gelieferte Grösse, oder die durch geodätische Beobachtungen bestimmte Richtung der Schwerkraft betreffen. Wir bemerken hier nur, dass die durch locale Quadraturen dargebotenen die Grösse der Schwerkraft betreffenden Probleme in demselben Grade einfacher und leichter als die auf die Richtung der Schwerkraft bezüglichen Probleme erscheinen, als Pendelbeobachtungen einfacher und leichter denn geodätische Messungen sind, und dass wir hinsichtlich unserer Erkenntniss der wahren Gestalt der Meeresoberfläche mehr von den ersteren als von den letzteren erwarten, obgleich die grössten Anstrengungen bisher gerade zur Reduction der letzteren gemacht worden sind. Wir beabsichtigen, zu diesem Gegenstande im zweiten Bande zurückzukehren, wenn wir in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie die thatsächliche Grundlage unserer Kenntniss der Schwerkraft darlegen werden.

797. Während der letzten sieben Jahre ist eine geodätische Arbeit von äusserster Wichtigkeit in der Ausführung gewesen; indem durch das Zusammenwirken der Regierungen von Preussen, Russ-

*) Im Jahre 1672 bewies ein von Richer von Paris nach Cayenne gebrachtes Pendel zuerst, dass die Schwerkraft an beiden Orten verschieden ist. — Capitän Kater und Dr. Thomas Young, *Trans. R. S.*, 1819. — Biot, Arago, Mathieu, Bouvard und Chaix, *Base du Système Métrique*, *Vol. III*, *Paris*, 1821. — Capitän Edward Sabine, „*Experiments to determine the Figure of the Earth by means of the Pendulum,*" London, 1825. — Stokes „*On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth,*" Camb. Phil. Trans., 1849.

land, Belgien, Frankreich und England die 1860 für diesen Zweck weit genug vorgeschrittene Triangulation von Frankreich, Belgien, Russland und Preussen mit der 1851 beendeten Haupttriangulation von Grossbritannien und Irland verbunden wurde. Bezüglich dieses Werkes macht Sir Henry James die folgenden Bemerkungen: — „Vor der Verbindung der Triangulationen der verschiedenen Länder in ein grosses Netz von Dreiecken, das sich über die ganze Breite von Europa erstreckt, und vor der Erfindung des elektrischen Telegraphen und seiner Anwendung von Irland bis an das Ural-Gebirge war es nicht möglich, ein so umfassendes Unternehmen wie das jetzt in Angriff genommene auszuführen. Es ist dies in der That eine Arbeit, welche in keiner früheren Periode in der Geschichte der Welt hätte ausgeführt werden können. Die genaue Bestimmung der Gestalt und der Dimensionen der Erde ist das grosse Ziel, das sich die Astronomen seit 2000 Jahren gestellt haben, und es ist ein Glück, dass wir in einer Zeit leben, in welcher die Menschen so erleuchtet sind, ein allseitig ersehntes Ziel durch gemeinsame Arbeit zu erreichen, und dies im ersten Augenblick, wo die Erreichung desselben möglich geworden ist."

Für eine kurze Zeit müssen wir noch zufrieden sein mit den aus der neuesten britischen Triangulation hergeleiteten Resultaten und mit den in Peru, Frankreich, Preussen, Russland, Indien und am Cap der guten Hoffnung ausgeführten Messungen von Meridianbogen. Die Bestimmung des mit der Meeresoberfläche für die ganze Erde am meisten übereinstimmenden Rotationsellipsoids ist von Capitän A. R. Clarke mit besonderem Geschick geschehen und im Jahre 1858 auf Befehl des „Board of Ordnance" veröffentlicht. Das Werk (ein Quartband von 780 Seiten, von denen fast jede einzelne die Resultate höchst umfangreicher und einsichtiger Arbeit zusammenfasst) ist vom Capitän Clarke unter der Leitung des Obersten (jetzt Sir Henry) James abgefasst worden. Die nachstehende Zusammenstellung der später genauer zu betrachtenden Ergebnisse hinsichtlich des mit der Meeresoberfläche am genauesten zusammenfallenden Ellipsoids von drei ungleichen Axen ist aus der Vorrede zu einem anderen neuerdings veröffentlichten Bande entnommen, welcher zu dem grossen Werke gehört, welches die britische mit den neueren Triangulationen anderer Länder verbindet*): —

*) „Comparisons of the Standards of Length of England, France, Belgium, Prussia, Russia, India, Australia, made at the Ordnance Survey Office, Southampton, by Captain A. R. Clarke, under the direction of Colonel Sir Henry James." Published by order of the Secretary of State for War, 1866.

„Berechnet man die Gestalt der Meridiane und des Aequators für die verschiedenen gemessenen Meridianbogen, so ergibt sich, dass der Aequator schwach elliptisch ist, und dass die längere Axe dieser Ellipse sich in 15° 34′ östlicher Länge (von Greenwich) befindet. Auf der östlichen Halbkugel geht der Meridian 15° 34′ durch Spitzbergen, ein wenig westlich an Wien vorbei, durch die Strasse von Messina, durch den Tschadsee in Nordafrika und die Westküste von Südafrika entlang; derselbe entspricht also nahezu dem Meridian, welcher die grösste Masse Land auf jener Halbkugel berührt. Auf der westlichen Halbkugel geht dieser Meridian durch die Behringsstrasse und durch die Mitte des Stillen Oceans, entspricht also nahezu dem Meridian, welcher die grösste Wassermasse auf jener Halbkugel trifft.

„Der Meridian 105° 34′ geht durch das nördliche Eismeer, nahe am Cap Tscheljuskin (Nordost-Cap) vorbei, durch Tonkin und die Sunda-Strasse, und entspricht nahezu dem Meridian, welcher die grösste Ländermasse in Asien trifft. Auf der westlichen Halbkugel geht dieser Meridian durch den Smith-Sund in der Baffins-Bay, nahe an Montreal und New-York vorbei, zwischen Cuba und St. Domingo hindurch und die Westküste von Südamerika ganz nahe dem Meere entlang, entspricht also nahezu dem Meridiane, welcher die grösste Landmasse auf der westlichen Halbkugel berührt.

„Diese Meridiane entsprechen also den am meisten hervorstehenden Theilen des Globus.

	Engl. Fuss.
Die längste Halbaxe der äquatorialen Ellipse hat eine Länge von	20 926 350
Die kürzeste Halbaxe etc.	20 919 972
Hieraus ergibt sich die Elliptícität des Aequators gleich	$\frac{1}{3269{\cdot}5}$
Die Polarhalbaxe ist gleich	20 853 429
Das Maximum und das Minimum der Abplattung an den Polen ist beziehungsweise	$\frac{1}{285{\cdot}97}$ und $\frac{1}{313{\cdot}38}$,
oder der Mittelwerth der Abplattung ist ganz nahezu	$\frac{1}{300}$.“

Capitän Clarke hatte schon vorher („Account of Principal Triangulation,“ 1858) für das Rotationssphäroid dieselbe Reihe von Beobachtungen aufgestellt, nämlich folgende: —

„Aequatoriale Halbaxe $= a =$ 20 926 062 engl. Fuss
Polare Halbaxe $= b =$ 20 855 121 „ „

also $\frac{b}{a} = \frac{293\cdot98}{294\cdot98}$, und Ellipticität $= \frac{a-b}{a} = \frac{1}{294\cdot98}$.

„Bei dieser Oberfläche ist aber die Summe der Quadrate der Fehler in den Breiten 153·9939, während dieselbe bei dem Ellipsoid mit drei ungleichen Axen 138·3020 beträgt*)."

798. Fortsetzung der hydrostatischen Beispiele. — Um ein Beispiel der elementaren Principien des Gleichgewichts der Flüssigkeiten zu geben, welches lehrreich und zugleich von Nutzen ist, weil es die berühmten hydrostatischen Theorien der Ebbe und Fluth und der Gestalt der Erdoberfläche in sich schliesst, wollen wir voraussetzen, eine heterogene unzusammendrückbare Flüssigkeitsmasse von endlicher Grösse, die auf einer starren Kugelschale oder Vollkugel ruht, und welche unter der Einwirkung der zwischen ihren Theilchen wechselseitig wirkenden Gravitationskräfte und der als symmetrisch vorausgesetzten Attraction des Kugelkernes steht, werde ein wenig gestört, entweder durch irgend welche anziehende Massen, welche im Kern der Kugel oder ausserhalb der Flüssigkeit fest liegen, oder durch ein einem beliebigen Gesetz genügendes Kraftsystem, welches nur der Bedingung unterworfen ist, conservativ zu sein, oder endlich durch die Centrifugalkraft.

Zunächst bemerken wir, dass, wenn keine solche Störung vorhanden wäre, die Flüssigkeit in concentrischen Kugelschichten von gleicher Dichtigkeit zur Ruhe kommen würde, und zwar würden die Schichten nach dem Mittelpunkt zu immer dichter werden. Diese letztere Bedingung ist wesentlich, wenn das Gleichgewicht stabil sein soll. Es darf dann offenbar auch die mittlere Dichtigkeit des Kerns nicht kleiner als diejenige der ihm zunächst liegenden Flüssigkeitsschicht sein; denn sonst würde der Kern das Centrum verlassen und entweder auf einer Seite aus der Flüssigkeit heraustreten, oder (wenn die Abnahme der Dichtigkeit in der Flüssigkeit es gestattet) in einer excentrischen Lage, in der er von der Flüssigkeit ganz umhüllt wäre, zur Ruhe kommen; in beiden Fällen würde er der Bedingung (§ 762) des Gleichgewichts schwimmender Körper genügen.

799. Die Wirkung der störenden Kraft könnte sofort ohne Hülfe der Analysis bestimmt werden, wenn keine wechselseitige Anziehung zwischen den Theilen der Flüssigkeit stattfände, so dass die Einwirkung, welche die Kugelgestalt zu erhalten

*) „Comparison of Standards of Length" (1866), p. 287.

strebt, einfach die symmetrische Anziehung des festen Kernes sein würde. Denn dann wären die Flächen constanten Potentials (als direkt in den Daten enthalten) bekannt, und die Flüssigkeit würde sich (§ 750) in Schichten von gleicher Dichtigkeit anordnen, welche durch diese Flächen bestimmt wären.

800. Beispiele des § 799. — (1) Der Kern möge nach dem Newton'schen Gesetz wirken und entweder um einen Punkt herum symmetrisch sein oder (§ 526) eine beliebige andere centrobarische Anordnung haben; ferner sei die störende Einwirkung die Centrifugalkraft. Im zweiten Bande wird sich als eine unmittelbare Folgerung aus der elementaren Dynamik kreisförmiger Bewegungen ergeben, dass in jedem Falle das kinetische Gleichgewicht unter der Einwirkung der Centrifugalkraft dasselbe ist, wie das statische Gleichgewicht in dem imaginären Falle, in welchem dasselbe materielle System sich in Ruhe befindet, aber unter dem Einfluss einer dem Abstande von der Axe einfach proportionalen Abstossung von derselben steht.

Wenn z die Rotationsaxe und ω die Winkelgeschwindigkeit ist, so sind die Componenten der Centrifugalkraft (§§ 32, 35a, 259) $\omega^2 x$ und $\omega^2 y$. Folglich ist das Potential der Centrifugalkraft

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2 + y^2);$$

dasselbe wird, um eine Uebereinstimmung mit der in § 485 getroffenen Bestimmung für Gravitationspotentiale zu erzielen, in der Axe als Null gerechnet und nimmt zu in der Richtung der Kraft. Der Ausdruck für die letzteren Potentiale ist (§§ 491, 528)

$$\frac{E}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}},$$

wo E die Masse des Kerns bezeichnet, und die Coordinaten von dem Schwerpunkt (§ 526) des Kerns als Anfangspunkt aus gerechnet werden. Man erhält somit die ausserhalb des Kerns gelegenen „Niveauflächen“ (§ 487), indem man in der Gleichung

$$\text{(1)} \qquad \frac{E}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} + \frac{1}{2}\,\omega^2(x^2 + y^2) = C$$

C verschiedene Werthe beilegt, und wenn sich die Flüssigkeit im Gleichgewicht befindet, so fallen ihre Schichten gleicher Dichtigkeit und ihre äussere Umgrenzung in diese Oberflächen. Ist ϱ die Dichtigkeit und p der Flüssigkeitsdruck in irgend einem Punkte einer dieser als Functionen von C angesehenen Oberflächen, so ist (§ 760)

$$\text{(2)} \qquad p = \int \varrho\, d\,C.$$

Wenn nicht die Flüssigkeit durch einen an ihrer Grundfläche angebrachten

Druck zurückgehalten wird, so muss das Potential von dieser Fläche aus nach innen zu zunehmen (oder die zur Oberfläche senkrechte Resultante der Schwere und der Centrifugalkraft muss nach innen zu gerichtet sein), da ein negativer Druck praktisch unzulässig ist. Wir empfehlen es dem Leser als eine interessante Uebung, die Umstände zu untersuchen, unter denen diese Bedingung erfüllt ist; es geschieht dies am besten dadurch, dass man die Meridiancurven der Schaar der durch die Gleichung (1) gegebenen Rotationsflächen verzeichnet.

Es seien a und $a\ (1 - e)$ der äquatoriale und der polare Halbmesser einer dieser Oberflächen. Dann ist

$$\frac{E}{a} + \frac{1}{2}\ \omega^2 a^2 = \frac{E}{a(1-e)},$$

und daraus folgt

$$e = \frac{\frac{1}{2}\ \omega^2 a}{\frac{E}{a^2} + \frac{1}{2}\ \omega^2 a} = \frac{m}{2+m}, \tag{3}$$

wenn m das Verhältniss der Centrifugalkraft am Aequatör zur reinen Schwerkraft an demselben Orte bezeichnet. (Vergl. die nahezu übereinstimmende Definition des m in § 794). Hieraus und aus der Form von (1) schliessen wir Folgendes: —

801. Im Falle einer nur geringen Abweichung von der Kugelgestalt, welcher allein für die Theorie der Gestalt der Oberfläche und dėr inneren Constitution der Erde von Interesse ist, sind die Umgrenzungsfläche und die Flächen gleicher Dichtigkeit und gleichen Drucks nur äusserst wenig von abgeplatteten Rotationsellipsoiden *) verschieden. Die Ellipticität**) eines jeden dieser Ellipsoide ist halb so gross als das Verhältniss der Centrifugalkraft im grössten Kreise desselben (den wir seinen Aequator nennen können) zur Schwerkraft in irgend einem Theile dieses Kreises. Die Ellipticität nimmt daher von Fläche zu Fläche nach aussen hin wie der Kubus der Radien zu. Der äquatoriale Radius der Erde beträgt 20 926 000 engl. Fuss, ihre Umlaufszeit (der siderische Tag) 86 164 Sekunden mittlere Sonnenzeit. Folglich ist in britischem absoluten Maass (§ 225) die Centrifugalkraft am Aequator $\left(\frac{2\pi}{86\,164}\right)^2 \times 20\,926\,000$

---

*) Airy hat die grösste Abweichung der Grenzfläche von einem genauen Ellipsoid auf 24 engl. Fuss geschätzt.

**) Dieser Ausdruck wird in den Schriften über die Gestalt der Erde dazu benutzt, das Verhältniss zu bezeichnen, in welchem die Differenz der Axen einer Ellipse zur grösseren Axe steht. Wenn also e die Ellipticität und ε die Excentricität einer Ellipse ist, so haben wir $\varepsilon^2 = 2e + e^2$. Wenn daher die Excentricität eine unendlich kleine Grösse ist, so ist die Ellipticität eine unendlich kleine Grösse von derselben Ordnung wie das Quadrat der Excentricität, und die erstere ist näherungsweise gleich der Quadratwurzel aus dem Doppelten der letzteren.

oder 0·11127. Dies ist $\frac{1}{289}$ von 32·158 oder nur sehr wenig von $\frac{1}{289}$ des durch Pendelbeobachtungen bestimmten Mittelwerthes 32·14 der scheinbaren Schwerkraft auf der ganzen Meeresoberfläche verschieden. Sie beträgt daher [§ 794 (20)] $\frac{1}{289 \cdot 66}$ oder näherungsweise $\frac{1}{290}$ des Mittelwerthes der wahren Schwerkraft. Wenn demnach die feste Erde bloss wie ein im Erdmittelpunkt befindlicher Massenpunkt anzöge und keine wechselseitige Anziehung zwischen den verschiedenen Theilen der See stattfände, so würde die Meeresoberfläche ein Sphäroid von der Elliptícität $\frac{1}{580}$ sein. In Wirklichkeit lehren die Beobachtungen, dass die Elliptícität des Rotationssphäroids, welches sich der Meeresoberfläche am engsten anschliesst, ungefähr $\frac{1}{295}$ ist. Die Differenz zwischen beiden Werthen, d. i. $\frac{1}{600}$, muss also in der Abweichung der wahren Schwerkraft von sphärischer Symmetrie ihren Grund haben. Danach kann man die ganze Elliptícität $\frac{1}{295}$ der wirklichen Meeresoberfläche als aus zwei nahezu gleichen Theilen bestehend ansehen, von denen der grössere $\frac{1}{580}$ direkt von der Centrifugalkraft, der kleinere $\frac{1}{600}$ von der Abweichung der anziehenden festen und flüssigen Masse von einer wirklich centrobarischen Anordnung (§ 526) herrührt. Ein wenig später (§§ 820, 821) werden wir auf diesen Gegenstand zurückkommen.

802. Die Grösse der zur freien Oberfläche der Flüssigkeit senkrechten resultirenden Kraft findet man, indem man die nach dem Mittelpunkt hin wirkende Schwerkraft mit der Centrifugalkraft verbindet, welche eine Entfernung von der Axe herbeizuführen sucht. Wenn die Abweichung von der Kugelgestalt nicht bedeutend ist, so ist jene Resultante näherungsweise gleich der Schwerkraft, vermindert um die für ihre Richtung genommene Componente der Centrifugalkraft. Da nun die erstere Componente umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes vom Centrum variirt, so wird sie am Aequator kleiner als an jedem Pole sein, und zwar um einen Betrag, dessen Verhältniss zu ihrem Mittelwerth gleich dem Doppelten der Elliptícität, und

welcher daher (§ 801) gleich der Centrifugalkraft am Aequator ist. Daher ist im vorliegenden Falle die Differenz der scheinbaren Schwerkraft an den Polen und am Aequator zur Hälfte der Centrifugalkraft, zur Hälfte der Differenz des Abstandes vom Centrum zuzuschreiben. Es lässt sich leicht beweisen, dass die Grösse der scheinbaren Schwerkraft vom Aequator nach den Polen hin allmälig wie das Quadrat des Sinus der Breite zunimmt, und dies nicht nur für das Resultat der Verbindung beider Ursachen der Variation, sondern auch für jede einzelne. Diese Schlussfolgerungen bedürfen aber keines neuen Beweises, da sie bloss die Anwendungen der oben (§ 795) bewiesenen allgemeinen Sätze von Clairaut auf den vorliegenden Fall bilden.

Um die Sache analytisch zu behandeln, so haben wir hier

$$g = -\frac{\partial V}{dr},$$

wenn g die Grösse der Resultante der wahren Schwerkraft und der Centrifugalkraft bezeichnet, $\frac{\partial}{dr}$ [wie in Zusatz B (g)] die für die Längeneinheit in der Richtung von r genommene Grösse der Variation und V das erste Glied von (1) in § 800 ist. Nehmen wir also

$$z^2 = r^2 \cos^2\vartheta \text{ und } x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\vartheta,$$

so erhalten wir

$$g = \frac{E}{r^2} - \omega^2 r \sin^2\vartheta. \tag{4}$$

Unter der Voraussetzung einer unendlich kleinen Abweichung von der Kugelgestalt geht dies über in

$$g = \frac{E}{a^2}(1 - 2u) - \omega^2 a \sin^2\vartheta, \tag{5}$$

wenn wir in dem ersten Theil des rechten Gliedes von (4) $r = a\,(1 + u)$, im zweiten Theil $r = a = const.$ setzen. Aus (1) sehen wir, dass $\frac{E}{C}$ ein Näherungswerth für r ist, und wenn wir ihn für a nehmen, so liefert jene Gleichung

$$u = \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2 a^3}{E}\,\sin^2\vartheta; \tag{6}$$

wird dieser Werth in (5) eingesetzt, so ergibt sich

$$g = \frac{E}{a^2}\left(1 - 2\,\frac{\omega^2 a^3}{E}\,\sin^2\vartheta\right) = \frac{E}{a^2}\,(1 - 2m\sin^2\vartheta), \tag{7}$$

wo m wie früher das Verhältniss bezeichnet, welches die Centrifugalkraft am Aequator zur Schwerkraft hat.

803. Fortsetzung der Beispiele des § 799. — (2). Es werde, während der Kern fixirt ist, die Flüssigkeit auf ihrer Oberfläche

durch die Attraction eines weit entfernten festliegenden Körpers gestört, welcher nach dem Newton'schen Gesetz anzieht.

Es seien r, ϑ Polarcoordinaten, bezogen auf den Schwerpunkt des Kerns als Anfangspunkt und die Linie vom Schwerpunkt zu dem störend einwirkenden Körper als Axe; ferner sei wie früher E die Masse des Kerns, endlich M die Masse des störenden Körpers und D seine Entfernung von dem Centrum des Kerns. Dann ist die Gleichung der Flächen constanten Potentials

$$\frac{E}{r} + \frac{M}{\sqrt{(D^2 - 2\,r\,D\cos\vartheta + r^2)}} = const., \tag{8}$$

und dies geht für sehr kleine Werthe von $\frac{r}{D}$ näherungsweise über in

$$\frac{E}{r} + \frac{M}{D}\left(1 + \frac{r}{D}\cos\vartheta\right) = const. \tag{9}$$

Setzen wir, wie wir in entsprechenden Fällen thaten, $r = a\,(1 + u)$, wo a ein genauer Mittelwerth von r und u eine unendlich kleine numerische Grösse, eine Function von ϑ, ist, so erhalten wir schliesslich

$$u = \frac{M.a^2}{E.D^2}\cos\vartheta. \tag{10}$$

Dies ist eine harmonische Kugelflächenfunction erster Ordnung, und nach § 789 schliessen wir daraus Folgendes: —

Die Flüssigkeit wird ihre Kugelgestalt nicht verlieren, sondern nach dem störenden Körper hin gezogen werden, so dass ihr Mittelpunkt vom Mittelpunkt des Kerns um eine Strecke abweicht, welche sich zum Radius des Kerns verhält wie die Attraction des störenden Körpers auf einen Punkt der Oberfläche der Flüssigkeit zu derjenigen des Kerns auf denselben Punkt. Für Erde und Mond ist der Werth dieses Verhältnisses ungefähr $\frac{1}{300000}$ $\left(\text{nämlich } \frac{1}{83 \times 60 \times 60}\right)$, da der Abstand des Mondes vom Mittelpunkt der Erde ungefähr 60 Erdradien und die Masse des Mondes $\frac{1}{83}$ der Erdmasse beträgt. Wenn also die Mittelpunkte der Erde und des Mondes beide festgehalten würden, so würde in dem dem Monde zunächst liegenden Punkte der Erde eine Erhöhung der Meeresfläche um $\frac{1}{300000}$ des Erdradius, d. i. ungefähr 70 engl. Fuss eintreten, und ebenso viel würde in dem vom Monde am weitesten entfernten Punkte die Senkung der Meeresoberfläche betragen. Wenn wir den Einfluss der Sonne unter ähnlichen, freilich nicht der Wirklichkeit entsprechenden Umständen betrachten, so erhalten wir auf der der

Sonne zunächst liegenden Erdseite eine Fluth von 12,500 engl. Fuss Erhebung und auf der entgegengesetzten Seite ein Fallen von demselben Betrage $\left[\text{d. i. (§ 812) } \frac{1}{38{\cdot}7 \times 10^6} \text{ des Abstandes der Sonne}\right]$.

804. Fortsetzung der Beispiele des § 799. — (3) Es werde jetzt, während die übrigen Bedingungen dieselben wie in Beispiel (2), § 803 bleiben, die eine Hälfte des störenden Körpers entfernt und in gleicher Entfernung auf der anderen Seite befestigt.

Statt (8) haben wir jetzt als Gleichung der Flächen constanten Potentials

$$(11) \quad \frac{E}{r} + \frac{1}{2} M \left[\frac{1}{\sqrt{(D^2 - 2rD\cos\vartheta + r^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(D^2 + 2rD\cos\vartheta + r^2)}}\right] = const.,$$

und für ein sehr kleines $\frac{r}{D}$ ergibt sich jetzt statt (9) als erste Annäherung

$$(12) \quad \frac{E}{r} + \frac{M}{D}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{D^2}(3\cos^2\vartheta - 1)\right] = const.,$$

woraus endlich statt (10) und bei Benutzung einer entsprechenden Bezeichnung

$$(13) \quad u = \frac{1}{2}\frac{M.a^3}{E.D^3}(3\cos^2\vartheta - 1)$$

folgt. Dies ist eine harmonische Kugelflächenfunction zweiter Ordnung und $\frac{M.a^3}{E.D^3}$ ist ein Viertel des Verhältnisses, in welchem die Differenz zwischen den Werthen, welche die Anziehung des Mondes beziehungsweise auf den ihm zunächst liegenden und den von ihm am weitesten abstehenden Theil der Erdoberfläche hat, zur Grösse der terrestrischen Schwere steht. Daraus geht Folgendes hervor: —

Die Flüssigkeit wird unter der vorausgesetzten störenden Einwirkung die Form eines verlängerten Ellipsoides annehmen, dessen lange Axe in die Verbindungslinie der beiden störenden Körper fällt, und dessen Ellipticität (§ 801) gleich $\frac{3}{4}$ des Verhältnisses ist, in welchem die Differenz der Attractionen eines der störenden Körper auf die ihm zunächst liegenden und die am weitesten von ihm entfernten Punkte der Oberfläche der Flüssigkeit zur Grösse der Attraction steht, welche der Kern auf die Oberfläche ausübt. Setzen wir z. B. voraus, der Mond werde in zwei gleiche Theile getheilt und diese Theile auf entgegengesetzten Seiten der Erde befestigt, so dass der Abstand eines jeden von der Erde gleich dem mittleren Mondabstand wäre. Die Niveaufläche, welche die

Erde unter dieser Einwirkung erhielte, würde die Ellipticität $\frac{3}{2\times 60\times 300\,000}$ oder $\frac{1}{12\,000\,000}$ haben, und die ganze Höhendifferenz vom höchsten zum niedrigsten Punkte würde ungefähr $1^3/_4$ engl. Fuss betragen. Im zweiten Bande bei der Darlegung der kinetischen Theorie der Ebbe und Fluth werden wir vielfach Gelegenheit haben, obige Hypothese zu benutzen. Wir werden sehen, dass dieselbe (oder eine äquivalente Hypothese) unentbehrlich ist für Laplace's verschwindende tägliche Fluth auf einem festen Sphäroid, das mit einem überall gleich tiefen Ocean bedeckt ist. Andererseits wird sich alsbald (§ 814) zeigen, dass diese Hypothese sehr nahe mit den wirklich vorhandenen Umständen in Uebereinstimmung steht, so weit es sich um die Begründung der Gleichgewichtstheorie handelt.

805. Das Steigen und Fallen des Wassers in irgend einem Punkte der Erdoberfläche können wir uns jetzt dadurch hervorgebracht denken, dass wir diese beiden störenden Körper (Mond und Gegenmond, wie wir sie der Kürze wegen nennen wollen) einmal in 24 Mondstunden um die Erdaxe rotiren lassen, so dass ihre Verbindungslinie mit dem Erdäquator einen der Declination des Mondes beständig gleichen Winkel bildet. Wenn wir annehmen, dass in jedem Augenblick die Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichts erfüllt ist, d. h. dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit zur resultirenden Kraft senkrecht ist, so erhalten wir die sogenannte „Gleichgewichtstheorie der Ebbe und Fluth“.

806. Correction der Gleichgewichtstheorie. — Aber auch nach dieser Gleichgewichtstheorie würde das Steigen und Fallen an einem Orte ganz falsch geschätzt werden, wenn man es [und das geschieht, glauben wir, allgemein] als das Steigen und Fallen der sphäroidalen Oberfläche ansähe, welche das Wasser begrenzen würde, wenn kein trockenes Land (kein unbedeckter fester Körper) vorhanden wäre. Dies zu erläutern, denken wir uns, der Ocean bestände aus zwei kreisförmigen Seen A und B, deren Mittelpunkte auf dem Aequator 90^0 von einander entfernt lägen, und die durch einen engen Canal mit einander in Verbindung ständen. Im Verlauf von 12 Mondstunden würde die Oberfläche des Sees A steigen und fallen, die von B gleichzeitig fallen und steigen, und es würden in diesem Zeitabschnitte die Maxima der Abweichungen von der mittleren Niveaufläche eintreten. Wenn die Flächen der beiden Seen gleich

wären, so würden auch die Ebben und Fluthen beider gleich sein und in einem jeden ungefähr 1 engl. Fuss Senkung und Hebung von der mittleren Niveaufläche aus betragen. Anders dagegen würde es sich verhalten, wenn die Flächen der beiden Seen ungleich wären. Wenn der Durchmesser des grösseren Sees nur ein kleiner Theil des Erdquadranten, z. B. nicht mehr als 20° ist, so verhalten sich die Höhen, um welche das Wasser in beiden Seen steigt und fällt, bis zu einem grossen Grade von Genauigkeit umgekehrt wie die Flächen derselben. Ist z. B. der Durchmesser von B nur $\frac{1}{10}$ des Durchmessers von A, so wird das Steigen und Fallen in A kaum wahrnehmbar sein, während die Oberfläche von B von ihrer mittleren Lage aus um ungefähr 2 Fuss steigt und fällt, ganz wie das Steigen und Fallen des Quecksilbers in dem offenen Ende eines Gefässbarometers nur klein ist im Vergleich zum Fallen und Steigen in der Röhre. Oder wenn zwei grosse Seen A, A' sich an den entgegengesetzten Enden eines äquatorialen Durchmessers, zwei andere kleine Seen B, B' sich an den Enden des zum ersteren senkrechten äquatorialen Durchmessers, endlich zwei kleine Seen C, C' sich an den Enden der Polaraxe befinden, und wenn selbst der grösste dieser mit einander durch Canäle oder unterirdische Tunnel in freier Verbindung stehenden sechs Seen sich nur über einen kleinen Theil der gekrümmten Erdoberfläche erstreckt, so werden in den Seen A, A' keine merklichen Ebben und Fluthen eintreten; in B und B' wird sich das Wasser 2 Fuss über seine mittlere Höhe erheben, wenn der Mond oder der Gegenmond im Zenith steht, und um gleichfalls 2 Fuss unter seine gewöhnliche Höhe hinabsinken, wenn der Mond auf- oder untergeht; in C und C' endlich werden Ebben und Fluthen eintreten, bei welchen das Steigen und Fallen des Wassers von der mittleren Höhe aus 1 Fuss beträgt, und zwar ist die Zeit niedrigen Wasserstandes die, wenn der Mond oder der Gegenmond im Meridian von A, die Zeit hohen Wasserstandes die, wenn Mond oder Gegenmond im Horizont von A stehen. Der einfachste Weg, den Fall für die hier vorausgesetzten äussersten Umstände zu behandeln, besteht darin, dass man erstens die sphäroidale Oberfläche betrachtet, welche das Wasser in irgend einem Augenblick begrenzen würde, wenn kein trockenes Land vorhanden wäre, und sodann sich vorstellt, diese ganze Oberfläche würde ringsherum um so viel erniedrigt oder erhöht, als erforderlich ist, damit die Höhe in A und in A' keine Aenderung erleide. Oder wenn sich in irgend einem Theile der Erde ein grosser See A befindet, der durch Canäle mit

kleinen Seen in Verbindung steht, welche über verschiedene Theile der Erdoberfläche vertheilt sind und im Ganzen im Vergleich zu A nur eine kleine Wasserfläche haben, so erhält man die Fluthhöhe in jedem dieser kleineren Seen, indem man eine sphäroidale Fläche zieht, in welcher die Differenz zwischen dem grössten und dem kleinsten Radius zwei Fuss beträgt, und, ohne den Mittelpunkt zu verrücken, jeden Radius um eine solche Länge (diese ist für alle kleineren Seen dieselbe) vergrössert oder verkleinert, dass das Steigen oder Fallen in A in Abrechnung gebracht wird.

807. Dass das Steigen und Fallen an einem Orte fast ganz ausser Acht gelassen, an einem anderen Orte verdoppelt werden kann, ist indessen nur unter der von uns gemachten Voraussetzung möglich, dass es eine Wassermasse gebe, welche grösser sei als alle übrigen zusammen und dabei selbst nur einen kleinen Theil der Erdoberfläche bedecke. Wenn wir uns an die wirkliche Vertheilung von Land und Wasser auf der Erdoberfläche halten, so müssen wir von dem Radius des Sphäroids, welches das Wasser umgrenzen würde, wenn kein Land vorhanden wäre, eine gewisse positive oder negative Grösse α subtrahiren; α wird nach der Lage des Mondes und mit Rücksicht auf die Bedingung bestimmt, dass das Volumen des Wassers unverändert bleibe; auch hat diese Grösse α für alle Punkte des Meeres zu der nämlichen Zeit denselben Werth. Viele, welche über die Ebbe und Fluth geschrieben haben, haben dieses einleuchtende und wesentliche Princip übersehen; wir kennen in der That nur einen bisher veröffentlichten Satz*), welcher ein Bewusstsein dieses Princips verräth.

808. Die Grösse α ist eine harmonische Kugelfunction zweiter Ordnung der Declination des Mondes und des Stundenwinkels, vom Meridian von Greenwich aus gezählt. Die fünf constanten Coefficienten dieser Function hängen bloss von der Configuration von Land und Wasser ab und können leicht bestimmt werden durch nothwendiger Weise sehr mühselige Quadraturen, deren Data sich aus der Betrachtung guter Landkarten ergeben.

Es sei wie oben

$$r = a(1 + u) \tag{14}$$

die sphäroidale Niveaufläche, welche das Wasser begrenzen würde, wenn dasselbe den festen Erdkörper bedeckte; u ist durch § 804 (13) gegeben.

---

*) „Rigidity of the Earth," § 17, *Phil. Trans.*, 1862.

Bezeichnet nun $\int\int d\sigma$ eine sich über die ganze Meeresfläche erstreckende Integration, so drückt

$$a\int\int u\,d\sigma$$

die (je nach der Beschaffenheit des Falles positive oder negative) Grösse aus, welche zum Volumen addirt werden muss, damit das Wasser überall auf dieser Höhe sich erhalte. Um diese Volumenänderung zu beseitigen, müssen wir voraussetzen, die ganze Oberfläche werde überall gleichmässig um einen (positiven oder negativen) Betrag α von solcher Grösse erniedrigt, dass dadurch die Zunahme des Volumens aufgehoben werde. Ist also Ω die ganze Meeresoberfläche, so erhalten wir

$$\alpha = \frac{a\int\int u\,d\sigma}{\Omega}, \tag{15}$$

und

$$\mathfrak{r} = r - \alpha = a\left\{1 + u - \frac{\int\int u\,d\sigma}{\Omega}\right\} \tag{16}$$

ist die berichtigte Gleichung der sphäroidalen Niveaufläche des Meeres. Hieraus folgt

$$h = a\left\{u - \frac{\int\int u\,d\sigma}{\Omega}\right\}, \tag{17}$$

wo h die Erhebung der Meeresoberfläche an irgend einem Orte über die Höhe bezeichnet, welche dieselbe einnehmen würde, wenn der Mond entfernt wäre.

Um die Gleichung (15) zu entwickeln, setzen wir zunächst der Kürze wegen

$$e = \frac{3}{2}\frac{M \,.\, a^3}{E \,.\, D^3}, \tag{18}$$

wodurch (13) in

$$u = e\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) \tag{19}$$

übergeht. Es seien nun l und λ beziehungsweise die geographische Breite und die westliche Länge des Ortes, welchem u entspricht; ferner seien ψ und δ der vom Meridian von Greenwich gerechnete Stundenwinkel und die Declination des Mondes. Da ϑ die Zenithdistanz des Mondes an jenem Orte ist, so ist nach der sphärischen Trigonometrie

$$\cos\vartheta = \cos l \cos\delta \cos(\lambda - \psi) + \sin l \sin\delta,$$

und dies liefert

$$\left\{\begin{aligned} &3\cos^2\vartheta - 1 = \frac{3}{2}\cos^2 l \cos^2\delta \cos 2(\lambda - \psi) \\ &+ 6\sin l \cos l \sin\delta \cos\delta \cos(\lambda - \psi) + \frac{1}{2}(3\sin^2\delta - 1)(3\sin^2 l - 1). \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Wenn wir also mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ fünf Integrale bezeichnen, welche nur von der Vertheilung von Land und Wasser abhängen, und welche durch die folgenden Ausdrücke definirt sind: —

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \frac{1}{\Omega}\iint cos^2 l \cos 2\lambda d\sigma \\ \mathfrak{B} = \frac{1}{\Omega}\iint cos^2 l \sin 2\lambda d\sigma \\ \mathfrak{C} = \frac{1}{\Omega}\iint sin l \cos l \cos\lambda d\sigma \\ \mathfrak{D} = \frac{1}{\Omega}\iint sin l \cos l \sin\lambda d\sigma \\ \mathfrak{E} = \frac{1}{\Omega}\iint (3 \sin^2 l - 1) d\sigma, \\ \text{wo natürlich } d\sigma = \cos l\, dl\, d\lambda \text{ ist,} \end{cases}$$

so erhalten wir

$$(22)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{a}{\Omega}\iint u\, d\sigma \\ \quad = \frac{1}{3}\, a\, e\Big\{\frac{3}{2}\cos^2\delta(\mathfrak{A}\cos 2\psi + \mathfrak{B}\sin 2\psi) \\ \qquad + 6 \sin\delta \cos\delta(\mathfrak{C}\cos\psi + \vartheta \sin\psi) + \frac{1}{2}\mathfrak{E}(3\sin^2\delta - 1)\Big\}. \end{cases}$$

Wird diese Formel in Verbindung mit (19) und (20) auf (17) angewandt, so erhält man als Gesammtergebniss der Gleichgewichtstheorie

$$(23)\quad \begin{cases} h = \\ \frac{a e}{2}\,[(\cos^2 l \cos 2\lambda - \mathfrak{A})\cos 2\psi + (\cos^2 l \sin 2\lambda - \mathfrak{B})\sin 2\psi]\cos^2\delta \\ + 2 a e[(\sin l \cos l \cos\lambda - \mathfrak{C})\cos\psi + (\sin l \cos l \sin\lambda - \mathfrak{D})\sin\psi]\sin\delta\cos\delta \\ + \frac{1}{6}\, a e(3 \sin^2 l - 1 - \mathfrak{E})(3 \sin^2\delta - 1), \end{cases}$$

wo der Werth von e aus (18) für die Sonne oder für den Mond genommen werden kann, und δ und ψ die Declination und den von Greenwich aus gerechneten Stundenwinkel der Sonne, respective des Mondes bezeichnen. In diesem Ausdrucke können wir natürlich die halbtäglichen Glieder auf die Form $A \cos(2\psi - \varepsilon)$ und die täglichen Glieder auf die Form $A' \cos(\psi - \varepsilon')$ reduciren. Die Interpretation derselben führt zu den folgenden Schlüssen: —

809. In der Gleichgewichtstheorie wird die durch das Zusammenwirken der Sonne und des Mondes hervorgebrachte Aenderung der Höhe in irgend einem Punkte des Meeres durch die Summe von sechs Gliedern ausgedrückt, von denen drei sich auf jeden dieser beiden Weltkörper beziehen.

(1) Die halbtägige Mond- oder Sonnenfluth steigt und fällt proportional einer einfach harmonischen Function des vom Meridian von Greenwich aus gerechneten Stundenwinkels; diese Function hat zur Periode 180⁰ dieses Winkels (oder, durch die Zeit ausgedrückt, die halbe Periode der Rotation der Erde), und ihre

Amplitude variirt einfach proportional dem Quadrate des Cosinus der Declination der Sonne, respective des Mondes, variirt demgemäss nur langsam und zwischen wenig von einander entfernten Grenzen.

(2) Die tägliche Mond- oder Sonnenfluth variirt wie eine einfache harmonische Function des Stundenwinkels von der Periode 360^0 oder vier und zwanzig Stunden; ihre Amplitude variirt immer einfach proportional dem Sinus der doppelten Declination des störenden Körpers und geht daher in der tropischen*) Periode jedes der beiden Körper in seinem Umlauf vom positiven Maximum zum negativen und wieder zum positiven Maximum zurück.

(3) Die vierzehntägige Mond- oder die halbjährliche Sonnenfluth ist eine Variation der mittleren Wasserhöhe für die 24 Mond- oder die 24 Sonnenstunden, nach welcher das Wasser im Ganzen, wenn die Declination des störenden Körpers Null ist, um den Aequator herum höher und an den Polen tiefer ist, als wenn die Declination einen anderen nördlichen oder südlichen Werth hat, und das Wasser an den Polen am höchsten und am Aequator am niedrigsten steht, wenn die Declination ihren grössten, nördlichen oder südlichen, Werth hat. Gauss' Art, die Umstände, von welchen die „säcularen" Variationen in den Elementen des Sonnensystems abhängen, auszudrücken, ist zur Erklärung dieser Componente der Fluthen geeignet. Es mögen die zwei Parallelkreise der nördlichen und südlichen Declination des Mondes und Gegenmondes zu irgend einer Zeit auf einer geocentrischen Kugelfläche, deren Radius gleich dem Abstande des Mondes ist, gezogen und auf jedem dieser Kreise die Hälfte der Mondmasse vertheilt werden. Da diese Massenkreise alle vierzehn Tage allmälig vom Aequator zur grössten Declination und wieder zurück variiren, so wird die erzeugte Fluth lediglich und genau die „vierzehntägige Fluth" sein.

810. Correctionen der gewöhnlichen Gleichgewichtstheorie. — Nach der Gleichgewichtstheorie, wie sie gewöhnlich ausgesprochen wird, ist an irgend einem Orte hoher Wasserstand der halbtägigen Fluth genau zur Zeit, wenn der störende Körper, oder sein Entgegengesetztes den Meridian des Ortes passirt; die Höhe des Wassers dieser Fluth ist für alle Orte derselben Breite die nämliche, und für Orte verschiedener Breite dem Quadrat des Cosinus

*) Die tropische Periode unterscheidet sich von der siderischen dadurch, dass sie nicht von einer im Raume festliegenden Linie, sondern von dem ersten Punkte des Widders aus gerechnet wird; die Differenz beider beträgt nur einen Tag in 26 000 Jahren.



der Breite proportional, also z. B. an jedem Pole gleich Null. Nach der berichtigten Gleichgewichtstheorie kann hoher Wasserstand der halbtägigen Fluthen vor und nach dem Durchgang des störenden Körpers durch den Meridian stattfinden; auch ist die Wasserhöhe an verschiedenen Orten derselben Breite sehr verschieden und jedenfalls nicht Null an den Polen.

Nach der Gleichgewichtstheorie, wie sie gewöhnlich ausgesprochen wird, findet auf der nördlichen Erdhälfte genau zur Zeit des Durchgangs, jenachdem die Declination des Körpers eine nördliche oder eine südliche ist, hoher oder niedriger Wasserstand der täglichen Fluthen statt, und die Grösse des Steigens oder Fallens ist einfach proportional dem Sinus der doppelten Breite, also sowohl am Aequator wie an den Polen gleich Null. Nach der berichtigten Gleichgewichtstheorie kann hoher Wasserstand lange vor oder nach der Zeit des Durchgangs eintreten; sein Betrag ist für verschiedene Orte derselben Breite sehr verschieden und weder am Aequator, noch an den Polen gleich Null. Nach dem gewöhnlichen Ausspruch der Theorie findet keine vierzehntägige Mond- oder halbjährliche Sonnen-Fluth in der Breite $35^0 16'$ $\left(\text{es ist dies } arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ statt, und in anderen Breiten ist ihr Betrag proportional den Abweichungen der Quadrate ihrer Sinus von dem Werthe $1/_3$. Nach der berichtigten Gleichgewichtstheorie ist jede dieser Fluthen noch constant in constanter Breite und verschwindet in einer gewissen Breite, während sie in allen anderen Breiten einfach proportional ist der Abweichung der Quadrate ihrer Sinus von dem Quadrat des Sinus der Breite, in welcher sie Null ist. Die Breite, in welcher es keine Fluth dieser Art gibt, ist aber nicht $arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$, sondern $arcsin \sqrt{\frac{1+\mathfrak{C}}{3}}$, wo $\mathfrak{C}$ der Mittelwerth ist, welchen $3 \sin^2 l - 1$ für den ganzen mit Wasser bedeckten Theil der Erdoberfläche hat, eine Grösse, welche sich durch eine mühsame Quadratur aus hinlänglich vollständigen geographischen Daten in Betreff der Küstenlinien der ganzen Erde leicht bestimmen lässt.

Da die vierzehntägigen und halbjährlichen Fluthen thatsächlich höchst wahrscheinlich nur wenig von dem Gleichgewichtsgesetz abweichen, so ist es von grosser Bedeutung, jene Grösse zu ermitteln. Wir bedauern, dass wir bisher noch nicht im Stande gewesen sind, diese Arbeit zu unternehmen. Umgekehrt ist es wahrscheinlich, dass eine sorgfältige Bestimmung der vierzehntägigen und halb-

jährlichen Fluthen an verschiedenen Orten durch passende Reductionen der Fluthbeobachtungen zur Bereicherung unserer geographischen Kenntnisse über die Grösse der Wasseroberfläche in den bisher unerforschten Theilen der arctischen und antarctischen Regionen beitragen wird.

811. Spring- und Nippfluthen, Verfrühung und Verzögerung. — Die Superposition der halbtägigen Sonnen- und der halbtägigen Mondfluth ist oben als ein Beispiel der Zusammensetzung einfacher harmonischer Bewegungen behandelt worden, und die wohlbekannten Erscheinungen der „Springfluthen“ und der „Nippfluthen“, sowie der „Verfrühung“ und der „Verzögerung“ sind erklärt (§ 60). Wir haben jetzt nur noch hinzuzufügen, dass die Beobachtung beweist, dass die verhältnissmässige Differenz zwischen den Höhen der Springfluthen und der Nippfluthen, und der Betrag der Verfrühung und der Verzögerung an fast allen Orten viel kleiner ist, als in § 60 unter der Voraussetzung des Gleichgewichts bestimmt wurde, sowie dass diese Grössen in verschiedenen Orten sehr verschieden sind, was, wie wir im zweiten Bande sehen werden, sich nach der kinetischen Theorie auch erwarten lässt.

812. Einfluss des Mondes und der Sonne auf die scheinbare terrestrische Schwerkraft. — Die in der vorhergehenden Untersuchung benutzten Potentialausdrücke sind ohne Weiteres passend für das hydrostatische Problem (§§ 802, 804). Es ist aber von Interesse, in Verbindung mit diesem Problem zu bestimmen, wie gross der störende Einfluss ist, welchen der Mond oder die Sonne auf die scheinbare terrestrische Schwerkraft in irgend einem Punkte der Erdoberfläche ausübt. Wir werden daher — indem wir die passende statische Hypothese des § 804 noch beibehalten — geeignete rechtwinklige Componenten für die Resultante der in jener Hypothese angenommenen beiden nahezu gleichen und nahezu entgegengesetzten störenden Kräfte bestimmen. Zunächst bemerken wir, dass diese beiden Kräfte annäherungsweise äquivalent sind einer Kraft, welche gleich ihrer Differenz ist und in einer der Verbindungslinie der Centren der Erde und des Mondes parallelen Richtung wirkt, und einer zweiten zu dieser ersteren senkrechten Kraft, welche gleich dem doppelten Product aus einer jener Kräfte in den Cosinus des halben stumpfen Winkels ist, den sie einschliessen.

Wenn wir jede dieser Componenten längs des durch den Ort gehenden Erdradius und senkrecht zu diesem Radius in Componenten

zerlegen, so erhalten wir durch ein Verfahren, dessen Einzelheiten wir dem Leser als Uebungsaufgabe überlassen, die folgenden, im Gravitationsmaass ausgedrückten Resultate: —

Die verticale Componente, die aufwärts wirkt, ist

$$= \frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3 (2\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).$$

Die horizontale Componente, die nach einem Punkte des Horizonts unter dem Mond oder Gegenmond wirkt, ist

$$= 3\,\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3 \sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Hier bezeichnen, wie früher, E und M die Massen der Erde und des Mondes, D den Abstand ihrer Mittelpunkte, a den Erdradius und ϑ die Zenithdistanz des Mondes.

Dieselben Ausdrücke erhalten wir auch aus dem Potentialausdruck (12), indem wir an demselben die durch $\frac{d}{dr}$ und $\frac{d}{rd\vartheta}$ ausgedrückten Operationen ausführen.

Die verticale Componente hat einen aufwärts wirkenden Maximalwerth, wenn Mond oder Gegenmond im Zenith stehen; dieses Maximum beträgt

$$2\,\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3;$$

sie hat einen abwärts wirkenden halb so grossen Maximalwerth, wenn der Mond im Horizont ist. Die horizontale Componente ist ein Maximum, das sich auf

$$\frac{3}{2}\,\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3$$

beläuft, wenn der Mond oder der Gegenmond 45^0 über dem Horizont ist. Aehnliche Sätze gelten natürlich für den störenden Einfluss der Sonne. Für den Mond ist $\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3$ wahrscheinlich ungefähr gleich $\frac{1}{83\times(60{\cdot}3)^3}$ oder $\frac{1}{18{\cdot}2\times10^6}$, und das entsprechende Maass des Sonneneinflusses ist nur sehr wenig von $\left(1+\frac{1}{83}\right)\left(\frac{27{\cdot}3}{365}\right)^2\frac{1}{(60{\cdot}3)^3}$ oder $\frac{1}{39{\cdot}1\times10^6}$ verschieden. Wenn nun der Mond oder Gegenmond an jedem Orte der Erdoberfläche vom Horizont zum Zenith steigt, so wird die Intensität der scheinbaren Schwerkraft um etwa $\frac{1}{6\,000\,000}$

vermindert, und das Senkblei wird nach dem unter dem Mond oder Gegenmond liegenden Punkt des Horizonts um einen Betrag abgelenkt, welcher seinen grössten Werth, d. i. $\frac{1}{12\times 10^6}$ der Winkeleinheit ($57{\cdot}3^0$) erreicht, wenn die Höhe des Mondes 45^0 ist. Die entsprechenden Einwirkungen der Sonne sind ungefähr halb so gross.

813. Fortsetzung der Beispiele des § 799. — (4) **Erklärung der Fluth erzeugenden Einwirkung durch die Centrifugalkraft.** — Es seien alle anderen Umstände wie im Beispiel (2); es mögen aber die beiden Körper nicht fest sein, sondern in Kreisen um ihren gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunkt mit einer solchen Winkelgeschwindigkeit rotiren, dass die Centrifugalkraft, die jedem derselben ertheilt wird, gleich der Attractionskraft ist, die der andere Körper auf ihn ausübt.

Es sei der Mittelpunkt der Erde der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten und OZ senkrecht zur Ebene der kreisförmigen Bahnen; ferner möge die Axe OX sich so drehen, dass sie beständig durch den störenden Körper geht. Verfahren wir dann mit der Centrifugalkraft nach der Potentialmethode wie in § 794, so erhalten wir für die Gleichung einer Oberflächenschaar, welche die Resultirende der Schwere und der Centrifugalkraft überall unter rechten Winkeln schneiden,

$$(24) \qquad \frac{E}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}+\frac{M}{\sqrt{[(D-x)^2+y^2+z^2]}}+\frac{1}{2}\,\omega^2[(b-x)^2+y^2]=const.,$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation der beiden Körper um ihren Trägheitsmittelpunkt und b den Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkt der Erde bezeichnen, so dass

$$(25) \qquad M(D-b)\,\omega^2=E\,b\,\omega^2=\frac{ME}{D^2}$$

ist. Folglich ist

$$\frac{Mx}{D}-\omega^2 b\,x=0.$$

Wird dies in der Formel (24) angewandt, nachdem dieselbe entwickelt und allgemein wie (12) in Beispiel (3) behandelt worden ist, so sehen wir, dass die erste Potenz von x verschwindet, und wenn wir die Glieder dritter und höherer Ordnungen weglassen, so erhalten wir

$$(26) \qquad \frac{E}{r}+\frac{M}{D}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{3x^2-r^2}{D^2}\right)+\frac{1}{2}\,\omega^2(x^2+y^2)=const.$$

Um dies auf harmonische Kugelfunctionen zu reduciren, haben wir

$$x^2+y^2=\frac{2}{3}\,r^2-\frac{1}{3}\,(3z^2-r^2);$$

folglich erhalten wir, da wir bei der Annäherung, die wir fordern, ω^2a^2 für ω^2r^2 nehmen können [wenn wie oben die Bezeichnung $r=a(1+u)$ angewendet wird]

$$(27)\begin{cases} u = \frac{1}{2}\frac{Ma}{ED}\cdot\frac{3x^2-r^2}{D^2} - \frac{1}{6}\,\omega^2\,\frac{a}{E}\,(3z^2-r^2), \\ \text{oder in Polarcoordinaten} \\ u = \frac{1}{2}\,\frac{Ma^3}{ED^3}\,(3\sin^2\vartheta\cos^2\varphi - 1) - \frac{1}{6}\,\frac{\omega^2 a^3}{E}\,(3\cos^2\vartheta - 1). \end{cases}$$

Interpretirt lehrt diese Formel Folgendes: —

Die Oberfläche der Flüssigkeit wird ein harmonisches Sphäroid zweiter Ordnung [d. h. (§ 779) ein Ellipsoid, welches nur unendlich wenig von einer Kugel verschieden ist] sein, welches wir betrachten können als das Resultat der Superposition der in § 804 betrachteten Abweichung von der Kugelgestalt und einer zweiten Abweichung, die in der Abplattung besteht, welche aus der Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den zur Ebene der Bahn des störenden Körpers senkrechten Erdradius herrührt. Wir können diesen Satz, ohne so viel mathematische Analysis anzuwenden, auch dadurch beweisen, dass wir voraussetzen, das rein statische System des Beispiels (3) rotire zuerst mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit ω um irgend einen Erddurchmesser, welcher senkrecht zu der durch das Centrum gehenden geraden Linie ist, in die man die störenden Körper gesetzt hat, und dass wir weiter annehmen, diese Winkelgeschwindigkeit sei eine solche, dass die von der Erde auf die beiden störenden Körper ausgeübte Attraction aufgehoben werde, so dass die Klammern, durch welche ein Zusammenfallen der Körper verhindert würde, entfernt werden können. Dann ist es leicht, analytisch zu beweisen, dass, wenn man einen der störenden Körper auf die andere Seite bringt und ihn mit dem zweiten vereinigt, die Wirkung eine kleine Störung in der Gestalt der Flüssigkeit sein wird, die sich zu der im Beispiel (3) untersuchten Störung verhält, wie der Erdradius zu dem Abstande des störenden Körpers.

814. Das rein statische System des Beispiels (3) liefert die einfachste und am meisten symmetrische Grundlage für die Gleichgewichtstheorie der Fluthen. Zwar ist das kinetische System des Beispiels (4) nicht weniger rein statisch in Beziehung auf die Erde und einem absolut statischen imaginären System äquivalent, in welchem die Centrifugalkraft des rotirenden Systems ersetzt ist durch eine auf Theile eines nicht rotirenden Systems ausgeübte Abstossung von einer festen Linie. Doch ist dasselbe nicht so einfach, wegen der durch die Centrifugalkraft oder die Abstossung erzeugten Abplattung der Oberfläche der Flüssigkeit. Diese Abplattung würde

sich, wie wir aus § 801 sehen, auf $\frac{1}{(27{\cdot}4)^2} \times \frac{1}{580}$ oder $\frac{1}{435{,}000}$ belaufen, also ungefähr das 27·8fache der Ellipticität der lunaren Fluthniveaufläche für den Fall der Erde und des Mondes sein; für den Fall der Erde und der Sonne würde dieselbe freilich nur $\frac{1}{366^2} \times \frac{1}{580}$ oder $\frac{1}{77{,}700{,}000}$ betragen.

815. Vergrösserung des Resultats durch die zwischen den Theilen der gestörten Wassermasse wirkende Attraction. — Wenn die Attraction, welche die Theile der Flüssigkeit auf einander ausüben, nicht unmerklich ist, so ruft die Störung in der Vertheilung derselben eine entgegengesetzte störende Kraft hervor, welche die Abweichung der Flächen constanten Potentials von der Kugelgestalt vergrössert. Die allgemeine hydrostatische Bedingung (§ 750), dass die Oberflächen gleicher Dichtigkeit noch mit den Flächen constanten Potentials zusammenfallen müssen, führt hierbei auf ein ausgezeichnetes Problem der Analysis. Legendre und Laplace gelangten dadurch zu einer ganz neuen Methode in der Mathematik, welche von den englischen Schriftstellern gewöhnlich die Methode der „Laplace'schen Coefficienten" oder der „Laplace'schen Functionen" genannt wird. Die Principien dieser Methode haben wir in dem zweiten Zusatz zu unserem ersten Capitel skizzirt. Daraus und aus den ergänzenden Untersuchungen der §§ 778 . . . 784 erhalten wir sofort die Lösung für den Fall, in welchem die Flüssigkeit homogen und der Kern [d. i. ein fester Körper von beliebiger Form, dessen innere Dichtigkeit eine beliebige ist, und der nur der Bedingung genügen muss, dass seine äusseren Flächen constanten Potentials näherungsweise kugelförmig sind] ganz von der Flüssigkeit bedeckt ist. Das Ergebniss kann in folgender Weise ausgedrückt werden: — Es sei ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit und σ die mittlere Dichtigkeit der ganzen Masse, d. i. der Flüssigkeit und des festen Körpers. Ferner möge der störende Einfluss, mag derselbe nun von äusseren störenden Massen, oder von einer Abweichung des Kernes von einer genauen centrobarischen (§ 526) Beschaffenheit oder von der durch die Rotation erzeugten Centrifugalkraft herrühren, ein solcher sein, dass die Niveauflächen harmonische Sphäroide $i$ter Ordnung werden, wenn die Flüssigkeit durch eine sie vollständig umschliessende starre Hülle in einer Kugelform erhalten wird. Das Streben der Oberfläche der Flüssigkeit würde sein, die Gestalt derjenigen dieser Niveauflächen anzu-

nehmen, welche genau das Volumen der Flüssigkeit umschliesst. Aber während die Flüssigkeit, wenn dies gestattet wäre, ihre Gestalt änderte, würde sie die Abweichung von dieser Niveaufläche vergrössern. Das Resultat besteht darin, dass die Niveaufläche der Flüssigkeit, wenn dieselbe nach Entfernung des Zwanges ins Gleichgewicht gekommen ist, ein harmonisches Sphäroid von derselben Art ist, dessen Abweichung von der Kugelgestalt jedoch in dem Verhältniss 1 zu $1 - \frac{3\varrho}{(2i+1)\sigma}$ vergrössert ist.

Es sei das Potential auf der umgrenzenden Fläche oder unendlich nahe derselben

$$\frac{4\pi\sigma a^3}{3r} + S_i, \tag{1}$$

wenn die Flüssigkeit durch eine kugelförmige Umhüllung vom Radius a in einer festen Form erhalten wird. Unter diesen Umständen ist

$$r = a\left(1 + \frac{3S_i}{4\pi\sigma a^2}\right) \tag{2}$$

die Fläche constanten Potentials vom mittleren Radius a. Wird nun die Umgrenzungsfläche der Flüssigkeit in das harmonische Sphäroid

$$r = a(1 + cS_i) \tag{3}$$

verwandelt, so geht das Potential (1) über in (§ 543)

$$\frac{4\pi\sigma a^3}{3r} + \left(1 + \frac{4\pi\varrho c a^2}{2i+1}\right) S_i, \tag{4}$$

und die Fläche constanten Potentials wird nicht mehr (2) sein, sondern

$$r = a\left\{1 + \left(1 + \frac{4\pi\varrho c a^2}{2i+1}\right)\frac{3S_i}{4\pi\sigma a^2}\right\}. \tag{5}$$

Damit also die Grenze (3) der Flüssigkeit eine Fläche constanten Potentials sei, müssen wir

$$c = \left(1 + \frac{4\pi\varrho c a^2}{2i+1}\right)\cdot\frac{3}{4\pi\sigma a^2}$$

haben, und dies liefert

$$4\pi c a^2 = \frac{1}{\frac{\sigma}{3} - \frac{\varrho}{2i+1}},$$

woraus

$$1 + \frac{4\pi\varrho c a^2}{2i+1} = \frac{1}{1 - \frac{3\varrho}{(2i+1)\sigma}} \tag{6}$$

folgt. Durch Einsetzung dieses Resultats in (5) und durch Vergleich mit (2) ergibt sich der Satz.

816. Stabilität des Oceans. — Die schon oben als einleuchtend angegebene Instabilität des Gleichgewichts in dem Falle, in

welchem die Dichtigkeit der Flüssigkeit grösser ist, als die mittlere Dichtigkeit des Kerns wird in merkwürdiger Art durch das letzte Resultat erläutert, welches die Abweichung unendlich gross macht, wenn $i = 1$ und $\sigma = \varrho$ ist. Wir müssen aber bemerken, dass das Gleichgewicht nur dann instabil werden würde, wenn der Kern vollständig von der Flüssigkeit bedeckt ist. Wie dicht auch die Flüssigkeit sein möge, es würde immer eine Lage stabilen Gleichgewichts geben, wenn der Kern auf einer Seite herausträte, und wenn die Masse der Flüssigkeit im Vergleich zu der des Kernes sehr klein oder sehr gross wäre, so würde die Gestalt ihrer Oberfläche im Zustande des stabilen Gleichgewichts offenbar näherungsweise kugelförmig sein. Wenn wir den Fall eines sehr kleinen Kerns von einem geringeren specifischen Gewicht ausschliessen (dieser Kern würde bloss ein kleiner schwimmender Körper werden, der die allgemeine Kugelform der Flüssigkeit nicht merklich störte), so haben wir in der anscheinend einfachen Frage, die Vertheilung einer kleinen Flüssigkeitsmasse über einen symmetrischen kugelförmigen Kern von geringerem specifischen Gewicht zu ermitteln, ein Problem, zu dessen Behandlung die bis jetzt erlangte mathematische Geschicklichkeit bei weitem nicht ausreicht.

817. Die Fälle $i = 1$ und $i = 2$ liefern die Lösungen der verschiedenen Beispiele des § 799, wenn die Attraction, welche die Theile der Flüssigkeit auf einander ausüben, in Rechnung gezogen wird, immer vorausgesetzt, dass der feste Körper vollständig bedeckt ist. So würde [§ 799, Beispiel (2)], wenn die Erde und der Mond inne gehalten und im Raume befestigt würden, die Anziehung des Mondes die Gestalt der flüssigen Erdoberfläche zwar noch kugelförmig lassen, aber die Excentricität derselben in dem Verhältniss von 1 zu $1 - \frac{\varrho}{\sigma}$ vergrössern. Für die Erde und das Meer ist $\frac{\varrho}{\sigma}$ ungefähr $\frac{2}{11}$, folglich würde die kugelförmige Flüssigkeitsfläche um 86 Fuss nach dem Monde zu gezogen werden, was $1^2/_9$ mal so viel ist, als die oben (§ 803) gefundenen 70 Fuss. Ebenso würden die Fluth- und die Rotationsellipticitäten, die wir in den §§ 800, 814, 813 bestimmt haben, unter der jetzt gemachten Voraussetzung jede im Verhältniss 1 zu $1 - \frac{3}{5}\frac{\sigma}{\varrho}$, oder für den Fall der Erde und des Meeres im Verhältniss 55 zu 49 vergrössert werden. Die genaue Correction für die durch die Fluth in der Attraction des Meeres

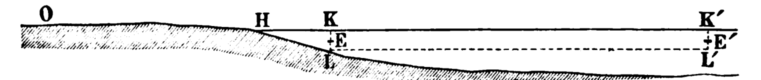
hervorgebrachte Aenderung muss in der Gleichgewichtstheorie der Fluthen kleiner als jene Grösse sein, da die Flüssigkeit nicht mehr als ungefähr $^2/_3$ des festen Körpers bedeckt. Die genaue Grösse der Correction für die von den Wassertheilchen auf einander ausgeübte Attraction zu finden, wenn nicht der ganze feste Körper bedeckt ist, gehört, sogar wenn die Anordnung von Wasser und Land ganz symmetrisch und einfach ist (wenn z. B. ein einziger kreisförmiger Continent da ist, während alles Uebrige Ocean ist), zu dem schon (§ 816) erwähnten der mathematischen Behandlung noch nicht zugänglichen Problem. Dasselbe kann erforderlichen Falls praktisch gelöst werden durch mühsame Näherungsmethoden; aber die unregelmässigen Grenzen von Land und Meer, wie sie auf der Erde thatsächlich vorhanden sind, und die Mitwirkung kinetischer Einflüsse bei Fluthen machen alle Arbeiten dieser Art illusorisch. Glücklicher Weise ist der Fehler, den man begeht, wenn man die in Rede stehende Correction ganz vernachlässigt, auf weniger als 10 Proc. zu veranschlagen $\left(\frac{6}{49}\right.$ würde 12·3 Proc. sein$\left.\right)$, und kann bei unserer gegenwärtigen Unsicherheit in Betreff der absoluten Werthe der Ursachen und Wirkungen in der Theorie der Fluthen unberücksichtigt bleiben.

818. Localer Einfluss hohen Wasserstandes auf die Richtung der Schwerkraft. — Obwohl nun der durch die Attraction des Wassers selbst, wenn es steigt und fällt, auf die Fluthen ausgeübte Einfluss an keinem Orte beträchtlich ist, so ist es doch ein offenbarer, obgleich nicht selten begangener Irrthum, anzunehmen, dass der störende Einfluss des Mondes auf die terrestrische Schwerkraft überall unmerklich sei. Es ist schon vor langer Zeit von Robison*) darauf hingewiesen worden, dass die grossen Fluthen der Fundy-Bay eine sehr bedeutende Ablenkung des Senkbleis in den benachbarten Orten erzeugen, und dass eine Beobachtung dieser Wirkung zu einer Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde benutzt werden könne. Aber auch gewöhnliche Fluthen müssen an Orten, welche der Meeresküste nahe liegen, Ablenkungen des Senkbleis hervorrufen, welche den grössten directen Einfluss des Mondes, der, wie wir (§ 812) gesehen haben, sich auf $\frac{1}{12{,}000{,}000}$ der Winkeleinheit (57·3°) beläuft, weit übertreffen. So würde in

*) Mechanical Philosophy, 1804. Siehe auch Forbes, Proc. R. S. E., April 1849.

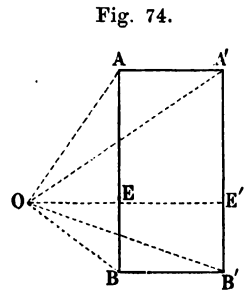
einem Punkte, der in der mittleren Meeresniveaufläche oder nicht viele Fuss darüber liegt, und der 100 Yards von dem Orte entfernt ist, welcher zur Zeit der Ebbe die Grenze zwischen Wasser und Land bildet, durch Fluthen von 5 Fuss Hebung und Senkung über die mittlere Höhe, wenn die Küstenlinie von dem Punkte aus nach jeder Seite hin 50 Meilen weit nicht bedeutend von einer mittleren Richtung abweicht, und wenn 50 Meilen ins Meer hinein das Steigen und Fallen näherungsweise gleichzeitig und mit gleicher Stärke erfolgt, eine Ablenkung von der mittleren Verticalen erzeugt werden, welche nach jeder Seite hin mehr als $\frac{1}{8{,}000{,}000}$ der Winkeleinheit beträgt. Denn ein in O (Fig. 73) befindlicher Punkt wird, wenn

Fig. 73.



das Wasser aus dem niedrigen Stande in den hohen aufsteigt, die Attraction einer Wasserplatte erleiden, die im Durchschnitt durch $HKK'L'L$ dargestellt wird. Wenn wir den kleinen Theil der Gesammtwirkung vernachlässigen, welcher in der längs der Küste sich hinziehenden langen Wassermasse ihren Grund hat, von welcher HKL ein Durchschnitt ist, so haben wir nur die Attraction der rechteckigen Wasserplatte zu bestimmen, welche nach der Voraussetzung von KL aus eine Breite von 50 Meilen hat, längs der Küste 100 Meilen lang ist, und deren Dicke KL 10 Fuss beträgt. Diese Attraction wird nicht merklich geändert, wenn man sich den Punkt O in die Verlängerung der Mittelebene EE' versetzt denkt (wenn derselbe auch bei einem am Meere erbauten passenden Gravitationsobservatorium der Regel nach einige Fuss höher liegen würde) und die ganze Masse der Platte in dieser Mittelebene concentrirt annimmt. Die Attraction einer gleichförmigen rechteckigen Platte auf einen Punkt O hat aber als Componente, welche AB parallel ist,

Fig. 74.



$$(7) \qquad \varrho\, t \log \left\{ \frac{(OA + AE) \,.\, (OB + BE) \,.\, OE'^2}{(OA' + A'E') \,.\, (OB' + B'E') \,.\, OE^2} \right\},$$

wo ϱ die Dichtigkeit des Wassers und t die Dicke der Platte be-

zeichnet, die nach der Voraussetzung ein kleiner Bruchtheil von OE ist. (Den Beweis überlassen wir dem Leser als Uebungsaufgabe.) Wird jetzt die Seemeile = 2000 Yards angenommen, so erhalten wir nach den vorausgesetzten Daten mit einem grossen Grade von Genauigkeit

$$\frac{AE}{OE} = \frac{OA}{OE} = \frac{OE'}{OE} = 1000 \text{ und } \frac{OA'}{OE} = 1000\sqrt{2},$$

und B, B' liegen in denselben Entfernungen auf der einen Seite von OE', wie A, A' auf der anderen. Folglich geht der vorhergehende Ausdruck über in

$$2\varrho t \log \frac{2100}{1+\sqrt{2}},$$

und dies ist gleich $13{\cdot}5 \times \varrho t$.

Das Verhältniss dieser Grösse zu $\frac{4\pi}{3}\sigma r$, d. h. zur ganzen Attraction, welche die Erde auf O ausübt, ist gleich $\frac{3 \times 13{\cdot}4}{4\pi}\,\frac{\varrho t}{\sigma r}$, und dies beträgt $\left(\text{da } \frac{t}{r} \text{ nach der Voraussetzung } \frac{1}{2{,}100{,}000} \text{ und } \frac{\varrho}{\sigma} \text{ ungefähr } \frac{2}{11} \text{ ist}\right) \frac{1}{3{,}580{,}000}$. Das Senkblei wird daher zur Zeit der Fluth aus der Lage, die es zur Zeit der Ebbe inne hatte, durch eine horizontale Kraft entfernt werden, welche etwas grösser ist als $\frac{1}{4{,}000{,}000}$ der verticalen Kraft, und seine Ablenkung wird natürlich diesen Bruchtheil der Winkeleinheit $57{\cdot}3^0$ ausmachen.

819. Anwendung des § 817 auf die Theorie der Gestalt der Erde. — Wenn wir wieder zu dem Falle $\varrho = \sigma$ zurückkehren, so lernen wir aus § 817, dass eine unter dem Einfluss der Centrifugalkraft oder einer Fluth erzeugenden Einwirkung im Gleichgewicht befindliche homogene Flüssigkeit eine $2^1/_2$mal so grosse Ellipticität hat, wie sie haben würde, wenn die wechselseitige Attraction ihrer Theile entfernt (§ 800) würde und die Schwerkraft nach einem festen innern Kraftmittelpunkt hin gerichtet wäre. Daher ist für eine homogene Flüssigkeit, welche von derselben mittleren Dichtigkeit wie die Erde ist, und welche eine Rotationsdauer von der Länge eines siderischen Tages hat, die Ellipticität $\frac{1}{232}$, d. i. das

$2^1/_2$fache des in § 801 gefundenen Resultats $\frac{1}{580}$. Dies stimmt mit dem für den Fall einer näherungsweise kugelförmigen Gestalt geltenden Satz überein, den wir (§ 775) aus dem Satze des § 771 über das Gleichgewicht einer homogenen rotirenden Flüssigkeit herleiteten. Aber auch für diesen Fall ist Laplace's Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen von grösster Wichtigkeit, indem sie beweist, dass die Lösung im Falle einer näherungsweise kugelförmigen Gestalt eindeutig ist, so dass weder ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen, noch irgend eine andere Figur ausser einem abgeplatteten elliptischen Rotationssphäroid den hydrostatischen Bedingungen genügen kann, wenn die Beschränkung einer näherungsweise kugelförmigen Gestalt auferlegt ist. Unsere Leser werden leicht ermessen, wie wir auch in diesem Punkte dem grossen französischen Naturforscher verpflichtet sind, wenn wir ihnen mittheilen, dass einer von uns in der That einige Zeit hindurch Untersuchungen darüber angestellt hat, ob nicht ein Ellipsoid von drei ungleichen Axen eine Figur terrestrischen Gleichgewichts sein könne.

820. Um ein anderes Beispiel des Resultats des § 817 für den Fall $i = 2$ zu geben, denken wir uns, die Erde, welche mit der Winkelgeschwindigkeit, die sie thatsächlich hat, rotiren möge, bestehe aus einem festen centrobarischen Kern, und dieser sei mit einer dünnen Schicht Flüssigkeit bedeckt, deren Dichtigkeit gleich der wirklichen Dichtigkeit der Erdrinde sei, d. h., wie wir sagen können, gleich der Hälfte der mittleren Dichtigkeit des Kerns. Dann würde die Elliptieität der freien Oberfläche

$$\frac{1}{580} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{406}$$

sein.

Endlich sei die Aufgabe gestellt: Die Dichtigkeit der auf einem centrobarischen Kern liegenden Flüssigkeitsschicht zu bestimmen, welche, mit der Winkelgeschwindigkeit, die die Erde wirklich hat, rotirend, eine sphäroidale Form von der Ellipticität $\frac{1}{295}$, d. i. der Ellipticität der Meeresoberfläche, annimmt. Wir erhalten

$$\frac{1}{1 - \frac{3}{5}\frac{\varrho}{\sigma}} = \frac{580}{295},$$

und dies liefert $\varrho = 0{\cdot}819 \times \sigma$

821. Wenn wir die verschiedenen Resultate der §§ 801, 817, 819 zusammenstellen, die wir für einen mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde rotirenden centrobarischen Kern erhalten haben, der mit einer dünnen Schicht Flüssigkeit von der Dichtigkeit ϱ bedeckt ist, so erhalten wir, wenn die mittlere Dichtigkeit der ganzen Masse (des Kerns und der Flüssigkeit) σ ist,

$$\text{(1)} \qquad \text{für } \frac{\varrho}{\sigma} = 0 \qquad e = \frac{1}{580},$$

$$\text{(2)} \qquad \text{,,} \ \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{2}{11} \qquad e = \frac{1}{517},$$

$$\text{(3)} \qquad \text{,,} \ \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{1}{2} \qquad e = \frac{1}{406},$$

$$\text{(4)} \qquad \text{,,} \ \frac{\varrho}{\sigma} = 0{\cdot}819 \quad e = \frac{1}{295},$$

$$\text{(5)} \qquad \text{,,} \ \frac{\varrho}{\sigma} = 1 \qquad e = \frac{1}{232};$$

darin bezeichnet e die Elliptícität der freien Grenzfläche der Flüssigkeit. Die Dichtigkeit der oberen Erdrinde kann man ungefähr gleich der Hälfte der mittleren Dichtigkeit der ganzen Erdmasse annehmen; jedenfalls ist sie in jedem Theil kleiner als 0·812 dieser mittleren Dichtigkeit. Die Elliptícität der Meeresoberfläche weicht von $\frac{1}{295}$ nicht um mehr als 2 oder 3 Proc. ab und ist daher entschieden zu gross, als dass man sie der Centrifugalkraft und der Elliptícität in der oberen Rinde allein zuschreiben könnte, dass also die Voraussetzung sich rechtfertigen liesse, es sei ein starrer centrobarischer Kern vorhanden, mit einer nur dünnen Schicht bedeckt, deren Oberfläche hinsichtlich der Elliptícität im Ganzen mit der freien Flüssigkeitsoberfläche übereinstimmte. Es ist daher ganz unzweifelhaft, dass auch in den inneren Schichten eine Abplattung von einem gewissen Betrage vorhanden sein muss, und zwar muss diese Abplattung von der Richtung sein, in welcher die Centrifugalkraft eine solche erzeugen würde, wenn die Masse flüssig wäre. Wie wir in einem späteren Bande sehen werden, gibt es eine grosse Menge überzeugender Gründe, welche die von den Geologen allgemein angenommene Hypothese stützen, dass die obere Erdrinde zu einer Zeit durch die Wärme ganz geschmolzen war. Dies würde die Uebereinstimmung erklären, welche im Allgemeinen zwischen der Oberfläche des festen Körpers und der einer

im Gleichgewicht befindlichen flüssigen Masse besteht, obschon dieselbe durch die Hebungen und Senkungen bedeutend gestört ist, welche während des Festwerdens der Erdrinde eintraten, ein Vorgang, welcher (Zusatz D) wahrscheinlich einige Millionen Jahre gedauert hat und noch jetzt nicht ganz beendet ist (Zeuge dafür ist die Lava, die aus den noch thätigen Vulcanen herausfliesst). Die Abplattung der tieferen Schichten gleicher Dichtigkeit, die wir jetzt aus der Gestalt der Meeresniveaufläche schliessen, die beobachtete Dichtigkeit der Erdrinde und Cavendish's Wägung der ganzen Erde machen es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass die Erde zu einer Zeit nicht bloss auf ihrer ganzen Oberfläche, sondern entweder überall oder jedenfalls bis zu einer grossen Tiefe überall flüssig war.

822. **Gleichgewicht einer heterogenen Flüssigkeitsmasse von der Form eines Sphäroids.** — Wir werden demgemäss als letztes hydrostatisches Beispiel die Bedingungen einer heterogenen Flüssigkeit untersuchen, welche einem starren, kugelförmigen, centrobarischen Kern aufliegt und, wie in § 815 erklärt wurde, eine geringe Störung durch anziehende Massen erleidet, die entweder ausserhalb oder im Kern festliegen (darunter sind natürlich auch die etwa vorhandenen Abweichungen von einer streng centrobarischen Vertheilung der Masse des Kerns mit inbegriffen).

Es sei für irgend einen Punkt (r, ϑ, φ) des Raumes

N das Potential des Kerns,
V „ „ der ungestörten Flüssigkeit,
Q „ „ der störenden Kraft,
U „ „ der Störung in der Vertheilung der Flüssigkeit.

Es ist also das Gesammtpotential in dem in Rede stehenden Punkte $N + V$, so lange die Flüssigkeit ungestört ist, und $N + Q + V + U$, wenn die störende Kraft eingeführt und Gleichgewicht eingetreten ist. Weiter sei ϱ die Dichtigkeit der ungestörten Flüssigkeit im Punkte (r, ϑ, φ) [natürlich würde ϱ verschwinden, wenn dieser Punkt in einem von der Flüssigkeit nicht eingenommenen Raumtheil sich befände] und $\varrho + \varpi$ die geänderte Dichtigkeit in demselben Punkte $(\varrho, \vartheta, \varphi)$, wenn die Flüssigkeit unter der störenden Einwirkung verharrt. Es ist zu beachten, dass N, V, ϱ Functionen von r allein, dagegen Q, U, ϖ Functionen von r, ϑ, φ sind.

Es sei nun δr eine unendlich kleine Variation von r. Dann wird die Dichtigkeit der Flüssigkeit im Punkte $(r + \delta r, \vartheta, \varphi)$ den Werth $\varrho + \varpi + \frac{d(\varrho + \varpi)}{dr}\delta r$ haben, oder, da ϖ nach der Voraussetzung unendlich klein ist, einfach

$$r + \varpi + \frac{d\varrho}{dr}\,\delta r$$

sein. Setzen wir dies gleich ϱ, so erhalten wir

$$\varpi + \frac{d\varrho}{dr}\,\delta r = 0,$$

und hieraus ergibt sich die Gleichung

$$\delta r = -\frac{\varpi}{\frac{d\varrho}{dr}}, \tag{1}$$

welche die Abweichung der sphäroidalen Oberfläche, auf welcher die Dichtigkeit in der gestörten Flüssigkeit ϱ ist, von der Kugelfläche vom Radius r ausdrückt. Da die Flüssigkeit unzusammendrückbar ist, so muss das von dieser sphäroidalen Oberfläche eingeschlossene Volumen gleich dem von der Kugelfläche eingeschlossenen sein. Wenn daher $d\sigma$ ein Element der Kugelfläche und $\int\int$ eine sich über diese ganze Fläche erstreckende Integration bezeichnet, so ist

$$\int\int \delta r\, d\sigma = 0. \tag{2}$$

Da nun $\frac{d\varrho}{dr}$ unabhängig von ϑ, φ ist, so folgt aus (1) als Ausdruck der Unzusammendrückbarkeit

$$\int\int \varpi\, d\sigma = 0. \tag{3}$$

Nun erhalten wir, wie früher für die Dichtigkeit, für das gestörte Potential in $(r + \delta r, \vartheta, \varphi)$

$$N + Q + V + U + \frac{d(N + Q + V + U)}{dr}\,\delta r,$$

oder, weil $Q + U$ unendlich klein ist,

$$N + Q + V + U + \frac{d(N + V)}{dr}\,\delta r.$$

Um daher auszudrücken, dass die der Abweichung (1) unter der Voraussetzung eines constanten r entsprechende sphäroidale Fläche in der gestörten Flüssigkeit eine Fläche constanten Potentials sei, erhalten wir

$$Q + U - \frac{\frac{d}{dr}(N + V)}{\frac{d\varrho}{dr}}\,\varpi + N + V = F(r), \tag{4}$$

was (§ 750) die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts ist. In dieser Gleichung müssen wir N und ϱ als explicit gegebene Functionen von r und Q als eine explicite Function von r, ϑ, φ ansehen. Für V, als Potential von ϱ, ergibt sich, wenn man in § 542 (15) und (16) $i = 0$ setzt,

$$V = 4\pi\left(\int_r^{\mathrm{r}} r'\varrho'\,dr' + \frac{1}{r}\int_a^r r'^2\varrho'\,dr'\right), \tag{5}$$

wo ϱ' der Werth von ϱ in dem Abstande r' vom Centrum, $\mathfrak{r}$ der Radius der äusseren Umgrenzungsfläche der ungestörten Flüssigkeit und a der Radius der festen Kugeloberfläche des Kerns ist, auf dem die Flüssigkeit ruht. Um $V + U$ zu finden, folgen wir streng den Regeln des § 545, addiren also das Potential einer mit der Dichtigkeit $\varrho + \varpi$ durch den Raum zwischen den beiden Kugelflächen der Radien a und $\mathfrak{r}$ vertheilten Masse zu dem Potential der in § 545 definirten Schicht B positiver und negativer Masse. Es sei h die Dicke der letzteren im Punkte $(\mathfrak{r}, \vartheta, \varphi)$, d. h. der Werth von δr auf der Oberfläche, und es bezeichne q ihre Dichtigkeit, d. i. den Flächenwerth von ϱ. Wird dann das ungestörte Potential V subtrahirt, so erhalten wir für den aus der Abplattung herrührenden Theil des Potentials

$$U = \iiint \frac{\varpi' r'^2 \, d\sigma' \, dr'}{D} + \left[\iint \frac{q' h' \, d\sigma'}{D}\right], \tag{6}$$

wenn wie gewöhnlich D die Entfernung der beiden Punkte (r, ϑ, φ), $(r', \vartheta', \varphi')$, von einander, die accentuirten Buchstaben die Werthe, welche die entsprechenden Elemente im letzteren Punkte haben, und [ ] die Werthe an, beziehlich Integration über die Oberfläche bezeichnen.

Wir wollen jetzt voraussetzen, die gesuchte Abweichung der Oberflächen gleichen Drucks, gleicher Dichtigkeit und gleichen Potentials seien in folgender Weise durch harmonische Flächenfunctionen ausgedrückt, bei denen das Glied R_0 der Gleichung (2) wegen verschwindet: —

$$\left\{\begin{array}{l}\text{für das Innere der Flüssigkeit } \delta r = R_1 + R_2 + R_3 + \text{u. s. w.,}\\ \text{und für die äussere Grenzfläche } h = \Re_1 + \Re_2 + \Re_3 + \text{u. s. w.}\end{array}\right. \tag{7}$$

Dann ist nach (1)

$$\varpi = \frac{-d\varrho}{dr}(R_1 + R_2 + R_3 + \text{u. s. w.}). \tag{8}$$

Wird diese Formel nach §§ 544, 542, 536 in (6) angewandt, so erhält man

$$\left\{\begin{array}{l} U = 4\pi \sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{2\nu+1}\left\{r^\nu \displaystyle\int_r^{\mathfrak{r}} r'^{-\nu+1} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu \, dr' \right. \\ \qquad\qquad \left. + \, r^{-\nu-1} \displaystyle\int_a^r r'^{\nu+2} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu \, dr' + q \, \Re_\nu \frac{r^\nu}{\mathfrak{r}^{\nu-1}}\right\}, \end{array}\right. \tag{9}$$

wo R'_ν den Werth von R_ν für den Punkt (r', ϑ, φ) statt für (r, ϑ, φ) bezeichnet. Diese Formel drückt U in harmonischen Functionen aus.

Um die Entwicklung der hydrostatischen Gleichung (4) zu vervollständigen, können wir voraussetzen, der harmonische Ausdruck für Q sei entweder direkt gegeben, oder er werde, je nach der Form, unter welcher die Data dargestellt sind, unmittelbar nach Zusatz B (51) oder nach § 539 (8) gefunden. Es möge also nach der Bezeichnung des Zusatzes (B) (37) und (38)

(10) $$Q = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{s=0}^{s=\nu} \left(A_\nu^{(s)} \cos s\varphi + B_\nu^{(s)} \sin s\varphi\right) \Theta_\nu^{(s)}$$

sein, wo $A_\nu^{(s)}$, $B_\nu^{(s)}$ bekannte Functionen von r bezeichnen. Wird diese Formel, sowie auch (8) in (4) benutzt, so erhalten wir

(11) $$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left\{\sum_{s=0}^{s=\nu} \left(A_\nu^{(s)} \cos s\varphi + B_\nu^{(s)} \sin s\varphi\right) \Theta_\nu^{(s)} - \frac{-d(N+V)}{dr} R_\nu \right. \\ &\quad + \frac{1}{2\nu+1}\left(r^\nu \int_r^{\mathfrak{r}} r'^{-\nu+1} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu \, dr' \right. \\ &\quad \left.\left. + r^{-\nu-1} \int_a^r r'^{\nu+2} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu \, dr' + \mathfrak{R}_\nu \frac{r^\nu}{\mathfrak{r}^{\nu-1}}\right)\right\} \\ &\quad + A_0^{(0)} + N + V = F(r), \end{aligned}\right.$$

wo $\left[\frac{-d\varrho}{dr}\right]$ den Werth von $\frac{-d\varrho}{dr}$ für $r = \mathfrak{r}$ bezeichnet. Hieraus ergibt sich erstens für die Glieder nullter Ordnung

(12) $$A_0^{(0)} + N + V = F(r),$$

was bloss den Werth von $F(r)$ liefert, den wir zeitweilig in (4) eingeführt und nicht wieder gebraucht haben. Ferner erhalten wir durch die Glieder νter Ordnung

(13) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{-d(N+V)}{dr} R_\nu \\ &- \frac{1}{2\nu+1}\left\{r^\nu \int_r^{\mathfrak{r}} r'^{-\nu+1} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu \, dr' + r^{-\nu-1} \int_a^r r'^{\nu+2} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu dr' \right. \\ &\quad \left. + q\,\mathfrak{R}_\nu \frac{r^\nu}{\mathfrak{r}^{\nu-1}}\right\} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \left(A_\nu^{(s)} \cos s\varphi + B_\nu^{(s)} \sin s\varphi\right) \Theta_\nu^{(s)}. \end{aligned}\right.$$

Wenn wir endlich R_ν (wie oben für das νte Glied von Q) nach Zusatz B (37) entwickeln, möge sich

(14) $$R_\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \left(u_\nu^{(s)} \cos s\varphi + v_\nu^{(s)} \sin s\varphi\right) \Theta_\nu^{(s)}$$

ergeben, wo $u_\nu^{(s)}$, $v_\nu^{(s)}$ Functionen von r sind, auf deren Bestimmung das Problem reducirt ist. Wenn wir jetzt die beiderseitigen Coefficienten von $\cos s\varphi\, \Theta_\nu^{(s)}$, u. s. w. einzeln einander gleich setzen, und mit u_ν eine beliebige der gesuchten Functionen $u_\nu^{(s)}$, $v_\nu^{(s)}$, ferner mit A_ν irgend eine der gegebenen Functionen $A_\nu^{(s)}$, $B_\nu^{(s)}$, endlich mit u'_ν, $\mathfrak{u}_\nu$ beziehungsweise die

Werthe von u_ν für $r = r'$ und $r = \mathfrak{r}$ bezeichnen, so erhalten wir

$$(15)\begin{cases} \dfrac{-d(N+V)}{dr} u_\nu - \dfrac{4\pi}{2\nu+1} \left\{ r^\nu \displaystyle\int_r^{\mathfrak{r}} r'^{-\nu+1} \frac{-d\varrho'}{dr'} u'_\nu dr' \right. \\ \qquad \left. + r^{-\nu-1} \displaystyle\int_a^r r'^{\nu+2} \frac{-d\varrho'}{dr'} u'_\nu dr' + q \frac{\mathfrak{u}_\nu r^\nu}{\mathfrak{r}^{\nu-1}} \right\} = A_\nu, \\ \text{oder, wie es zuweilen der Kürze wegen zweckmässig geschrieben wird,} \\ \qquad \sigma_\nu(u_\nu) = A_\nu; \end{cases}$$

darin bezeichnet σ_ν eine gewisse Operation, welche bestimmte Integrationen in sich schliesst und so beschaffen ist, dass $\sigma_\nu(u)$ für jede — continuirliche oder discontinuirliche — Function u von r für alle Werthe von r nothwendig verschwindet, für welche $u = 0$ ist. Um (15) auf eine Differentialgleichung zu reduciren, dividiren wir durch r^ν, differentiiren, multipliciren mit $r^{2\nu+2}$ und differentiiren zum zweiten Male. Setzen wir der Kürze wegen

$$(16)\qquad \frac{-d(N+V)}{dr} = r\psi,$$

so erhalten wir

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left\{ r^{2\nu+2} \dfrac{d\left(r^{-\nu+1}\psi u_\nu\right)}{dr} \right\} + 4\pi r^{\nu+2} \dfrac{-d\varrho}{dr} u_\nu \\ \qquad = \dfrac{d}{dr}\left\{ r^{2\nu+2} \dfrac{d\left(r^{-\nu} A_\nu\right)}{dr} \right\}, \end{cases}$$

eine in Beziehung auf u_ν lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten und unabhängiges Glied bekannte Functionen von r sind. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist, wie bekannt, von der Form

$$(18)\qquad u_\nu = CP + C'P' + \alpha;$$

darin ist α eine Function von r, welche der Gleichung

$$(19)\qquad \sigma_\nu(\alpha) = A_\nu$$

genügt; C und C' sind zwei willkürliche Constanten und P, P' zwei verschiedene Functionen von r.

Die Gleichung (15) erfordert, dass $C = 0$ und $C' = 0$ sei; mit anderen Worten, die Function u_ν ist völlig bestimmt, wenn sie (15) genügt. Dies erkennt man am besten durch folgende Erwägung: Wenn wir statt (15)

$$(20)\qquad \sigma_\nu(u) = A_\nu + Kr^\nu + K'r^{-\nu-1}$$

haben, wo K, K' zwei willkürliche Constanten sind, so verschwinden diese Constanten in den Differentiationen, wir erhalten noch dieselbe Differentialgleichung (17), und die beiden willkürlichen Constanten C und C' der allgemeinen Lösung (18) der letzteren sind durch (20) bestimmt, wenn

zwei beliebige Werthe für K und K' gegeben werden. In der That reducirt sich (20), wenn man für u_ν den Ausdruck (18) anwendet, auf

$$C\sigma_\nu(P) + C'\sigma_\nu(P') = Kr^\nu + K'r^{-\nu-1}, \tag{21}$$

welche Formel zeigt, dass $\sigma_\nu(P)$ und $\sigma_\nu(P')$ verschiedene lineare Functionen von r^ν und $r^{-\nu-1}$ sind, und welche C und C' bestimmt.

Wir sehen somit, dass, welchen Werth A_ν auch haben mag, wir durch Integration der Differentialgleichung (19) und durch Bestimmung der willkürlichen Constanten (14) die vollständige Lösung des Problems erhalten.

So lange man nicht der analytischen Merkwürdigkeit halber oder aus einem anderen besseren Grunde die Annahme, N sei eine willkürliche Function von r, gelten lassen will, ist es unnöthig, ψ und ϱ als zwei verschiedene gegebene Functionen beizubehalten. Denn da die äussere Kraft des Kerns oder der Theil derselben, dessen Potential N ist, nach der Voraussetzung in Beziehung auf den Mittelpunkt symmetrisch ist, so muss sie in der Natur umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes von diesem Punkte variiren, d. h. es ist

$$\frac{-dN}{dr} = \frac{\mu}{r^2}, \tag{22}$$

wo μ eine Constante ist, welche in der gewöhnlich benutzten Einheit (§ 459) die Masse des Kerns ausdrückt. Ferner ist nach (5)

$$\frac{-dV}{dr} = \frac{4\pi}{r^2}\int_a^r \varrho' r'^2 dr'. \tag{23}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (22) und (17)

$$\psi = \frac{4\pi}{r^3}\int_a^r \varrho' r'^2 dr' + \frac{\mu}{r^3}, \tag{24}$$

und dies liefert

$$\left\{\begin{aligned} 4\pi\varrho &= \frac{d(\psi r^3)}{r^2 dr} \\ 4\pi\frac{d\varrho}{dr} &= r\frac{d^2\psi}{dr^2} + 4\frac{d\psi}{dr}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Wird diese letzte Formel auf (17) angewandt und sodann durch Differentiation reducirt, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2u_\nu}{dr^2} + 2\left(\frac{d\log\psi}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{du_\nu}{dr} - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{r^2}u_\nu \\ &\qquad = \frac{1}{r^{\nu+3}}\frac{d}{dr}\left\{r^{2\nu+2}\frac{d\left(r^{-\nu}A_\nu\right)}{dr}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Eine andere Form, welche für die Fälle geeignet ist, in denen die störende Kraft von einer **äusseren** anziehenden Masse oder von der Centrifugalkraft der Flüssigkeit selbst, falls diese rotirt, herrührt, erhält man, indem man in (17)

$$r^{-\nu+1} u_\nu = e_\nu \tag{27}$$

setzt und durch Differentiation reducirt. Es ergibt sich auf diese Weise

$$\begin{cases} \frac{d^2 e_\nu}{d r^2} + 2\left(\frac{d \log \psi}{d r} + \frac{\nu+1}{r}\right) \frac{d e_\nu}{d r} + \frac{2(\nu-1)}{r} \frac{d \log \psi}{d r} e_\nu \\ \qquad = \frac{1}{r^{2\nu+2}} \frac{d}{d r} \left\{ r^{2\nu+2} \frac{d\left(r^{-\nu} A_\nu\right)}{d r} \right\}. \end{cases} \tag{28}$$

Bei dieser Bezeichnung liefert das Zwischenintegral, das man aus (15) durch Ausführung des ersten Schrittes des in der angegebenen Reihenfolge vorzunehmenden Differentiationsverfahrens erhält,

$$\begin{cases} \frac{d e_\nu}{d r} + \frac{d \log \psi}{d r} e_\nu - r^{-2\nu-2} \int_a^r \left(r \frac{d^2 \psi}{d r^2} + 4 \frac{d \psi}{d r}\right) r^{2\nu+1} e_\nu \\ \qquad = \frac{d\left(r^{-\nu} A_\nu\right)}{d r}. \end{cases} \tag{29}$$

Wichtige Schlüsse, die man leicht aus diesen Formeln ziehen kann, sind folgende: Wenn Q eine räumliche harmonische Function ist (wie es der Fall ist, wenn die Störung entweder von störenden Körpern, die sich im Kern oder in dem Raume ausserhalb der Flüssigkeit befinden, oder von der Centrifugalkraft der Flüssigkeit herrührt, wenn letztere wie ein fester Körper um eine Axe rotirt), so kann (1) die als positiv und als Function von r angesehene Grösse e_ν zwar einen Minimalwerth, aber keinen Maximalwerth haben und (2), wenn die Störung von äusseren störenden Massen oder von irgend einer anderen Ursache (wie der Centrifugalkraft) herrührt, welche als Potential eine räumliche harmonische Function νter Ordnung liefert, die nur das Glied r^ν, nicht auch das Glied $r^{-\nu-1}$ enthält, so kann e_ν, ausser im Centrum, keinen Minimalwerth haben und muss in der Flüssigkeit nach aussen hin zunehmen.

Diese Sätze zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass ψ nothwendig nach aussen hin abnehmen muss. Um dies darzuthun, bezeichnen wir mit n den Ueberschuss der Masse des Kerns über die Masse einer gleich grossen Vollkugel, deren Dichtigkeit s gleich derjenigen der dem Kern zunächst liegenden Flüssigkeitsschicht ist. Dann können wir (24) auf die Form

$$\psi = 4\pi s - \frac{4\pi}{r^3} \int_a^{r'} (s - \varrho') r'^2 d r' + \frac{n}{r^3} \tag{30}$$

bringen. Damit nun das Gleichgewicht stabil sei, muss jede der Grössen n und $s - \varrho'$ positiv sein; folglich ist der letzte Theil des zweiten Gliedes positiv und wird bei zunehmendem r kleiner, während der zweite Theil desselben Gliedes negativ ist und an absoluter Grösse zunimmt und der erste Theil einen constanten Werth hat. Mithin nimmt ψ bei wachsendem r ab. Weiter müssen wir, wenn die Kraft von der angegebenen Art ist, [Zusatz B (57)]

$$A_\nu = K r^\nu + K' r^{-\nu-1} \tag{31}$$

haben, und daher verschwindet das zweite Glied von (28). Wenn also für irgend einen Werth von r

$$\frac{d\,e_\nu}{d\,r} = 0$$

ist, so ist für denselben Werth

$$\frac{d^2 e_\nu}{d\,r^2} = -\frac{2(\nu - 1)}{r}\,\frac{d\,log\,\psi}{d\,\psi}\,e_\nu$$

eine positive Grösse, und dies beweist den Satz (1). Wenn endlich die Kraft von der in (2) angegebenen Art ist, so haben wir einfach $A_\nu = K r^\nu$, und daher verschwindet das zweite Glied von (29). Diese Gleichung liefert dann für Werthe von r, welche um eine unendlich kleine Grösse grösser als a sind,

$$\frac{d\,e_\nu}{d\,r} = -\frac{d\,log\,\psi}{d\,r}\,e_\nu,$$

was positiv ist. Folglich beginnt die Function e_ν vom Kern aus zu wachsen, und da sie nach (1) keinen Minimalwerth haben kann, so wächst sie nach aussen hin unaufhörlich.

823. Fall der Centrifugalkraft. — Wenn die Störung die aus der Rotation der Flüssigkeit herrührende ist, so ist das Potential der störenden Kraft

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

und dies ist gleich der Summe einer räumlichen harmonischen Function zweiten Grades und einer Constanten. Hieraus folgt [§§ 822, 779], dass die Flächen gleicher Dichtigkeit concentrische abgeplattete Rotationsellipsoide sind, welche eine gemeinschaftliche Axe haben, und deren Ellipticitäten von der Oberfläche aus nach innen zu immer kleiner werden.

Wir erhalten in § 822 (10)

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \frac{r^2\omega^2}{6}\left(\Theta_0^{(0)} + \Theta_2^{(0)}\right).$$

Dies liefert sofort, wegen (7) und (14),

$$\delta r = u_2\,\Theta_0^{(0)}.$$

Folglich ist

$$r + \delta r = r\left(1 + \frac{u_2}{r}\Theta_2^{(0)}\right)$$

$$= r\left[1 + \frac{u_2}{r}\left(\frac{1}{3} - cos^2\vartheta\right)\right],$$

oder, wenn wir die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen, was zulässig ist, weil ω und daher auch $\frac{u^2}{r}$ sehr klein sind,

$$(1) \qquad r + \delta r = r\left(1 - \frac{2u_2}{3r}\right)\left(1 + \frac{u_2}{r}\sin^2\vartheta\right).$$

Danach ist die Kugel, deren Radius r war, ein abgeplattetes Rotationsellipsoid von der Ellipticität [§ 822 (27)]

$$(2) \qquad e_2 = \frac{u_2}{r}$$

geworden.

Ihr Polardurchmesser ist um den Bruch $\frac{2u_2}{3r}$ oder $\frac{2e_2}{3}$ kleiner, ihr Aequatorialdurchmesser um $\frac{e_2}{3}$ grösser geworden, während ihr Volumen unverändert geblieben ist.

Um den Werth von u_2 zu erhalten, müssen wir Daten oder Voraussetzungen haben, welche uns in den Stand setzen, die Gleichung (15) zu integriren. Diese können in vielen Formen gegeben werden; es ist aber nur die eine, zu der wir uns jetzt wenden, für praktische Schlussfolgerungen ausgearbeitet worden.

824. Laplace's hypothetisches Gesetz über die Dichtigkeit im Innern der Erde. — Um die Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchung auf die Bestimmung des Gesetzes der Ellipticität der Schichten gleicher Dichtigkeit innerhalb der Erde, unter der Voraussetzung, dass dieselbe ursprünglich flüssig gewesen ist, anzuwenden, ist es unumgänglich nöthig, dass wir (da Beobachtungen darüber unmöglich sind) mit einer Hypothese über das Gesetz beginnen, nach welchem sich die Dichtigkeit mit dem Abstand vom Erdmittelpunkt ändert. Denn wir haben (§ 821) gesehen, zu wie sehr verschiedenen Resultaten wir gelangen, wenn wir die beiden äussersten Voraussetzungen machen, nämlich erstens, dass die Masse homogen sei, und zweitens, dass die Dichtigkeit im Centrum unendlich gross sei. In wenigen der bisher gemachten Messungen der Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten (siehe Bd. II., Eigenschaften der Materie) ist der angewandte Druck gross genug gewesen, um eine Verdichtung zu erzeugen, die mehr als $^1/_2$ Proc. betrug. Wie man erwarten konnte, hat sich herausgestellt, dass die in diesen Experimenten erhaltenen Verdichtungen in jedem Falle näherungsweise dem Druck einfach proportional sind; aber man hat experimentell noch keine Andeutung über das Gesetz der Zusammendrückbarkeit für eine Flüssigkeit unter einem Druck erhalten, der gross genug war, beträchtliche Verdichtungen hervorzubringen. Da es uns an Kenntniss darüber fehlt, so stellte Laplace die Hypothese auf, das Gesetz der Zusammendrückbarkeit der Masse, aus welcher die Erde vor ihrer Festwerdung bestand, sei folgendes: —



Die Zunahme des Quadrates der Dichtigkeit ist der Zunahme des Drucks proportional. Diese Hypothese führt, mittels der gewöhnlichen Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts, zu einem sehr einfachen Ausdruck für das Gesetz der Dichtigkeit, welcher noch weiter vereinfacht wird, wenn wir annehmen, die Dichtigkeit sei überall von endlicher Grösse.

Bei Vernachlässigung der störenden Kräfte haben wir (§§ 822, 752)

$$dp = \varrho\, d(V + N). \tag{1}$$

Nach der oben angegebenen Hypothese von **Laplace** ist aber, wenn k' eine gewisse Constante bezeichnet,

$$dp = k\varrho\, d\varrho. \tag{2}$$

Folglich ist

$$k\varrho + C = V + N,$$

oder nach § 822 (5)

$$k\varrho + C = 4\pi \int_r^{\mathrm{r}} r'\varrho'\,dr' + \frac{4\pi}{r}\int_a^r r'^2\varrho'\,dr' + \frac{\mu}{r}.$$

Wird jetzt mit r multiplicirt und sodann differentiirt, so folgt

$$k\frac{d}{dr}(r\varrho) + C = 4\pi \int_r^{\mathrm{r}} r'\varrho'\,dr'$$

und

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\varrho) = -\frac{4\pi}{k} r\varrho.$$

Setzen wir

$$\frac{4\pi}{k} = \frac{1}{\varkappa^2},$$

so kann das Integral dieser Gleichung in folgender Form ausgedrückt werden: —

$$r\varrho = F \sin\left(\frac{r}{\varkappa} + G\right).$$

Wenn wir voraussetzen, die ganze Masse sei flüssig, d. h. es sei kein fester Kern vorhanden, oder es gelte auf alle Fälle dasselbe Dichtigkeitsgesetz von der Oberfläche bis zum Centrum, so muss G verschwinden, da sonst die Dichtigkeit im Centrum unendlich gross sein würde. Wir werden daher im Folgenden

$$\varrho = \frac{F}{r}\sin\frac{r}{\varkappa} \tag{3}$$

annehmen. Für diesen Werth von ϱ ist es leicht, die Richtigkeit der Formel

$$\int_0^r r'^2\varrho'\,dr' = -\varkappa^2 r^2 \frac{d\varrho}{dr} \tag{4}$$

zu erkennen, indem jede Seite derselben den Werth

$$F x^2 \left(\sin\frac{r}{x} - \frac{r}{x}\cos\frac{r}{x}\right)$$

hat.

Wir sind jetzt vorbereitet zur Bestimmung des Werthes von u_2 in § 823, von welchem die Ellipticität der Schichten abhängt. Denn die Formel (15) des § 822 wird nach § 822 (23) und der vorhergehenden Gleichung (4)

$$(5)\begin{cases}\left(\frac{\mu-\mu'}{r^2} - 4\pi x^2\frac{d\varrho}{dr}\right)u_2 + \frac{4\pi}{5}\left[r^2\int_r^{\mathfrak{r}}\frac{u'_2}{r'}\frac{d\varrho'}{dr'}\,dr' + r^{-3}\int_a^r r'^4 u'_2\frac{d\varrho'}{dr'}\,dr'\right] \\ \qquad\qquad - \frac{4\pi}{5}\,q\,\frac{\mathfrak{u}_2 r^2}{\mathfrak{r}} = \frac{\omega^2 r^2}{2},\end{cases}$$

wo μ' die Masse der von dem Kern μ verdrängten, dem Dichtigkeitsgesetz (3) folgenden Flüssigkeit ist. In dem die Erde betreffenden Problem können wir $\mu' = \mu$ und natürlich $a = 0$ annehmen. Der Einfachheit wegen setzen wir noch

$$(6)\qquad r\frac{d\varrho}{dr}u_2 = v,$$

dividiren sodann durch r^2 und differentiiren. Es ergibt sich

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r^3}\right) + \frac{1}{x^2 r^6}\int^r r'^3 v'\,dr' = 0.$$

Wir multipliciren jetzt mit r^6 und differentiiren von Neuem; dann erhalten wir

$$(7)\qquad \frac{d^2 v}{dr^2} + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{6}{r^2}\right)v = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist bekanntlich

$$(8)\qquad v = C\left[\left(\frac{3}{r^2} - \frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{r}{x} + C'\right) - \frac{3}{xr}\cos\left(\frac{r}{x} + C'\right)\right],$$

so dass u_2 aus (6) bekannt ist. Nun haben wir schon bewiesen, dass u vom Centrum aus nach aussen hin wächst; es muss daher

$$C' = 0$$

sein, da sonst u_2 im Centrum unendlich gross sein würde. Wir erhalten also schliesslich

$$(9)\qquad e_2 = \frac{u_2}{r} = -\frac{C}{F}\,\frac{\left(\frac{3}{r^2} - \frac{1}{x^2}\right)\tan\frac{r}{x} - \frac{3}{xr}}{\tan\frac{r}{x} - \frac{r}{x}}.$$

Die Constanten sind natürlich aus den bekannten Werthen der Ellipticität der Oberfläche und der Winkelgeschwindigkeit der Masse zu bestimmen.

Jetzt geht (5) an der Oberfläche über in

$$(10)\qquad \frac{4\pi}{\mathfrak{r}^2}\,\mathfrak{u}_2\int_0^{\mathfrak{r}}\varrho r^2\,dr + \frac{4\pi}{5\mathfrak{r}^3}\int_0^{\mathfrak{r}} r^4\frac{d\varrho}{dr}u_2\,dr = \frac{\mathfrak{r}^2\omega^2}{2} + \frac{4\pi}{5}\,q\,\mathfrak{u}_2\mathfrak{r}.$$

Wir können weiter ϱ, $\frac{d\varrho}{dr}$ und q vermittels der Formeln (3), (4), (6) und (8)

eliminiren und überall $r e_2$ für u_2 setzen. Wenn ausserdem m das Verhältniss $\left(\frac{1}{289}\right)$ bezeichnet, in welchem die Centrifugalkraft am Aequator zur Schwerkraft steht, so kann ω vermittels der Gleichung

$$m = \frac{\mathfrak{r}\,\omega^2}{\frac{4\pi}{\mathfrak{r}^2}\int\limits_0^{\mathfrak{r}} \varrho\, r^2\, d\, r}$$

eliminirt werden, aus welcher mit Hülfe von (3) die Grösse ϱ entfernt wird. Durch diese Substitutionen transformirt sich (10) in

$$\frac{4\pi F \mathfrak{e}}{\mathfrak{r}} \int\limits_0^{\mathfrak{r}} r \sin\frac{r}{x}\, d\, r + \frac{4\pi C}{5\,\mathfrak{r}^3} \int\limits_0^{\mathfrak{r}} r^3 \left[\left(\frac{3}{r^2} - \frac{1}{x^2}\right) \sin\frac{r}{x} - \frac{3}{x\,r} \cos\frac{r}{x}\right] dr$$
$$= \frac{4\pi m F}{2\,\mathfrak{r}} \int\limits_0^{\mathfrak{r}} r \sin\frac{r}{x}\, d\, r + \frac{4\pi F}{5}\, \mathfrak{r}\,\mathfrak{e} \sin\frac{\mathfrak{r}}{x}.$$

Setzen wir

$$\tan\frac{\mathfrak{r}}{x} = t \text{ und } \frac{\mathfrak{r}}{x} = \vartheta,$$

so wird der integrirte Ausdruck, nach Division durch $\frac{4\pi F \mathfrak{e}}{5\,\mathfrak{r}}$,

$$5(t - \vartheta) - \frac{t - \vartheta}{(3 - \vartheta^2)\,t - 3\,\vartheta} \left[15(t - \vartheta) + \vartheta^3 - 6\,t\,\vartheta^2\right]$$
$$= \frac{5\,m}{2\,\mathfrak{e}} (t - \vartheta) + \vartheta^2 t$$

Hieraus folgt leicht

$$\text{(11)} \qquad \frac{5\,m}{2\,\mathfrak{e}} = \frac{\vartheta^4 + \vartheta^3 t + \vartheta^4 t^2 - 2\,t^2\vartheta^2}{(t - \vartheta)\left[(3 - \vartheta^2)\,t - 3\,\vartheta)\right]}.$$

Setzen wir $1 - z$ für $\frac{\vartheta}{t}$, d. h. für $\frac{\frac{\mathfrak{r}}{x}}{\tan\frac{\mathfrak{r}}{x}}$, so wird diese Formel etwas einfacher und kann folgendermaassen geschrieben werden:

$$\text{(12)} \qquad \frac{5\,m}{2\,\mathfrak{e}} = \frac{\vartheta^4 - 3\,z\,\vartheta^2 + z^2\vartheta^2}{z\,(3\,z - \vartheta^2)}.$$

Die mittlere Dichtigkeit ist natürlich

$$\frac{\int\limits_0^{\mathfrak{r}} \varrho\, r^2\, d\, r}{\int\limits_0^{\mathfrak{r}} r^2\, d\, r} = \frac{F x^2 \left(\sin\frac{\mathfrak{r}}{x} - \frac{\mathfrak{r}}{x} \cos\frac{\mathfrak{r}}{x}\right)}{\frac{\mathfrak{r}^3}{3}} = \frac{3\,F}{\mathfrak{r}}\, \frac{\sin\frac{\mathfrak{r}}{x} - \frac{\mathfrak{r}}{x}\cos\frac{\mathfrak{r}}{x}}{\left(\frac{\mathfrak{r}}{x}\right)^2}.$$

Es sei nun q_0 die mittlere Dichtigkeit und q, wie oben, die Dichtigkeit auf der Oberfläche, dann ist

$$q_0 = \frac{3F}{r} \frac{\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta}{\vartheta^2},$$

$$q = \frac{F}{r}\sin\vartheta,$$

folglich

$$(13) \qquad \frac{q_0}{q} = 3\,\frac{t-\vartheta}{t\vartheta^2} = \frac{3z}{\vartheta^2}.$$

Wenn wir dieses Verhältniss der mittleren Dichtigkeit zur Dichtigkeit in der Oberfläche mit f bezeichnen, eine Grösse, welche experimentell bestimmt werden kann, so liefert (13)

$$f = 3\,\frac{t-\vartheta}{t\vartheta^2}.$$

Aus dieser Gleichung kann ϑ durch Annäherung bestimmt werden, und dann drückt (12) $\mathfrak{e}$ durch bekannte Grössen aus. In der That geht (12) über in

$$(14) \qquad \frac{5m}{2\mathfrak{e}} = 3\,\frac{1 - f + \frac{f^2\vartheta^2}{9}}{f(f-1)} = \frac{f\vartheta^2}{3(f-1)} - \frac{3}{f}.$$

Aus (13) und (14) berechnet man ohne Mühe die Zahlen der Columnen IV und V der folgenden Tabelle. Die Columne VII zeigt das Verhältniss, in welchem das Trägheitsmoment in Beziehung auf einen mittleren Durchmesser für das angenommene Dichtigkeitsgesetz zu dem Werthe steht, den dasselbe unter der Voraussetzung, die Erde wäre homogen, haben würde.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
$1-\frac{\vartheta}{t}$	$\frac{\vartheta}{\pi}180^0$	ϑ	f	$\mathfrak{e}$	$\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}{C}$	$\frac{C}{2/5\,Mr^2}$
3·91	140^0	4·244	1·966	$\frac{1}{292}$	0·00335	0·843
4·24	$142^0{\cdot}5$	2·487	2·057	$\frac{1}{295}$	·00330	·835
4·61	145^0	2·531	2·161	$\frac{1}{299}$	·00325	·826
5·04	$147^0{\cdot}5$	2·574	2·282	$\frac{1}{302{\cdot}5}$	·00321	·818
5·53	150^0	2·618	2·423	$\frac{1}{306{\cdot}5}$	·00315	·810
6·11	$152^0{\cdot}5$	2·662	2·589	$\frac{1}{311}$	·00309	·801
6·80	155^0	2·705	2·788	$\frac{1}{315}$	·00304	·792

825. Dynamischer Ursprung der Präcession und Nutation. — Die Erscheinungen der Präcession und der Nutation rühren daher, dass die Erde nicht centrobarisch (§ 526) ist und deshalb die Sonne und den Mond anzieht und von diesen Körpern Einwirkungen erleidet in Richtungen, welche, ausser wenn sie in der Ebene des Aequators der Erde liegen, nicht genau durch den Trägheitsmittelpunkt derselben gehen. Daher erhält man, wenn man die Anziehung jedes der beiden Körper aus ihrer wirklichen Linie in eine durch den Trägheitsmittelpunkt der Erde gehende parallele Linie versetzt (§ 555), ein Kräftepaar, welches, wenn wir zunächst der Einfachheit wegen annehmen, die Schwerkraft sei um die Polaraxe herum symmetrisch, die Erde um einen Durchmesser ihres Aequators in einer solchen Richtung zu drehen strebt, dass die Ebene des Aequators dem störenden Körper zugewandt wird. Das Moment dieses Kräftepaars ist [§ 539 (14)] gleich

$$S\,\frac{3(C-A)\sin\delta\cos\delta}{D^3}, \tag{15}$$

wo S die Masse des störenden Körpers, D seine Entfernung, δ seine Declination und C und A die beziehungsweise für den Polar- und den Aequatorialdurchmesser genommenen Trägheitsmomente der Erde bezeichnen. Aller Wahrscheinlichkeit nach (§§ 796, 797) sind die für die beiden Hauptaxen in der Ebene (§ 795) des Aequators genommenen Trägheitsmomente sehr merklich von einander verschieden; es leuchtet aber ein und wird im zweiten Bande bewiesen werden, dass die Präcession und die Nutation doch so beschaffen sind, wie sie sein würden, wenn die Erde um eine Axe symmetrisch wäre und zum Trägheitsmoment in Beziehung auf die äquatorialen Durchmesser das arithmetische Mittel zwischen dem grössten und dem kleinsten Werthe hätte, den dieses Trägheitsmoment thatsächlich hat. Aus § 539 (12) sehen wir, dass zur Bestimmung der Differenzen der in Beziehung auf die Hauptaxen genommenen Trägheitsmomente, oder, falls um eine Axe Symmetrie stattfindet, des Werthes von $C - A$ im Allgemeinen eine Kenntniss der Schwerkraft auf der Oberfläche oder im äusseren Raume, oder [§§ 794, 795] der Gestalt der Meeresniveaufläche genügt, und dass es keiner Data in Betreff der Dichtigkeit im Innern der Erde bedarf.

Setzt man § 539 (12) gleich § 794 (17), wo $F_2(\vartheta, \varphi)$, wenn die Meeresniveaufläche als symmetrisch vorausgesetzt wird, einfach $\epsilon\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)$ wird, so erhalten wir

$$\frac{M\mathfrak{r}^2}{r^3}\left(\mathfrak{e}-\frac{1}{2}m\right)\left(\frac{1}{3}-\cos^2\vartheta\right)=\frac{3}{2}\,\frac{C-A}{r^3}\left(\frac{1}{3}-\cos^2\vartheta\right),$$

und hieraus folgt

$$C-A=\frac{2}{3}\,M\mathfrak{r}^2\left(\mathfrak{e}-\frac{1}{2}m\right). \tag{16}$$

In ähnlicher Weise können wir darthun, dass dieselbe Formel für den realen Fall gilt, in welchem die Meeresniveaufläche ein Ellipsoid von drei ungleichen Axen ist, von denen die eine mit der Rotationsaxe zusammenfällt; es bezeichnet dann e den Mittelwerth der Ellipticitäten der beiden durch die Rotationsaxe gehenden Hauptschnitte dieses Ellipsoides und A den Mittelwerth der für die beiden in der Ebene des Aequators liegenden Hauptaxen genommenen Trägheitsmomente.

826. Die Präcession belehrt uns über die Vertheilung der Erdmasse, während die Grösse der Schwerkraft auf der Erdoberfläche es nicht thut. — Die durch die störenden Kräfte erzeugten Winkelbeschleunigungen sind (§ 281) den Momenten der Kräftepaare direkt und dem für einen äquatorialen Durchmesser genommenen Trägheitsmoment der Erde umgekehrt proportional. Es würden aber (Band II) die in der Präcession und Nutation beobachteten Gesammtresultate, wenn der Zustand der Erde sich änderte, direkt wie $C - A$ und umgekehrt wie C variiren. Wir haben gesehen (§ 794), dass $C - A$ unverändert bleibt, wenn die Dichtigkeit im Innern der Erde eine andere wird, dabei aber die Schwerkraft auf der Oberfläche [und folglich (§ 793) auch im äusseren Raume] keine Aenderung erleidet. Anders verhält es sich dagegen mit der Grösse C, welche kleiner oder grösser sein wird, jenachdem die Masse in den um den Mittelpunkt liegenden Theilen mehr verdichtet, oder bis auf eine kleine Entfernung von der Oberfläche näherungsweise mehr homogen ist. So kommt es, dass ein Vergleich zwischen der dynamischen Theorie und der Beobachtung der Präcession und Nutation uns über die Vertheilung der Masse im Innern der Erde belehrt (ganz so, wie wir aus der Grösse der Beschleunigung von Kugeln oder Cylindern, die eine geneigte Ebene hinunterrollen, erkennen können, ob wir einen vergoldeten Messingkörper ohne Höhlung oder einen hohlen Goldkörper von der nämlichen Schwere und gleicher Oberfläche vor uns haben), während wir eine solche Belehrung nicht schöpfen können aus der Gestalt der Meeresoberfläche, der Vertheilung der Schwere auf der Erdoberfläche oder der Störung der Bewegung des Mondes, ohne eine Hypothese, wie das anfängliche Flüssigsein oder die gegenwärtige Uebereinstimmung der Oberflächen gleicher Dichtigkeit mit den Flächen anzunehmen,



welche, wenn die ganze Erde ihrer Starrheit beraubt würde, Flächen gleichen Drucks sein würden.

827. Bestimmung der Constanten der Präcession mittels des Laplace'schen Gesetzes. — Wir wollen aber zunächst untersuchen, welche Grösse die terrestrische Constante $\frac{C-A}{C}$ der Präcession und Nutation haben würde, wenn Laplace's Gesetz über die Dichtigkeit im Innern der Erde richtig wäre, und wenn die Schichten gleicher Dichtigkeit für die jetzige Winkelgeschwindigkeit der Rotation Niveauflächen wären. Jedes Trägheitsmoment, welches den letzteren Theil dieser Annahme involvirt, soll durch einen grossen deutschen Buchstaben bezeichnet werden.

Das Trägheitsmoment für die Polaraxe ist nach § 281

$$\mathfrak{C} = 2\int_0^{\mathrm{r}}\int_0^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \varrho\, \mathrm{r}^2 \sin\vartheta\, d\mathrm{r}\, d\vartheta\, d\varphi \,.\, \mathrm{r}^2 \sin^2\vartheta,$$

wo der erste Factor unter dem Integralzeichen ein Element der Masse, der zweite das Quadrat seines Abstandes von der Axe ist.

Für das in Beziehung auf eine andere Hauptaxe (die irgend ein äquatorialer Radius sein kann, hier aber in der Ebene angenommen wird, von welcher aus φ gemessen wird) genommene Trägheitsmoment erhalten wir

$$\mathfrak{A} = 2\int_0^{\mathrm{r}}\int_0^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \varrho\, \mathrm{r}^2 \sin\vartheta\, d\mathrm{r}\, d\vartheta\, d\varphi \,.\, \mathrm{r}^2(1 - \sin^2\vartheta \sin^2\varphi).$$

Nun ist nach § 823

$$\mathrm{r} = r\left[1 + e_2\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right],$$

wo r den mittleren Radius der durch (r, ϑ, φ) gehenden Oberfläche gleicher Dichtigkeit bezeichnet; daraus folgt

$$\mathrm{r}^4 d\mathrm{r} = \frac{1}{5}\frac{d\,\mathrm{r}^5}{dr}\, dr = r^4\, dr + \frac{d\,.\,r^5 e_2}{dr}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right) dr.$$

Es sei nun

$$(17)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\mathrm{r}} \varrho\, r^4\, dr = K \\ \text{und} \\ \displaystyle\int_0^{\mathrm{r}} \varrho\, \frac{d\,.\,r^5 e_2}{dr}\, dr = K_1, \end{cases}$$

dann ist

$$\mathfrak{C} = 2\int_0^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \left[K + K_1\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right],$$

oder näherungsweise

$$\mathfrak{C} = \frac{8\pi}{3} K. \tag{18}$$

Ferner ist

$$(19)\left\{\begin{aligned} \mathfrak{C} - \mathfrak{A} &= 2\int_0^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \left[K + K_1\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right](\sin^2\vartheta - 1 + \sin^2\vartheta \sin^2\varphi) \\ &= \frac{8\pi}{15} K_1. \end{aligned}\right.$$

Nun haben wir

$$K = \int_0^{\mathfrak{r}} \varrho r^4 dr = F\int_0^{\mathfrak{r}} r^3 \sin\frac{r}{\varkappa}\, dr,$$

oder, wenn wir wie früher $\vartheta = \frac{\mathfrak{r}}{\varkappa}$ setzen,

$$K = F\varkappa^4 \cos\vartheta(-\vartheta^3 + 3\vartheta^2 t + 6\vartheta - 6t).$$

Weiter ist

$$K_1 = \int_0^{\mathfrak{r}} \varrho \frac{d}{dr}(r^5 e_2)\, dr = \mathfrak{r}^5 \mathfrak{e} q - \int_0^{\mathfrak{r}} r^5 e_2 \frac{d\varrho}{dr}\, dr,$$

und dies geht nach § 826 (10) über in

$$(20)\left\{\begin{aligned} K_1 &= 5\,\mathfrak{r}^2 \mathfrak{e}\int_0^{\mathfrak{r}} \varrho r^2\, dr - \frac{5\,\mathfrak{r}^5\omega^2}{8\pi} \\ &= 5\left(\mathfrak{e} - \frac{m}{2}\right) F\varkappa^4 \vartheta^2 (t - \vartheta)\cos\vartheta. \end{aligned}\right.$$

Auf diese Weise erhalten wir schliesslich

$$(21)\left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}{C} = \frac{1}{5}\frac{K_1}{K} &= \left(\mathfrak{e} - \frac{m}{2}\right)\frac{\vartheta^2(t - \vartheta)}{-\vartheta^3 + 3\vartheta^2 t + 6\vartheta - 6t} \\ &= \left(\mathfrak{e} - \frac{m}{2}\right)\frac{z}{2 + \left(1 - \frac{6}{\vartheta^2}\right)z}. \end{aligned}\right.$$

Mittels dieser Formel sind die Zahlen der Columne VI in der Tabelle des § 824 berechnet worden. Aus (19) und (20) sehen wir, dass

$$\mathfrak{C} - \mathfrak{A} = \frac{8\pi}{3}\left(\mathrm{r}^2\,\mathfrak{e}\int_0^{\mathrm{r}} \varrho\, r^2\, dr - \frac{\mathrm{r}^5\omega^2}{8\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{3} M\,\mathrm{r}^2\left(\mathfrak{e} - \frac{m}{2}\right)$$

ist, was, wie es auch der Fall sein muss, mit § 825 (16) übereinstimmt.

828. **Vergleich der Laplace'schen Hypothese mit der Beobachtung.** — Aus den von Le Verrier und Serret mit grosser Sorgfalt ausgeführten Untersuchungen über die Präcession und Nutation geht hervor, dass der wahre Werth von $\frac{C-A}{C}$ nur sehr wenig von 0·00327 *) verschieden ist. Nach der Tabelle des § 824 stimmt dies mit $\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}{C}$ für $f = 2{\cdot}1$ überein, was $\mathfrak{e} = \frac{1}{297}$ liefert. Dies sind (§§ 792, 796, 797) die wahrscheinlichsten Werthe, die wir diesen Elementen durch Beobachtung beilegen können. Danach ist die Hypothese von Laplace, soweit wir die Mittel haben, sie zu prüfen, bewahrheitet.

829. **Prüfung der Laplace'schen Hypothese mit Beziehung auf die Zusammendrückbarkeit einiger Stoffe.** — Um die Hypothese von Laplace noch weiter zu prüfen, ist zu untersuchen, ob die Resultate derselben Etwas enthalten, was mit unserer experimentellen Kenntniss der Zusammendrückbarkeit der Materie unter Druckkräften, wie wir sie in unseren Laboratorien anwenden können, unvereinbar wäre. Zu diesem Zwecke ist der vorhergehenden Tabelle die erste Columne zugefügt worden. Aus derselben lässt sich die nach dem angenommenen Dichtigkeitsgesetze für die respectiven Werthe von ϑ erforderte Zusammendrückbarkeit der obersten Schicht der flüssigen Masse entnehmen, welche die Erdrinde bildete. In der That sind die Zahlen in der Columne I diejenigen, durch welche der Erdradius dividirt werden muss, um gemäss dem Werthe, welchen die Schwerkraft auf der Oberfläche hat, die Längen des Compressionsmodulus (§ 688) der obersten Flüssigkeitsschicht zu finden.

Wir haben nach § 824 (3)

$$q = \frac{F}{r}\sin\frac{r}{x},\quad \frac{dq}{dr} = -\frac{F}{r}\left(\frac{\sin\frac{r}{x}}{r} - \frac{\cos\frac{r}{x}}{x}\right);$$

*) Annales de l'Observatoire Impérial de Paris, 1859, p. 324.

hieraus ergibt sich an der Oberfläche

$$\left[-\frac{1}{q}\frac{dq}{dr}\right] = \frac{1}{\mathfrak{r}}\left(1 - \frac{\vartheta}{t}\right).$$

Die entsprechenden Zahlen für mehrere verschiedene flüssige und feste Substanzen sind folgende: —

Alkohol	37
Wasser	27
Quecksilber	27
Glas	5·0
Kupfer	8·1
Eisen	4·1
Geschmolzene Lava, nach Laplace's Gesetz, für $f = 2·1$	4·42

Dieser Vergleich kann entschieden als dem Gesetz von Laplace nicht widersprechend angesehen werden; es ist aber wünschenswerth, dass Experimente über die Zusammendrückbarkeit geschmolzener Felsen wirklich angestellt würden.

830. **Ein aus der Ellipticität der Erde und der Fluthreibung gezogener Schluss.** — In § 276 wurde bewiesen, dass die Ebbe und Fluth die Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Erde zu verringern bestrebt sein muss, und in einem späteren Bande wird dargethan werden, dass diesem Streben nur in einem ganz geringen Grade durch die Beschleunigung entgegen gearbeitet wird, welche aus der säcularen Abkühlung und Zusammenziehung der Erde resultirt. Seit dem Druck des § 276 sind uns Ergebnisse der physischen Astronomie bekannt geworden, welche den in § 405 aufgestellten Satz umstürzen und so dem § 276 eine praktische Bedeutung beilegen, welche jener Satz ihm versagte. Der in § 405 angegebene Satz wurde von Laplace aus der Uebereinstimmung der Beobachtung und seiner Dynamik der mittleren Bewegung des Mondes gezogen. Im Jahre 1853 wies Adams in Laplace's Werk einen Fehler nach, der bis dahin der Aufmerksamkeit der Astronomen entgangen war, und zeigte, dass ungefähr nur die Hälfte der beobachteten Beschleunigung der mittleren Bewegung des Mondes in Beziehung auf die Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Erde nach Laplace's Theorie ihre Erklärung fände. Im Jahre 1859 theilte er Delaunay als Resultat, zu dem er schliesslich gelangt sei, mit: — dass der Mond am Ende eines Jahrhunderts sich 5·7″ vor der Lage befindet, welche er in Beziehung auf einen Meridian der Erde nach den Winkelgeschwindigkeiten

der beiden Bewegungen und der aus den verschiedenen bekannten störenden Ursachen genau berechneten Beschleunigung seiner eigenen Bewegung beim Beginn des Jahrhunderts haben würde. Delaunay bewahrheitete bald nachher dieses Resultat und erklärte im Anfang des Jahres 1866, dass diese Erscheinung sich nur durch die Annahme einer Verlangsamung der Rotation der Erde durch die Fluthreibung erklären lasse. Indem Adams diese Hypothese benutzte und die daraus sich ergebende Verlangsamung der mittleren Bewegung des Mondes durch die Fluthreaction (§ 276) in Rechnung zog, fand er in einer Berechnung, die er uns mittheilte, unter der näherungsweise richtigen Voraussetzung, dass die aus den Sonnen- und Mondfluthen herrührenden Theile der Verlangsamung der Erdrotation den Quadraten der bezüglichen Fluth erzeugenden Kräfte proportional sind, 22^s als die Zeit, um welche die Erde in einem Jahrhundert hinter einer vollkommenen zu Anfang des Jahrhunderts gestellten Uhr zurückbleiben würde. Wenn die Verlangsamung, welche in einem Jahrhundert diese Gesammtwirkung hervorbringt, gleichförmig (§ 35, b) wäre, so würde die Erde, als Chronometer angesehen, in der Mitte des Jahrhunderts um 0·22 einer Secunde und am Ende des Jahrhunderts um 0·44 einer Secunde per Jahr langsamer gehen. Der letztere Betrag ist $\frac{1}{70,000,000}$ der jetzigen Winkelgeschwindigkeit, und wenn die Grösse der Verlangsamung seit 10,000,000 Jahrhunderten gleichförmig gewesen wäre, so müsste vor dieser Zeit die Erde um $\frac{1}{7}$ schneller als gegenwärtig rotirt haben und die Centrifugalkraft im Verhältniss von 64 zu 49 grösser gewesen sein. Wenn die Erstarrung damals oder früher stattfand, so muss die Ellipticität der oberen Schichten gleicher Dichtigkeit $\frac{1}{230}$ statt ungefähr $\frac{1}{300}$ gewesen sein, welchen Werth sie jetzt sicherlich hat. Es ist unmöglich, dem Schluss zu entgehen, dass die Erstarrung vor weit weniger als tausend Millionen Jahren erfolgt ist. Im Zusatz D wird aus der Theorie der Wärmeleitung gefolgert, dass die Erstarrung vor etwa hundert Millionen Jahren stattgefunden haben, aber nicht fünfhundert Millionen Jahre entfernt sein kann.

831. Plötzliche Aenderungen der Dichtigkeit im Innern der Erde sind nicht unwahrscheinlich. — Nach den bekannten Thatsachen hinsichtlich der oben (§ 829) angegebenen Zusammen-

drückbarkeit terrestrischer Substanzen ist es höchst wahrscheinlich, dass sogar in einem chemisch homogenen Stoffe nach unten zu eine continuirliche Zunahme der Dichtigkeit in einem Betrage erfolgt, der mit dem in Laplace's Gesetz vorausgesetzten vergleichbar ist. Es ist aber nicht unwahrscheinlich, dass auch discontinuirliche Aenderungen in der Beschaffenheit der Substanz vorhanden sein mögen, wie z. B. wenn ein grosser Theil des Erdinnern zu einer früheren Zeit aus geschmolzenen Metallen bestanden hätte, die jetzt erstarrt sind. Wir fügen daher eine Lösung des Problems hinzu, die Ellipticitäten der Oberflächen einer rotirenden Masse zu bestimmen, die aus zwei sich mit einander nicht vermischenden Flüssigkeiten von ungleicher Dichtigkeit besteht, wobei jedoch jede der Flüssigkeiten als unzusammendrückbar vorausgesetzt wird.

Es seien ϱ und $\varrho + \varrho'$ die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten; die Flüssigkeit von der Dichte $\varrho + \varrho'$ bilde das Sphäroid

$$r = a'\left[1 + \varepsilon'\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right], \tag{1}$$

während die Flüssigkeit von der Dichte ϱ den Raum zwischen dem Sphäroid (1) und der ausserhalb desselben liegenden concentrischen und coaxalen Oberfläche

$$r = a\left[1 + \varepsilon\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right] \tag{2}$$

ausfüllen möge. Ferner möge die ganze Masse mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω rotiren. Die Bedingungen des Gleichgewichts sind, dass die Oberfläche jedes Sphäroids eine Fläche constanten Potentials sei.

Nun ist das Potential in einem Punkte r, ϑ in der äusseren Flüssigkeit

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{4\pi\varrho}{3}\left[\frac{3a^2 - r^2}{2} + \frac{3}{5}r^2\varepsilon\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right] \\ &+ \frac{4\pi\varrho'}{3}\left[\frac{a'^3}{r} + \frac{3}{5}\frac{a'^5}{r^3}\varepsilon'\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right] \\ &+ \frac{1}{3}\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Die erste Zeile ist das aus einer das grössere Sphäroid ausfüllenden Flüssigkeit von der Dichte ϱ herrührende Potential, die zweite das Potential, welches aus einer das innere Sphäroid erfüllenden Flüssigkeit von der Dichte ϱ' entsteht, die dritte das in räumlichen harmonischen Functionen dargestellte Potential $\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\vartheta\right)$ der Centrifugalkraft.

Substituiren wir in (3) der Reihe nach die in (1) und (2) angegebenen Werthe von r, vernachlässigen die zweiten, u. s. w. Potenzen der Ellipticitäten und setzen die Summe der Coefficienten von $\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)$ gleich Null, so erhalten wir zwei Gleichungen, aus denen sich

$$(4)\qquad \varepsilon = \frac{\varrho + \frac{1}{5}\varrho'\left(2 + 3\,\frac{a'^5}{a^5}\right)}{\left(\varrho + \frac{2}{5}\varrho'\right)\left(\frac{2}{5}\varrho + \frac{a'^3}{a^3}\varrho'\right) - \frac{9}{25}\varrho\varrho'\,\frac{a'^5}{a^5}} \cdot \frac{3\,\omega^2}{8\,\pi}$$

ergibt. Der entsprechende Werth von ε' ist aus der Gleichung

$$\varepsilon\left(\varrho + \frac{a'^3}{a^3}\varrho'\right) = \varepsilon'\left\{\varrho + \frac{1}{5}\varrho'\left(2 + 3\,\frac{a'^5}{a^5}\right)\right\}$$

zu entnehmen.

Drückt man ω^2 durch die bekannte Grösse m aus, so erhält man

$$(5)\qquad \frac{3\,\omega^2}{8\,\pi} = \frac{m}{2}\left(\varrho + \frac{a'^3}{a^3}\varrho'\right).$$

Auch ist zu einem genügenden Grade der Genauigkeit

$$(6)\qquad \begin{cases} C = \frac{8\,\pi}{15}\,a^5\left(\varrho + \frac{a'^5}{a^5}\varrho'\right) \\ M = \frac{4\,\pi}{3}\,a^3\left(\varrho + \frac{a'^3}{a^3}\varrho'\right), \end{cases}$$

und die mittlere Dichtigkeit ist offenbar

$$(7)\qquad \varrho + \frac{a'^3}{a^3}\varrho'.$$

Die numerischen Werthe der Ausdrücke (4) und (7) sind näherungsweise aus der Beobachtung und aus Experimenten bekannt, so dass, wenn wir einen Werth von $\frac{a'}{a}$ annehmen, wir sofort ϱ und ϱ' und daraus den Werth von $\frac{C-A}{C}$ bestimmen können.

Aus den hier gegebenen Formeln können, wie sich leicht zeigen lässt, mit der Beobachtung sehr nahe übereinstimmende Resultate hinsichtlich der Präcession, des Verhältnisses der Dichtigkeit auf der Oberfläche zur mittleren Dichtigkeit und der Ellipticität der Meeresniveaufläche gezogen werden, ohne dass man unzulässige Hypothesen über die relativen Volumina und Dichtigkeiten der beiden vorausgesetzten Flüssigkeiten zu Hülfe zu nehmen hätte. Dieser Gegenstand muss jedoch dem Leser als Uebungsaufgabe überlassen werden.

832. Starrheit der Erde. — Diese Berechnungen und alle bisher über die Flutherscheinungen und die Präcession und Nutation veröffentlichten dynamischen (sowohl die statischen, wie die kinetischen) Untersuchungen, mit alleiniger Ausnahme der unten erwähnten, setzten voraus, dass die äussere Oberfläche der festen Erdrinde absolut starr sei. Vor wenigen Jahren *) wurde zum

*) „On the Rigidity of the Earth.“ W. Thomson. *Trans. R. S.*, May 1862.

ersten Male die Frage erhoben: Behält die Erde ihre Gestalt mit vollkommener Starrheit bei, oder gibt sie in merklicher Weise dem deformirenden Streben der Attractionskräfte nach, welche Mond und Sonne auf ihre oberen Schichten und ihre innere Masse ausüben? In einem gewissen Grade muss sie nachgeben, da keine Substanz eine unendlich grosse Starrheit besitzt; ob aber diese Fluthen der festen Erdmasse gross genug sind, um durch irgend eine Art Beobachtung auf directem oder auf indirectem Wege entdeckt werden zu können, ist noch nicht ausgemacht worden. Das negative Resultat der Versuche, ihren Einfluss auf die Meeres- und Seefluthen, wie sie bisher beobachtet sind, und auf die Präcession und Nutation zu erforschen, genügt, wie wir sehen werden, die bis jetzt so vorherrschende Hypothese zu widerlegen, dass wir auf einer dünnen Schale fester Substanz leben, welche eine flüssige Masse geschmolzener Felsen und Metalle umhülle, und beweist im Gegentheil, dass die Erde im Ganzen weit starrer als irgend einer der Felsen ist, welche ihre obere Rinde ausmachen.

833. Die Beschaffenheit des deformirenden Einflusses wird leicht verstanden werden, wenn wir betrachten, dass, wenn die ganze Erde vollkommen flüssig wäre, ihre Oberfläche zusammenfallen würde mit einer Fläche constanten Potentials in Beziehung auf die Attraction ihrer eigenen Masse, die Centrifugalkraft ihrer Rotation und die Fluth erzeugende Resultante (§ 804) der Kräfte des Mondes und der Sonne und deren kinetische Reactionen *). So würden (§§ 819, 824) die vollen Mond- und Sonnengleichgewichtsfluthen eintreten, und deren Höhe würde $2^1/_2$ mal so gross sein, wenn die Flüssigkeit homogen wäre, oder nahezu doppelt so gross, wenn die Flüssigkeit heterogen wäre und ihre Dichtigkeit nach L a p l a c e's hypothetischem Gesetz zunähme. Wenn jetzt eine sehr dünne Schicht einer leichteren Flüssigkeit hinzugefügt würde, so würde diese Schicht die frühere

---

*) Es wird im zweiten Bande gezeigt werden, dass die „Gleichgewichtstheorie" der Fluthen für einen Ocean von gleichmässiger oder nach unten hin zunehmender Dichtigkeit, welcher einen festen Kern vollständig bedeckt, wegen der täglichen Rotation eine Correction erfordert, aber eine um so kleinere Correction, je kleiner dieser Kern ist, und dass sie, wenn kein solcher Kern vorhanden ist, vollständig mit der „kinetischen Theorie" übereinstimmt, immer vorausgesetzt, dass die Winkelgeschwindigkeit für die gewöhnlichen Annäherungen (§§ 794, 801, 802, 815) nicht zu gross ist, welche erfordern, dass auf keine Weise eine mehr als unendlich kleine Abweichung von der Kugelgestalt stattfinde. Es ist interessant zu bemerken, dass dieser Satz nicht erfordert, dass die Fluthdeformationen klein seien im Vergleich zu der durch die Centrifugalkraft der Rotation erzeugten Abweichung von 70,000 engl. Fuss.

Grenzfläche in einer ringsherum nahezu gleichen Höhe bedecken und unter den Einflüssen der Fluth mit jener Fläche einfach steigen und fallen, ohne mehr als unendlich kleine Variationen in ihrer eigenen Tiefe zu zeigen. Wenn also der feste Theil der Erde so wenig Starrheit besässe, dass es ihm gestattet wäre, in seiner Gestalt nahezu in demselben Grade nachzugeben, als wenn er flüssig wäre, so würde fast Nichts von dem stattfinden, was wir Ebben und Fluthen nennen — Fallen und Steigen des Wassers in Beziehung auf das Land —, sondern Meer und Land zusammen würden jede zwölf Mondstunden einige Fuss steigen und fallen. Dies würde, wie wir sehen werden, auch der Fall sein, wenn die geologische Hypothese einer dünnen Erdrinde wahr wäre. Die Erscheinungen der Ebbe und Fluth, wie sie wirklich erfolgen, liefern also eine sichere Widerlegung jener Hypothese. Wir werden in der That alsbald sehen, dass sogar eine continuirliche feste Kugel von derselben Masse und demselben Durchmesser wie die Erde, wenn sie homogen und von derselben Starrheit (§ 680) wie Glas oder Stahl wäre, in ihrer Gestalt den Flutheinwirkungen beziehungsweise $^3/_5$ oder $^1/_3$ mal so viel nachgeben würde, wie eine vollkommen flüssige Kugel, und weiter wird gezeigt werden, dass die Wirkung eines solchen Nachgebens in dem festen Körper, je nachdem seine Starrheit gleich der des Glases oder der des Stahls vorausgesetzt wird, darin bestehen würde, die Fluthen auf ungefähr $^2/_5$ oder $^2/_3$ von dem Betrage zu reduciren, den sie haben würden, wenn die Starrheit unendlich gross wäre.

834. Fluthen der elastischen festen Erdtheile. — Um dies zu beweisen und diese Frage der Fluthen in der elastischen festen Erde zu erläutern, wollen wir die Lösung des allgemeinen Problems des § 696 explicit entwickeln für den Fall einer homogenen elastischen festen Kugel, welche keinem Oberflächenzuge ausgesetzt ist, sondern durch ein im Gleichgewicht befindliches System von Kräften unendlich wenig deformirt wird, die im Innern k ö r p e r l i c h einwirken, und die wir zum Schluss mit dem Fluth erzeugenden Einflusse des Mondes oder der Sonne zusammenfallen lassen werden. Zunächst beschränken wir jedoch die deformirende Kraft nur durch die am Ende des § 733 gemachte Voraussetzung.

Eine homogene feste elastische Kugel mit freier Oberfläche wird durch eine körperlich einwirkende harmonische Kraft deformirt. — Wenn wir den Vorschriften des § 732 folgen, so haben wir, um die vollständige Lösung zu erhalten, die beiden Arten von Functionen

$(`\alpha, `\beta, `\gamma)$ und $(\alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \gamma_{\prime})$ zu finden; für die erstere liefern die Formeln (6) und (7) des § 733 folgende Werthe: —

$$(1)\quad \begin{cases} `\alpha = -\frac{1}{2(2\nu+5)(m+n)} \frac{d(r^2 W_{\nu+1})}{dx}, \frac{1}{m+n}\Big\{-\frac{r^2}{2(2\nu+3}\frac{dW_{\nu+1}}{dx} \\ \quad + \frac{r^{2\nu+5}}{(2\nu+3)(2\nu+5)} \frac{d(W_{\nu+1} r^{-2\nu-3}}{dx}\Big\} \end{cases}$$

und symmetrische Formeln für $`\beta$ und $`\gamma$, woraus [§ 733 (6)]

$$(2)\quad \begin{cases} `\delta = -\frac{W_\nu}{m+n} \\ \text{und [§ 737 (28)]} \\ `\zeta = -\frac{(\nu-3)r^2 W_{\nu+1}}{2(2\nu+5)(m+n)} \end{cases}$$

folgt. In § 737 (29) eingesetzt, liefern diese Formeln, wenn man $\nu+2$ für ν setzt,

$$(3)\quad -`F.r = \frac{1}{m+n}\left\{(m-n)W_{\nu+1}\,x + \frac{(\nu+2)n}{(3\nu+5)}\frac{d(r^2 W_{\nu+1})}{dx}\right\},$$

was, durch die geeignete Formel [§ 737 (36)] auf harmonische Functionen reducirt, in

$$(4)\quad \begin{cases} `Fr = \frac{-1}{(2\nu+3)(m+n)}\Big\{\Big[m+(\nu+1)n\Big] r^2 \frac{dW_{\nu+1}}{dx} \\ \qquad - \frac{(2\nu+5)m-n}{2\nu+3} r^{2\nu+5} \frac{d(W_{\nu+1} r^{-2\nu-3})}{dx}\Big\} \end{cases}$$

übergeht. Diese und die symmetrischen Formeln für $`Gr$ und $`Hr$ drücken, wenn r gleich a genommen wird, die Componenten der für die Flächeneinheit genommenen Kraft aus, welche durch Anwendung einer auf die Grenzfläche der Kugel von aussen einwirkenden Zugkraft aufgehoben werden müsste, wenn die Deformation im Innern genau die durch (1) ausgedrückte wäre. Folglich müssen wir jetzt, immer noch nach den Vorschriften des § 732, den Zustand der inneren Deformation $(\alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \gamma_{\prime})$ bestimmen, bei welcher keine auf das Innere von aussen körperlich einwirkende Kraft aus der (4) gleichen und entgegengesetzten Oberflächenzugkraft resultiren würde. Die Lösung dieses Theils des Problems enthält § 737 (52), wo die besonderen Data jetzt

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{A_\nu}{a^{\nu+1}} = \frac{m+(\nu+1)n}{(2\nu+3)(m+n)} r^{-\nu} \frac{dW_{\nu+1}}{dx} \\ \frac{A_{\nu+2}}{a^{\nu+1}} = -\frac{(2\nu+5)m-n}{(2\nu+3)(2\nu+5)(m+n)} r^{\nu+3} \frac{d(W_{\nu+1} r^{-2\nu-3})}{dx} \end{cases}$$

und symmetrische Ausdrücke für B_ν, C_ν und $B_{\nu+2}$, $C_{\nu+2}$, aber keine Grössen von anderen Ordnungen als ν und $\nu+2$ sind. Folglich ergibt sich für die Hilfsfunctionen des § 737 (50)

$$(6)\begin{cases} \Psi_{\nu-1} = 0, \quad \Phi_{\nu+1} = -\dfrac{(\nu+1)(2\nu+1)[m+(\nu+1)n]\,a^{\nu+1}}{(2\nu+3)(m+n)}\,W_{\nu+1} \\ \Psi_{\nu+1} = \dfrac{(\nu+2)[(2\nu+5)m-n]\,a^{\nu+1}}{(2\nu+3)(m+n)}\,W_{\nu+1}, \quad \Phi_{\nu+3} = 0. \end{cases}$$

Nun kann (52), wenn man die passenden Ausdrücke für $\nu + 2$ statt ν addirt, zur Bestimmung von $\alpha_{\prime}$ benutzt werden und geht, da $\Psi_{\nu-1}$ und $\Phi_{\nu+3}$ verschwinden, über in

$$(7)\begin{cases} \alpha_{\prime} = \dfrac{1}{n}\left\{\dfrac{1}{\nu-1}\left[\dfrac{a^{-\nu+1}}{2\nu(2\nu+1)}\dfrac{d\,\Phi_{\nu+1}}{d\,x} + \dfrac{A_\nu\,r^\nu}{a^{\nu-1}}\right]\right. \\ \quad + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{m\,(a^2-r^2)\,a^{-\nu-1}}{[2(\nu+2)^2+1]\,m-(2\nu+3)\,n}\,\dfrac{d\,\Psi_{\nu+1}}{d\,x} \\ \quad + \dfrac{a^{-\nu-1}}{\nu+1}\left[\dfrac{[(\nu+4)\,m-(2\nu+3)\,n]}{[2(\nu+2)^2+1]\,m-(2\nu+3)\,n}\,\dfrac{r^{2\nu+5}\,d\,(\Psi_{\nu+1}\,r^{-2\nu-3})}{(2\nu+5)\,d\,x}\right. \\ \quad \left.\left. + A_{\nu+2}\,r^{\nu+2}\right]\right\}. \end{cases}$$

Hierzu müssen wir den durch (1) gegebenen Werth von $'\alpha$ addiren, um nach § 732 die explicite Lösung α unseres Problems zu erhalten. Auf diese Weise gelangen wir nach etwas mühseligen algebraischen Reductionen, wobei $m + n$, welches als Factor im Zähler und Nenner jedes Bruches auftritt, wegfällt, zu einem merkwürdig einfachen Ausdruck für α. Dieser und die symmetrischen Formeln für β und γ sind folgende: —

$$(8)\begin{cases} \alpha = (\mathfrak{E}_{\nu+1}\,a^2 - \mathfrak{F}_{\nu+1}\,r^2)\,\dfrac{d\,W_{\nu+1}}{d\,x} - \mathfrak{G}_{\nu+1}\,r^{2\nu+5}\,\dfrac{d\,(W_{\nu+1}\,r^{-2\nu-3})}{d\,x} \\ \beta = (\mathfrak{E}_{\nu+1}\,a^2 - \mathfrak{F}_{\nu+1}\,r^2)\,\dfrac{d\,W_{\nu+1}}{d\,y} - \mathfrak{G}_{\nu+1}\,r^{2\nu+5}\,\dfrac{d\,(W_{\nu+1}\,r^{-2\nu-3})}{d\,y} \\ \gamma = (\mathfrak{E}_{\nu+1}\,a^2 - \mathfrak{F}_{\nu+1}\,r^2)\,\dfrac{d\,W_{\nu+1}}{d\,z} - \mathfrak{G}_{\nu+1}\,r^{2\nu+5}\,\dfrac{d\,(W_{\nu+1}\,r^{-2\nu-3})}{d\,z}, \end{cases}$$

wo

$$(9)\begin{cases} \mathfrak{E}_{\nu+1} = \dfrac{(\nu+1)[(\nu+3)\,m-n]}{2\,\nu\,n\,\{[2(\nu+2)^2+1]\,m-(2\nu+3)\,n\}} \\ \mathfrak{F}_{\nu+1} = \dfrac{(\nu+2)(2\nu+5)\,m-(2\nu+3)\,n}{2(2\nu+3)\,n\,\{[2(\nu+2)^2+1]\,m-(2\nu+3)\,n\}} \\ \mathfrak{G}_{\nu+1} = \dfrac{(\nu+1)\,m}{(2\nu+3)\,n\,\{[2(\nu+2)^2+1]\,m-(2\nu+3)\,n\}} \end{cases}$$

ist. Der unendlich grosse Werth von $\mathfrak{E}_{\nu+1}$ für den Fall $\nu = 0$ hängt von dem Umstande ab, dass die körperlich wirkende Kraft für diesen Fall, da sie gleichförmig ist und durch die ganze Masse in parallelen Richtungen wirkt, sich nicht durch sich selbst im Gleichgewicht befindet, und dass es daher zur Herstellung des Gleichgewichts eines Oberflächenzwanges bedarf.

Der Fall $\nu = 1$ ist derjenige, mit dem wir es in dem die Fluth betreffenden Problem zu thun haben. In diesem Falle verwandeln sich die Formeln (9) für die numerischen Coefficienten in

$$(10) \qquad \mathfrak{E}_2 = \frac{4\,m - n}{n\,(19\,m - 5\,n)}, \quad \mathfrak{F}_2 = \frac{21\,m - 5\,n}{10\,n\,(19\,m - 5\,n)}, \quad \mathfrak{G}_2 = \frac{2\,m}{5\,n\,(19\,m - 5\,n)}.$$

Um uns für terrestrische Anwendungen vorzubereiten, ist es zweckmässig, zu Polarcoordinaten überzugehen. Wir bezeichnen den Abstand vom Centrum mit r, die Breite mit l und die Länge mit λ, so dass

$$(11) \qquad x = r \cos l \cos \lambda, \quad y = r \cos l \sin \lambda, \quad z = r \sin l$$

ist, und drücken die entsprechenden Componenten der Verschiebung durch $`r$, $`l$, $`\lambda$ aus. Die Ausdrücke für diese letzteren werden genau dieselben wie die für $\alpha, \beta, \gamma$ sein, nur dass wir statt $\frac{d}{d\,x}$, wie es in dem Ausdruck für $\alpha$ erscheint, $\frac{d}{d\,r}$ in dem Ausdruck für $`r$, $\frac{d}{r\,d\,l}$ in dem für $`l$ und $\frac{d}{r \cos l\, d\,\lambda}$ in dem für $`\lambda$ haben. Setzen wir also

$$(12) \qquad W_{\nu+1} = S_{\nu+1}\, r^{\nu+1},$$

so dass $S_{\nu+1}$ die $W_{\nu+1}$ entsprechende harmonische Flächenfunction oder die harmonische Function der Winkelcoordinaten l, λ bezeichnet, so erhalten wir

$$(13) \quad \begin{cases} `r = \left\{(\nu+1)\,\mathfrak{E}_{\nu+1}\, a^2 - \left[(\nu+1)\,\mathfrak{F}_{\nu+1} - (\nu+2)\,\mathfrak{G}_{\nu+1}\right] r^2\right\} r^\nu\, S_{\nu+1} \\ `l = \left\{\mathfrak{E}_{\nu+1}\, a^2 - (\mathfrak{F}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_{\nu+1})\, r^2\right\} r^\nu\, \dfrac{d\,S_{\nu+1}}{d\,l} \\ `\lambda = \left\{\mathfrak{E}_{\nu+1}\, a^2 - (\mathfrak{F}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_{\nu+1})\, r^2\right\} r^\nu\, \dfrac{d\,S_{\nu+1}}{\cos l\, d\,\lambda}, \end{cases}$$

woraus schliesslich nach (9) für $`r$

$$(14) \quad `r = \frac{(\nu+1)\{(\nu+1)\,[(\nu+3)\,m - n]\,a^2 - \nu\,[(\nu+2)\,m - n]\,r^2\}}{2\,\nu\,n\,\{[2\,(\nu+2)^2 + 1]\,m - (2\,\nu+3)\,n\}}\, r^\nu\, S_{\nu+1}$$

folgt. Die Ausdrücke für $`l$ und $`\lambda$ lassen wir besser, wie sie in (12) und (9) dargestellt sind. Aus (13) ergibt sich

$$(15) \qquad \frac{d`r}{d\,r} = \frac{(\nu+1)^2\,\{m\,a^2 + [(\nu+2)\,m - n]\,(a^2 - r^2)\}}{2\,n\,\{[2\,(\nu+2)^2 + 1]\,m - (2\,\nu+3)\,n\}}\, r^{\nu-1}\, S_{\nu+1},$$

was für $r < a$ immer positiv ist, da ν wenigstens gleich 1 und [§ 698 (1)] m nothwendig (§ 694) grösser als $\frac{1}{3}\,n$ ist. Obgleich daher $`r$ für die successiven concentrischen Sphäroide nach aussen hin beständig zunimmt, so sehen wir doch, wenn wir den Ausdruck für $\frac{d\,\frac{`r}{r}}{d\,r}$ niederschreiben, dass $\frac{`r}{r}$, wenn $\nu > 1$ ist, vom Centrum nach aussen hin anfangs wächst, in einer gewissen Entfernung vom Centrum einen Maximalwerth erreicht,

und von da bis an die Oberfläche wieder abnimmt. Wenn $\nu = 1$ ist, so erhalten wir

$$(16) \qquad `r = \frac{2(4m-n)a^2 - (3m-n)r^2}{n(19m-5n)} r S_2;$$

daher nimmt $\frac{`r}{r}$ in diesem Falle vom Centrum an bis zur Oberfläche ab, und seine äussersten Werthe sind

(17) im Centrum

$$\frac{`r}{r} = \frac{2(4m-n)a^2}{n(19m-5n)} S_2 = \frac{8a^2}{19n}\left(1 + \frac{\frac{1}{76}\frac{n}{m}}{1 - \frac{5}{19}\frac{n}{m}}\right) S_2,$$

an der freien Oberfläche

$$\frac{`r}{r} = \frac{(5m-n)a^2}{n(19m-5n)} S_2 = \frac{5a^2}{19n}\left(1 + \frac{\frac{6}{25}\frac{n}{m}}{1 - \frac{5}{19}\frac{n}{m}}\right) S_2.$$

Besondere Fälle. — Wenn die störende Wirkung die aus einer Rotation mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω herrührende Centrifugalkraft ist, so haben wir, wie wir oben (§ 794) fanden, für das ganze Potential

$$(18) \qquad W = w\left\{\frac{1}{3}\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right\},$$

wo w die in der Volumeneinheit enthaltene Masse des festen Körpers bezeichnet. Die Wirkung des Gliedes $\frac{1}{3} w\omega^2 r^2$ ist bloss ein ringsherum symmetrisch erfolgender Zug des festen Körpers vom Centrum nach aussen hin; dies werden wir im zweiten Bande in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie eingehend betrachten. Die übrigen Theile des Ausdrucks liefern uns nach unserer jetzigen Bezeichnung

$$(19) \qquad W_2 = \frac{1}{3}\tau(x^2 + y^2 - 2z^2), \quad \text{oder} \quad S_2 = w\tau\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right),$$

wo

$$(20) \qquad \tau = \frac{1}{2}\omega^2$$

ist.

Für die Fluth erzeugende Kraft gelten gleichfalls die Formeln (15) und (16), wenn wir (§§ 804, 808, 813)

$$(21) \qquad \tau = \frac{3}{2}\frac{M}{D^3}$$

nehmen und die Zeichen so ändern, dass die Deformationsellipsoide zugespitzt statt abgestumpft werden. Die deformirte Gestalt jeder der concentrischen Kugelflächen der Kugel ist natürlich ein Rotationsellipsoid, und aus (15) und (17) erhalten wir für die äussersten dieser Flächen: —

$$(22)\quad \begin{cases} \text{die Ellipticität des centralen Deformationssphäroids} \\ \quad = \dfrac{8\,a^2}{19\,n}\left(1+\dfrac{\frac{1}{76}\,\frac{n}{m}}{1-\frac{5}{19}\,\frac{n}{m}}\right)\cdot w\,\tau, \\ \text{die Ellipticität der freien Oberfläche} \\ \quad = \dfrac{5\,a^2}{19\,n}\left(1+\dfrac{\frac{6}{95}\,\frac{n}{m}}{1-\frac{5}{19}\,\frac{n}{m}}\right)\cdot w\,\tau. \end{cases}$$

Aus den Resultaten (8) bis (22) schliessen wir Folgendes: —

835. Die Umgrenzungsfläche und die inneren concentrischen Kugelflächen einer homogenen elastischen festen Kugel, welche durch von aussen einwirkende einander das Gleichgewicht haltende Attractionskräfte schwach deformirt wird, verwandeln sich in harmonische Sphäroide von derselben Ordnung und Art, wie die räumliche harmonische Function, welche die Potentialfunction dieser Kräfte ausdrückt, wenn dieselben sich so ausdrücken lassen, und die Richtung der zum Radius in irgend einem Punkte senkrechten Verschiebungscomponente ist dieselbe, wie die Richtung der zu dem Radius senkrechten Componente der anziehenden Kraft. Diese concentrischen harmonischen Sphäroide sind zwar von derselben Art, aber nicht ähnlich. Wenn sie vom zweiten Grade sind (d. h. wenn das Kraftpotential eine räumliche harmonische Function zweiten Grades ist), so sind die Verhältnisse der Ellipticitäten in den drei Normalschnitten eines jeden in allen dieselben; aber in jedem Schnitt wachsen die Ellipticitäten der concentrischen Ellipsoide vom äussersten an nach dem Centrum zu in dem Verhältniss

$$1 : \frac{5\,m - n}{2\,(4\,m - n)}.$$

Für harmonische Störungen höherer Ordnungen nimmt die natürlich im Verhältniss zum Radius gerechnete Grösse der Abweichung von der Kugelgestalt von der Oberfläche an nach innen hin bis zu einem gewissen Abstande zu und von da bis zum Centrum ab. Dieser bemerkenswerthe Satz lässt sich leicht ohne Anwendung der mathematischen Analysis darthun; wir werden uns aber darauf beschränken, diesen Beweis bloss für den Fall ellipsoidaler Störungen zu geben.

836. Synthetischer Beweis des Satzes, dass bei einer Deformation zweiter Ordnung die Ellipticität am Centrum ein Maximum ist. — Es möge die körperlich wirkende störende

Kraft aufhören zu wirken und die Oberfläche durch ein auf ihr so vertheiltes System von Zugkräften (§§ 693, 662) in derselben ellipsoidalen Form erhalten bleiben, dass überall im Innern eine homogene Deformation erzeugt wird. Die inneren ellipsoidalen Deformationsflächen werden jetzt ähnliche concentrische Ellipsoide werden, und die mehr nach innen zu liegenden müssen jetzt offenbar weniger elliptisch sein, als sie waren, als die äussere Umgrenzung durch Kräfte, die durch das ganze Innere wirkten, in derselben Form erhalten wurde; sie müssen daher für die innere Fläche grösser gewesen sein. Einen ähnlichen Schluss können wir hinsichtlich des Theils des ganzen festen Körpers ziehen, der innerhalb eines jeden dieser Deformationsellipsoide liegt, indem wir voraussetzen, die ganze Cohäsion, sowie die tangentiale Kraft zwischen diesem Theil und der ihn umgebenden Masse werde aufgehoben, und er behalte seine ellipsoidale Form durch ein auf seine Oberfläche vertheiltes System von Zugkräften, welches geeignet ist, überall in seinem Innern eine homogene Deformation zu erzeugen, wenn die körperlich angreifende Kraft aufhört zu wirken. Wir schliessen daraus, dass die Ellipticitäten der concentrischen Ellipsoide von der Oberfläche durch den ganzen festen Körper bis zum Centrum hin wachsen, wenn auf den Körper die körperlich angreifende Kraft störend einwirkt, und seine Oberfläche nicht der Einwirkung von Zugkräften unterliegt.

837. **Die durch eine Rotation in einer homogenen elastischen festen Kugel erzeugte Abplattung.** — Wenn die störende Wirkung die Centrifugalkraft oder eine Fluth erzeugende Kraft (wie die von der Sonne oder dem Mond auf die Erde ausgeübte) ist, so ist das Potential, wie wir gesehen haben, eine in Beziehung auf eine Axe symmetrische harmonische Function zweiten Grades. In einem Falle sind die Deformationsellipsoide abgeplattete, im andern Falle zugespitzte concentrische Rotationsellipsoide. In jedem Falle nimmt die Ellipticität von der Oberfläche aus nach innen hin nach demselben Gesetz [§ 834 (16)] zu, welches natürlich vom Radius der Kugel unabhängig ist. Für Kugeln von verschiedenen Dimensionen und ähnlichen Substanzen verhalten sich die durch Rotationen von gleicher Winkelgeschwindigkeit erzeugten Ellipticitäten wie die Quadrate der Radien. Oder, wenn die Oberflächengeschwindigkeit V am Aequator in rotirenden elastischen Kugeln von verschiedenen Dimensionen aber ähnlicher Substanz dieselbe ist, so sind die Ellipticitäten einander gleich. Für feste

Körper, welche Poisson's Hypothese (§ 685), nach welcher $m = 2n$ ist, erfüllen, sind die Werthe der Ellipticität auf der Oberfläche und am Centrum beziehungsweise

$$\frac{3}{11}\,\frac{V^2 w}{2n} \quad \text{und} \quad \frac{14}{33}\,\frac{V^2 w}{2n}.$$

Numerische Resultate für Eisen und Glas. — Für Stahl oder Eisen sind die Werthe von n und m beziehungsweise 780×10^6 und ungefähr 1600×10^6 Gramm per Quadratcentimeter, oder in absoluten Einheiten (§ 223), wenn als Masseneinheit das Gramm, als Zeiteinheit die Secunde und als Raumeinheit das Centimeter angenommen wird, 770×10^9 und ungefähr 1600×10^9; das specifische Gewicht (w) ist ungefähr 7·8. Folglich wird eine rotirende Stahlkugel von beliebigem Radius, deren Geschwindigkeit am Aequator 10,000 Centimeter per Secunde beträgt, so abgeplattet, dass ihre Ellipticität (§ 801) gleich $\frac{1}{7220}$ wird. Für eine Probe Flintglas vom specifischen Gewicht 2·94 findet Everett $n = 244 \times 10^6$ Gramm per Quadratcentimeter und näherungsweise $m = 2n$. Für diese Substanz ist daher $\frac{n}{w} = 83 \times 10^6$ [es ist dies die in Centimetern ausgedrückte Länge des Moduls der Starrheit (§ 687)]. Die oben gebrauchten Zahlen liefern aber für Stahl $\frac{n}{w} = 100 \times 10^6$ Centimeter, und daher (§ 838) ist die Abplattung einer Glaskugel $\frac{1}{0{\cdot}83}$ oder $1^1/_5$ mal so gross, als die einer mit der nämlichen Geschwindigkeit rotirenden Stahlkugel.

838. **In elastischen festen Kugeln von Metall, Glas oder gallertartigem Stoff ist die Zusammendrückbarkeit nur von geringem Einfluss auf die Rotations- oder Fluthellipticitäten.** — Für Glas- oder Metallkugeln, welche durch Rotation oder durch Ebbe und Fluth deformirt sind, wird die Grösse der Deformation, wie wir sofort aus § 834 (22) erkennen, durch die Zusammendrückbarkeit nur wenig beeinflusst, da für solche Substanzen (§§ 684, 694) der Werth von m entweder gleich $2n$ oder noch grösser ist. So wird für jede Substanz, für welche $m \geqq 2n$ ist, die Ellipticität der Oberfläche um 3 Proc. oder um weniger als 3 Proc., die Ellipticität am Centrum um $^2/_3$ Proc. oder um weniger als $^2/_3$ Proc. verringert, wenn wir voraussetzen, dass die Starrheit in

jedem Falle unverändert bleibt, aber die Substanz absolut unzusammendrückbar wird. Für die Ellipticität der Oberfläche liefert die Formel (22) des § 834 unter dieser Voraussetzung

$$(23) \qquad e = \frac{5\, a^2 w}{19\, n}\, \tau,$$

oder wenn wir

$n = 770 \times 10^9$ (wie für Stahl, § 837)

$a = 640 \times 10^6$ (der in Centimetern ausgedrückte Erdradius)

$w = 5{\cdot}5$ (die mittlere Dichtigkeit der Erde)

annehmen, so erhalten wir

$$(24) \qquad e = 77 \times 10^4 . \tau.$$

839. Ellipticität der Oberfläche für eine Kugel von der Grösse und Masse der Erde, deren Substanz nicht der Schwere unterworfen, homogen, nicht zusammendrückbar und so starr wie Stahl ist. — Betrachten wir jetzt eine Kugel von der Grösse der Erde, die aus einem nicht zusammendrückbaren homogenen Stoffe besteht, und deren Dichtigkeit gleich der mittleren Dichtigkeit der Erde ist, die aber dieselbe Starrheit wie Stahl oder Glas hat. Wir setzen zunächst voraus, die Masse dieser Kugel werde der Eigenschaft beraubt, dass ihre Theile eine Attraction auf einander ausüben. Dann werden die durch eine Rotation oder durch eine Fluth erzeugende Kraft hervorgebrachten Ellipticitäten die durch die vorhergehenden Formeln [§ 834 (22)] gegebenen sein, wenn n dieselben Werthe wie früher hat, $\frac{n}{m} = 0$, $a = 640 \times 10^6 =$ dem in Centimetern ausgedrückten Erdradius und $w = 5{\cdot}5$ ist, statt dem specifischen Gewicht von Glas und Stahl gleich zu sein.

Wenn aber der Körper gar keine Starrheit besitzt und nur die zwischen seinen Theilen wirkende Gravitation einer Abweichung von der Kugelgestalt entgegenarbeitet, so ist die Ellipticität, wie wir früher (§ 819) fanden,

$$(25) \qquad e = \frac{5}{2} \frac{a}{g}\, \tau = 162 \times 10^4 . \tau.$$

840. Die Gravitation ist auf die Gestalt grosser, homogener, fester Kugeln von grösserem Einfluss als die Starrheit. — Vergleichen wir daher die beiden Einflüsse, die wir einzeln betrachtet haben: — auf der einen Seite die Elasticität der Gestalt, sogar bei einer so grossen Starrheit, wie sie das Eisen besitzt: auf

der anderen Seite die zwischen den Theilen wirkende Gravitation — so sehen wir, dass der letztere Einfluss in einer Kugel von solchen Dimensionen wie die Erde bedeutend mächtiger als der erstere ist. Wenn, wie es in der Natur geschieht, diese beiden Widerstände gegen eine Formänderung vereint wirken, so wird die resultirende Ellipticität der reciproke Werth der Summe der reciproken Werthe der Ellipticitäten sein, welche einzeln erzeugt werden würden, wenn jeder Widerstand für sich allein wirkte. Denn wir können uns den störenden Einfluss in zwei Theile getheilt denken, von denen der eine allein die vom festen Körper wirklich erlangte Ellipticität bei fehlender Gravitationskraft unterhalten würde, während der andere dieselbe Ellipticität erzeugen würde, wenn die Substanz keine Starrheit besässe, aber einer zwischen ihren Theilen wirkenden Gravitationskraft ausgesetzt wäre. Es sei τ der nach § 834 (20), (21) gemessene störende Einfluss, $\frac{\tau}{\mathfrak{r}}$ und $\frac{\tau}{\mathfrak{g}}$ beziehungsweise die Ellipticitäten der sphäroidalen Figur, in welche sich die Kugel unter den beiden Voraussetzungen: Starrheit ohne Schwere und Schwere ohne Starrheit verwandelt. Ferner sei e die wirklich erlangte Ellipticität, und es werde τ in τ' und τ'' getheilt, welche Grössen den beiden Theilen proportional sein sollen, in welche wir uns den störenden Einfluss, während er jene Ellipticität unterhält, getheilt denken. Dann ist

$$\tau = \tau' + \tau''$$

und

$$e = \frac{\tau'}{\mathfrak{r}} = \frac{\tau''}{\mathfrak{g}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\tau}{e} = \mathfrak{r} + \mathfrak{g},$$

oder

$$\frac{1}{e} = \frac{\mathfrak{r}}{\tau} + \frac{\mathfrak{g}}{\tau},$$

was den Satz beweist. Die letzte Formel liefert auch

$$e = \frac{\tau}{\mathfrak{r} + \mathfrak{g}} = \frac{\frac{\tau}{\mathfrak{g}}}{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{g}} + 1}. \tag{26}$$

Nach §§ 838, 839 ist

$$\mathfrak{r} = \frac{19\,n}{5\,a^2 w} \quad \text{und} \quad \mathfrak{g} = \frac{2}{5}\,\frac{g}{a}, \tag{27}$$

(28)
$$\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{g}} = \frac{19\,n}{2\,g\,a\,w} = \frac{19\,\frac{n}{g}}{2\,a\,w},$$

wo $\frac{n}{g}$ die Starrheit ist, ausgedrückt in Gramm per Quadratcentimeter. Für Stahl und Glas (§§ 837, 839) sind die Werthe von $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{g}}$ beziehungsweise 2·1 und 0·66.

841. Daraus erhellt, dass, wenn die Starrheit der Erde im Ganzen nur gleich der des Stahls oder Eisens wäre, sie den Fluth erzeugenden Einflüssen der Sonne und des Mondes ungefähr $\frac{1}{3}$ so viel nachgeben würde, wie sie thun würde, wenn sie gar keine Starrheit besässe. Sie würde ungefähr $\frac{3}{5}$ mal so viel wie eine Flüssigkeit nachgeben, wenn ihre Starrheit nicht grösser als die des Glases wäre.

842. Einfluss des elastischen Nachgebens des festen Erdkörpers auf die Wasserfluthen. — Um die Wirkung zu finden, welche das elastische Nachgeben der Erde auf die Fluthen hat, müssen wir uns ins Gedächtniss zurückrufen (§ 819), dass die aus der störenden Kraft und der Gravitation der ungestörten Kugel herrührende Ellipticität der Niveaufläche, welche [§§ 804, 808 (18), (19)] gleich $\frac{a}{g}\,\tau$ ist, wegen der Umwandlung der Kugel in ein Sphäroid von der Ellipticität e um $\frac{3}{5}\,e$ vergrössert wird, so dass wir, wenn die Attraction zwischen den Wassertheilen vernachlässigt wird (§ 799), für die Ellipticität der gestörten Meeresoberfläche (§ 785)

(29)
$$\frac{a}{g}\,\tau + \frac{3}{5}\,e$$

erhalten. Das Steigen und Fallen des Wassers in Beziehung auf das Festland wird von dem Ueberschuss dieses Werthes über die Ellipticität des festen Erdkörpers abhängen. Wird dieser Ueberschuss, oder die Ellipticität der relativen Fluthen mit ε bezeichnet, so ist

(30)
$$\varepsilon = \frac{a}{g}\,\tau - \frac{2}{5}\,e,$$

oder nach (26) und (27)

$$\varepsilon = \frac{a}{g}\,\tau\,\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}+\mathfrak{g}}. \tag{31}$$

Folglich ist das Steigen und Fallen der Fluthen kleiner, als es bei vollkommener Starrheit der Erde sein würde, und zwar in dem Verhältniss, in welchem der aus der Starrheit herrührende Widerstand des festen Körpers gegen eine Deformation im Sinne der Fluthbewegung zur Summe der Widerstände steht, welche auf der Starrheit des festen Körpers und der zwischen seinen Theilen wirkenden Gravitation beruhen. Aus den am Schluss des § 840 gegebenen Zahlen schliessen wir, dass, wenn die Starrheit so gross wie die des Stahls wäre, das relative Steigen und Fallen des Wassers durch das elastische Nachgeben des festen Körpers auf $\frac{2}{3}$, oder wenn die Starrheit nur gleich der des Glases wäre, das relative Steigen und Fallen auf $\frac{2}{5}$ des Betrages reducirt werden würde, den es bei vollkommener Starrheit haben würde.

843. **Die Starrheit der Erde im Ganzen ist wahrscheinlich grösser als die einer festen Glaskugel.** — Trotz der Unvollkommenheit, die den Vergleichungen zwischen Theorie und Beobachtung in Betreff der wirklichen Höhe der Fluthen bis jetzt noch anhaftet, ist es doch kaum möglich zu glauben, dass die Höhe in Wahrheit nur $\frac{2}{5}$ von dem beträgt, was sie sein würde, wenn, wie in den Theorien der Ebbe und Fluth allgemein angenommen wird, die Erde vollkommen starr wäre. Es scheint daher schon durch die bisherigen Beobachtungen ziemlich festgestellt zu sein, dass die in Betreff der Fluth wirksame Starrheit der Erde grösser als die des Glases ist.

844. **Die dynamische Theorie der Fluthen ist zu unvollkommen, um eine Berechnung der absoluten Werthe der Haupterscheinungen zu gestatten.** — Die wirkliche Vertheilung von Land und Wasser auf der Erdkugel ist so unregelmässig, und das Wasser hat an den damit bedeckten Stellen eine so verschiedene Tiefe, dass wir sogar von der eindringendsten mathematischen Analysis keine Annäherung an eine directe dynamische Berechnung des Betrages erwarten dürfen, den die gewöhnlichen halbtägigen Fluthen an irgend einem Orte haben sollten, wenn die Erde vollkommen starr wäre. In Wasser von 10,000 Fuss Tiefe (was im Allgemeinen beträchtlich weniger als die Tiefe des Atlantischen

Oceans ist, wie durch viele Messungen in den letzten Jahren, namentlich durch Messungen längs des Atlantischen Telegraphenkabels von Valencia bis Newfoundland bewiesen ist) ist die Geschwindigkeit langer freier Wellen, wie wir im zweiten Bande zeigen werden, 576 engl. Fuss per Secunde*). Bei dieser Geschwindigkeit würde ein Fortschreiten durch 57^0 (oder eine Entfernung von der Grösse des Erdradius) nur eine Zeit von 10 Stunden erfordern. Folglich dürfen wir vermuthen, dass, wenigstens an allen Inseln des Atlantischen Oceans, jede Fluthstörung, deren Periode einige Tage oder mehr beträgt, mit ziemlicher Annäherung die wahre Gleichgewichtsfluth geben muss, die durch die Trägheit der Flüssigkeit nicht merklich oder nur wenig modificirt ist. Nun gibt es solche Fluthstörungen (§ 808) wegen der Aenderungen der Declination des Mondes und der Sonne, und die Perioden dieser Störungen sind gleich den Perioden der genannten Declinationsänderungen.

845. **Berechnung der Höhe der vierzehntägigen Fluth für verschiedene Werthe der Starrheit. — Fluthmesser.** — Die Summe des Steigens vom niedrigsten zum höchsten Punkte in Teneriffa und des gleichzeitigen Fallens vom höchsten zum niedrigsten Stande in Island würden in der vierzehntägigen Mondfluth 4·5 Zoll betragen, wenn die Erde vollkommen starr wäre, oder 3 oder 1·8 Zoll, wenn die hinsichtlich der Fluthen wirksame Starrheit beziehungsweise nur gleich der des Stahls oder des Glases wäre. Die Beträge der halbjährlichen Fluth würden, unabhängig von der Starrheit der Erde, natürlich ungefähr die Hälfte der vierzehntägigen Fluth sein. Die Grösse einer jeden liesse sich an jedem Orte bis auf einen kleinen Bruchtheil eines Zoll genau bestimmen durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Angaben eines genauen selbstregistrirenden Fluthmessers, eine Arbeit, die bis jetzt noch nicht ausgeführt ist. Was den jetzt vorliegenden Gegenstand betrifft, so kann die halbjährliche Fluth, obgleich sie den Vortheil haben mag, dass ihre Grösse wahrscheinlich nicht merklich von der durch die Gleichgewichtstheorie gegebenen verschieden ist, doch durch das Schmelzen von Eis aus den arctischen und antarctischen Regionen, sowie durch das Niederfallen von Regen und das Abschwemmen von Land an anderen Stellen merklich modificirt werden, und dies wird wahrscheinlich messbare Störungen

---

*) *Airy, Tides und Waves,* § 170.

in der Meeresniveaufläche ergeben, die im Durchschnitt vieler Jahre eine jährliche und halbjährliche harmonische Variation zeigen werden. Diese Störung kann aber für jeden Zeitraum von vierzehn Tagen oder einem halben Jahre dadurch eliminirt werden, dass man die an passend gewählten Stationen verschiedener Breite gemachten Beobachtungen combinirt. Es scheint daher wahrscheinlich, dass man aus guten selbstregistrirenden Fluthmessern, die mehrere Jahre hindurch an Stationen wie Island, Teneriffa, den Inseln des Grünen Vorgebirges, Ascension und St. Helena benutzt sind, die wahre Grösse des elastischen Nachgebens der Erde gegen die Fluth erzeugenden Kräfte des Mondes und der Sonne ziemlich genau bestimmen kann. Ebenso ist es wahrscheinlich, dass sich aus solchen Beobachtungen das Verhältniss der Masse des Mondes zu der der Sonne genauer bestimmen lassen wird, als es bisher geschehen ist. Es ist zu hoffen, dass diese Gegenstände die Britische Regierung, welche in vielen Beziehungen so viel für die physische Geographie gethan hat, veranlassen werden, an geeigneten Stationen Fluthmesser aufzustellen und mit möglichster Genauigkeit die vierzehntägigen und die halbjährlichen Fluthen, sowie die Variationen der Meeresniveaufläche bestimmen zu lassen, welche von dem Schmelzen des Eises in den Polargegenden und von dem Niederfallen von Regen und dem Abschwemmen von Land in den übrigen Theilen der Erde herrühren.

846. Mehr Beobachtungen und eine genauere Reduction der schon gemachten Beobachtungen sind erforderlich, um eine entscheidende Antwort auf die Fragen zu geben, wie viel die vierzehntägigen und wie viel die halbjährlichen Fluthen betragen. „In den „Philosophical Transactions, 1839, p. 157 zeigt Whewell, „dass die in Plymouth angestellten Beobachtungen des hohen und „niedrigen Wasserstandes ergeben, dass die mittlere Wasserhöhe „zunimmt bei zunehmender Declination des Mondes und sich auf „3 Zoll beläuft, wenn die Declination des Mondes 25⁰ ist. Diese „Aenderung geschieht in demselben Sinne, wie die, welche der obige „Ausdruck für hohe Breiten anzeigt. Die Wirkung der Declination der „Sonne ist aus den Beobachtungen nicht bestimmt worden. In der genannten Arbeit (p. 163) theilt Whewell die Beobachtungen einiger „ausserordentlichen Fluthen in Peter-Paulshafen, Novo-Archangelsk „und der an der Westküste von Nordamerika gelegenen Insel „Sitcha mit.

„Sowohl nach den in den Philosophical Transactions veröffentlichten, wie nach den übrigen auf dieselben Beobachtungsorte

„bezüglichen Curven (von denen uns Herr Whewell Einsicht nehmen zu lassen die Güte hatte) scheint es ganz unzweifelhaft zu „sein, dass die mittlere Höhe des Wassers in Peter-Paulshafen und „Archangelsk steigt, wenn die Declination des Mondes zunimmt. „Mehr ist über diesen Punkt nicht bekannt.“ — (Airy, Tides and Waves, § 533).

847. **Einfluss des elastischen Nachgebens der Erde auf die Präcession und Nutation.** — Wir beabsichtigen, im zweiten Bande eine dynamische Untersuchung der Präcession und Nutation zu geben, in welcher gezeigt werden wird, dass das elastische Nachgeben der Erde diese Erscheinungen in demselben Grade wie die Fluthen beeinflusst. Wir haben schon gesehen (§§ 825, 826, 796, 797), dass, um die beobachteten Werthe derselben mit den unter der Voraussetzung einer vollkommenen Starrheit theoretisch gefundenen mit einer solchen Genauigkeit zu vergleichen, dass der begangene Fehler nicht mehr als 1 Proc. beträgt, nur eine bis zu eben diesem Grade genaue Kenntniss des Trägheitsmomentes der Erde in Beziehung auf irgend einen Durchmesser erfordert. Wir haben gesehen (§ 828), dass die besten bisher angestellten Berechnungen der Präcession mit der beobachteten Grösse derselben in merkwürdiger Uebereinstimmung stehen. Es ist aber durchaus nicht unwahrscheinlich, dass besser begründete Bestimmungen des Trägheitsmomentes (§ 826) der Erde und eine genauere als die bis jetzt durch Beobachtung erlangte Kenntniss der in dem Ausdrucke der äusseren Schwerkraft (§§ 825, 795) enthaltenen harmonischen Function zweiten Grades zeigen werden, dass der wahre Betrag der Präcession (der jetzt bis zum äussersten Grade von Genauigkeit bekannt ist) etwas kleiner ist, als er sein würde, wenn die Starrheit unendlich gross wäre. Solch eine Abweichung könnte, wenn sie wirklich vorhanden wäre, nur durch eine gewisse kleine Deformation erklärt werden, die die festen Theile der Erde unter dem Einflusse des Mondes und der Sonne erlitten. Es findet aber im Ganzen bei Zugrundelegung der Hypothese einer vollkommenen Starrheit eine so genaue Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung hinsichtlich der Präcession und Nutation statt, dass wir berechtigt sind, das elastische Nachgeben der Erde gegen den störenden Einfluss der Sonne und des Mondes als sehr klein anzunehmen, als viel kleiner z. B., als es sein würde, wenn die wirksame Starrheit nicht grösser als die Starrheit des Stahls wäre.

848. Prüfung der Consequenzen der geologischen Hypothese einer dünnen mit Flüssigkeit erfüllten Schale. — Es ist interessant, dass die weit verbreitete geologische Hypothese, nach welcher die Erde eine dünne Schicht fester Substanz ist, die in ihrem Hohlraume mit Flüssigkeit gefüllt sei, zwei Wirkungen der Abweichung von einer vollkommenen Starrheit involvirt, welche die Grösse der Präcession in entgegengesetzter Weise beeinflussen würden. Das vergleichsweise leichte Nachgeben der Schale muss, wie wir im zweiten Bande sehen werden, das wirksame bewegende Kräftepaar, welches aus der Sonne und dem Monde herrührt, viel kleiner machen, als es sein würde, wenn das ganze Innere fest wäre, und muss deshalb die Grösse der Präcession und Nutation zu verringern streben. Dagegen würde das wirksame Trägheitsmoment einer dünnen festen Schale, die in ihrem Innern eine homogene oder heterogene Flüssigkeit enthält, viel kleiner als das der ganzen Masse sein, wenn diese überall fest wäre, und dieser Grund würde eine viel grössere Präcession und Nutation hervorzubringen streben. Es scheint äusserst unwahrscheinlich zu sein, dass die Grösse, um welche das Trägheitsmoment wegen der im Innern der Erde enthaltenen Flüssigkeit kleiner ist, zum ganzen Trägheitsmoment näherungsweise in demselben Verhältniss stehen sollte, wie das wirklich stattfindende elastische Nachgeben zu dem vollkommen leichten Nachgeben, welches eintreten würde, wenn die Erde ganz flüssig wäre. Wir müssen aber entweder diese Voraussetzung zulassen, so unwahrscheinlich sie auch zu sein scheint, oder aus der genauen Uebereinstimmung zwischen den Werthen, welche die Präcession und Nutation wirklich haben, mit denen, die sie haben würden, wenn die Erde vollkommen starr wäre, den Schluss ziehen, dass in Beziehung auf jeden Durchmesser die aus der im Innern enthaltenen Flüssigkeit herrührende Abnahme des Trägheitsmomentes im Vergleich mit dem ganzen Trägheitsmomente der Erde sehr klein ist, und dass die von der Erde durch die Einwirkung des Mondes und der Sonne erlittene Deformation klein ist im Vergleich zu der, die die Erde erleiden würde, wenn sie vollkommen flüssig wäre. Es steht jedoch fest, dass es im Innern der Erde flüssige Massen gibt. Beweis dafür sind die Eruptionen von Lava aus den Vulcanen. Aber dies sind wahrscheinlich ganz locale Zustände, wie Hopkins behauptete, der zuerst die Erscheinungen der Präcession und Nutation anführte, um die Hypothese, dass der feste Theil der Erdmasse bloss eine dünne Schale sei, zu widerlegen.

849. Eine merkwürdig ähnliche Bemerkung lässt sich auf die Fluthen anwenden; aber nur wegen der grösseren Dichtigkeit in den tieferen Theilen der hypothetischen Flüssigkeit. Die durch die Fluth erzeugende Einwirkung in den Schichten gleicher Dichtigkeit hervorgebrachte Abplattung würde (§ 815) die Ellipticität, welche die Fluth der obersten Fläche ertheilt, vergrössern, und wenn daher die feste Erdrinde vollkommen starr, also die Umgrenzungsfläche von absolut constanter Gestalt wäre, so würden die Fluthen grösser sein, als sie sein würden, wenn die Erde überall vollkommen starr wäre.

Zusätze zum Capitel VII.

C. Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen festen Körpers, hergeleitet aus dem Princip der Energie.

(a) **Bestimmung einer Deformation durch sechs Elemente.**— Es sei ein fester Körper von irgend einer Form gegeben, der aus einer Masse besteht, welche in keinem einzelnen Theile irgend eine Art von Isotropie und keine Art von Homogeneität zwischen verschiedenen Theilen zeigt. Der Körper befinde sich in einem nicht deformirten Zustande, und es werde jeder Punkt seiner Oberfläche in einer gegebenen Richtung eine gegebene Strecke weit verschoben. Man soll, nach eingetretenem Gleichgewicht, die Verschiebung jedes Punktes der Substanz bestimmen. Zu diesem Zwecke seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Massenpunktes P der Substanz in ihrer ungestörten Lage; derselbe Punkt P habe, wenn er in der angegebenen Weise verschoben ist, die Coordinaten $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$, d. h. es seien α, β, γ die Componenten der gesuchten Verschiebung. Setzen wir dann der Kürze wegen

$$(1)\quad \begin{cases} A = \left(\frac{d\alpha}{dx} + 1\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 \\ B = \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy} + 1\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)^2 \\ C = \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dz} + 1\right)^2 \\ a = \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\alpha}{dz} + \left(\frac{d\beta}{dy} + 1\right)\frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}\left(\frac{d\gamma}{dz} + 1\right) \\ b = \frac{d\alpha}{dz}\left(\frac{d\alpha}{dx} + 1\right) + \frac{d\beta}{dz}\frac{d\beta}{dx} + \left(\frac{d\gamma}{dz} + 1\right)\frac{d\gamma}{dx} \\ c = \left(\frac{d\alpha}{dx} + 1\right)\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\left(\frac{d\beta}{dy} + 1\right) + \frac{d\gamma}{dx}\frac{d\gamma}{dy}, \end{cases}$$

so ist bewiesen [§ 190 (e) und § 181 (5)], dass diese sechs Grössen A, B, C, a, b, c die von der Substanz in unendlich kleiner Entfernung vom Massenpunkt P erlittene Deformation (abgesehen von der Rotation, welche der Körper vielleicht noch vollführt) vollständig bestimmen, und zwar in der folgenden Weise: —

(b) Es seien ξ, η, ζ die Coordinaten der ungestörten Lage eines unendlich nahe an P liegenden Massenpunktes, bezogen auf Axen, welche durch P gehen und beziehungsweise den Axen der x, y, z parallel sind. Derselbe Punkt habe, auf dieselben durch P gehenden Axen bezogen, die Coordinaten $\xi_{\prime}$, $\eta_{\prime}$, $\zeta_{\prime}$, wenn sich der Körper in seinem deformirten Zustande befindet. Dann ist

$$(2)\quad \xi_{\prime}^2 + \eta_{\prime}^2 + \zeta_{\prime}^2 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2a\eta\zeta + 2b\zeta\xi + 2c\xi\eta,$$

und daher liegen alle Massenpunkte, welche sich im deformirten Zustande auf der Kugelfläche

$$\xi_{\prime}^2 + \eta_{\prime}^2 + \zeta_{\prime}^2 = r_{\prime}^2$$

befinden, im undeformirten Zustande auf der Oberfläche des Ellipsoides

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2a\eta\zeta + 2b\zeta\xi + 2c\xi\eta = r_{\prime}^2.$$

Dies definirt (§§ 155 bis 165) die homogene Deformation der in der Nähe von P liegenden Masse vollständig.

(c) Die thermodynamischen Principien, durch welche bewiesen wurde [in einer in der ersten Nummer des Quarterly Mathematical Journal, April 1855 veröffentlichten Arbeit über die thermoelastischen Eigenschaften der Materie, über welche im dritten Bande berichtet werden wird], dass Green's dynamische Theorie der ela-

stischen festen Körper ein Theil der neueren dynamischen Wärmetheorie ist, zeigen also, dass, wenn $w\,dx\,dy\,dz$ die Arbeit bezeichnet, die erfordert wird, um ein unendlich kleines ungestörtes Volumen $dx\,dy\,dz$ des festen Körpers in seinen gestörten Zustand zu versetzen, während die Temperatur constant erhalten wird,

$$w = f\,(A,\ B,\ C,\ a,\ b,\ c) \tag{3}$$

sein muss, wo f eine positive Function der sechs Elemente bezeichnet, welche verschwindet, wenn jede der Grössen $A - 1$, $B - 1$, $C - 1$, a, b, c Null ist. Wenn die Gesammtarbeit, deren es bedarf, um die vom ganzen Körper wirklich erlittene Aenderung zu erzeugen, mit W bezeichnet wird, so ist

$$W = \int\!\!\int\!\!\int w\,dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

wo die Integration für den ganzen Raum auszuführen ist, den der Körper in seinem ungestörten Zustande einnimmt.

(d) **Bei stabilem Gleichgewicht ist die potentielle Energie der Deformation ein Minimum.** — Die Lage, welche jeder Massenpunkt im Innern des festen Körpers annimmt, wird eine solche sein, dass der Ausdruck (4) zu einem Minimum wird, wobei noch die Bedingung erfüllt sein muss, dass jeder Punkt der Oberfläche in die ihm angewiesene Lage komme; dies ist die Bedingung des stabilen Gleichgewichts, daher liefert die Variationsrechnung

$$\delta W = \int \delta w\,dx\,dy\,dz = 0. \tag{5}$$

Wir erhalten aber, wenn wir nur die von $\delta\alpha$ abhängigen Glieder niederschreiben,

$$\begin{aligned}\delta w = &\left\{2\,\frac{dw}{dA}\left(\frac{d\alpha}{dx}+1\right)+\frac{dw}{db}\,\frac{d\alpha}{dz}+\frac{dw}{dc}\,\frac{d\alpha}{dy}\right\}\frac{d\,\delta\alpha}{dx}\\ &+\left\{2\,\frac{dw}{dB}\,\frac{d\alpha}{dy}+\frac{dw}{da}\,\frac{d\alpha}{dz}+\frac{dw}{dc}\left(\frac{d\alpha}{dx}+1\right)\right\}\frac{d\,\delta\alpha}{dy}\\ &+\left\{2\,\frac{dw}{dC}\,\frac{d\alpha}{dz}+\frac{dw}{da}\,\frac{d\alpha}{dy}+\frac{dw}{db}\left(\frac{d\alpha}{dx}+1\right)\right\}\frac{d\,\delta\alpha}{dz}\\ &+\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Wenn wir daher partiell integriren und beachten, dass $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ an der Grenzfläche verschwinden, so ergibt sich

$$\delta W = -\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz\left\{\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}\right)\delta\alpha + \text{u. s. w.}\right\}, \tag{6}$$

wo P, Q, R der Kürze wegen die Grössen bezeichnen, welche in

dem vorhergehenden Ausdruck $\frac{d\,\delta\,\alpha}{d\,x}, \frac{d\,\delta\,\alpha}{d\,y}, \frac{d\,\delta\,\alpha}{d\,z}$ multipliciren. Damit $\delta\,W$ verschwinde, müssen in dem jetzt dafür gefundenen Ausdrucke (6) die Multiplicatoren von $\delta\,\alpha$, $\delta\,\beta$, $\delta\,\gamma$ einzeln verschwinden, und wir erhalten somit als Gleichungen des inneren Gleichgewichts

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{d}{d\,x}\left\{2\,\frac{d\,w}{d\,A}\left(\frac{d\,\alpha}{d\,x}+1\right)+\frac{d\,w}{d\,b}\,\frac{d\,\alpha}{d\,z}+\frac{d\,w}{d\,c}\,\frac{d\,\alpha}{d\,y}\right\} \\ +\frac{d}{d\,y}\left\{2\,\frac{d\,w}{d\,B}\,\frac{d\,\alpha}{d\,y}+\frac{d\,w}{d\,a}\,\frac{d\,\alpha}{d\,z}+\frac{d\,w}{d\,c}\left(\frac{d\,\alpha}{d\,x}+1\right)\right\} \\ +\frac{d}{d\,z}\left\{2\,\frac{d\,w}{d\,C}\,\frac{d\,\alpha}{d\,z}+\frac{d\,w}{d\,a}\,\frac{d\,\alpha}{d\,y}+\frac{d\,w}{d\,b}\left(\frac{d\,\alpha}{d\,x}+1\right)\right\}=0, \\ \qquad\text{u. s. w.} \qquad\qquad \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

wo die zweite und dritte Gleichung, die wir nicht angegeben haben, ihres symmetrischen Baues wegen sofort niedergeschrieben werden können.

(e) **Beweis, dass die Gleichungen (7), wenn die Oberflächenverschiebung gegeben ist, eine und nur eine Lösung zulassen, wenn es keine Configuration instabilen Gleichgewichts gibt.** — Aus der Eigenschaft, dass w nothwendig positiv ist, wenn irgend eine Deformation vorhanden ist, folgt, dass auch im Innern eine gewisse Deformation vorhanden sein muss, welche $\int\int\int w\,d\,x\,d\,y\,d\,z$ den der vorgeschriebenen Oberflächenbedingung unterworfenen kleinsten möglichen Werth annehmen lässt, und dass daher auch die Lösung der Gleichungen (7) unter Beobachtung dieser Bedingung möglich ist. Von welcher Beschaffenheit nun auch der feste Körper hinsichtlich der Elasticitätsdifferenz, die in irgend einem Theil in verschiedenen Richtungen stattfinde, oder hinsichtlich der Heterogenität von Punkt zu Punkt sein möge, und einer wie grossen Form- und Dimensionenänderung er auch unterworfen sein möge, wenn es keine innere Configuration instabilen und folglich nur eine Configuration stabilen Gleichgewichts geben kann, welche die für die Punkte der Oberfläche vorgeschriebene Verschiebung enthält, und bei welcher keine störende Kraft auf das Innere einwirkt, so muss w nicht nur positiv, sondern eine solche Function von A, B, u. s. w. sein, dass die Gleichungen (7) nur eine Lösung besitzen. Offenbar ist dies der Fall, wenn der feste Körper in seinem undeformirten Zustande homogen ist.

(f) **Verallgemeinerungen.** — Es ist leicht, in einer der vorhergehenden ähnlichen allgemeinen Untersuchung die Wirkungen einer auf die innere Substanz einwirkenden Kraft mit in Rechnung zu ziehen, wie wir sie oben in §§ 730 . . . 737 für eine Kugelschale von homogener, isotroper Masse betrachtet haben. Ferner ist es leicht, die allgemeine Untersuchung dem Falle anzupassen, in welchem nicht die Verschiebungen der Oberflächenpunkte, sondern die auf dieselben einwirkenden Kräfte gegeben sind.

(g) **Fall unendlich kleiner Deformationen. Green's Theorie.** — Welches auch die allgemeine Form der Function f für irgend einen Theil der Substanz sein möge, da dieselbe immer positiv ist, so kann sie ihr Zeichen nicht ändern, wenn $A-1$, $B-1$, $C-1$, a, b, c ein anderes Zeichen erhalten, und muss daher für unendlich kleine Werthe dieser Grössen eine homogene Function zweiten Grades derselben sein, die constante Coefficienten hat. (Es ist von Nutzen zu bemerken, dass f daher für alle Werthe der Veränderlichen A, B, u. s. w. in derselben Form ausgedrückt werden kann, und dass jeder der variabeln Coefficienten dieses Ausdrucks für alle Werthe der Veränderlichen immer von endlicher Grösse ist.) Für unendlich kleine Deformationen ist demnach Green's Theorie der elastischen festen Körper auf eine homogene Function zweiten Grades der Deformationscomponenten basirt, und zwar drückt diese Function die zur Hervorbringung der Deformation erforderliche Arbeit aus. Setzen wir also

$$A-1=2e,\ B-1=2f,\ C-1=2g \tag{8}$$

und bezeichnen die Coefficienten mit $\frac{1}{2}(e,e)$, $\frac{1}{2}(f,f)$, $\cdots$, (e,f), $\cdots$, (e,a), ..., so erhalten wir, wie oben in § 673,

$$(9)\quad \begin{cases} w=\frac{1}{2}\{(e,e)e^2+(f,f)f^2+(g,g)g^2+(a,a)a^2+(b,b)b^2+(c,c)c^2\} \\ \qquad +(e,f)ef+(e,g)eg+(e,a)ea+(e,b)eb+(e,c)ec \\ \qquad +(f,g)fg+(f,a)fa+(f,b)fb+(f,c)fc \\ \qquad +(g,a)ga+(g,b)gb+(g,c)gc \\ \qquad +(a,b)ab+(a,c)ac \\ \qquad +(b,c)bc \end{cases}$$

(h) **Dynamische Gleichungen des inneren Gleichgewichts.** — Wenn die Deformationen unendlich klein sind, so ist

jedes der Producte $\frac{dw}{dA}\frac{d\alpha}{dx}, \frac{dw}{db}\frac{d\alpha}{dz}$, u. s. w. eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung. Wir können diese Producte daher fortlassen und die Gleichungen (7) mit Rücksicht auf (8) auf die Form

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\frac{dw}{de} + \frac{d}{dy}\frac{dw}{dc} + \frac{d}{dz}\frac{dw}{db} = 0 \\ \frac{d}{dx}\frac{dw}{dc} + \frac{d}{dy}\frac{dw}{df} + \frac{d}{dz}\frac{dw}{da} = 0 \\ \frac{d}{dx}\frac{dw}{db} + \frac{d}{dy}\frac{dw}{da} + \frac{d}{dz}\frac{dw}{dg} = 0 \end{cases}$$

bringen; dies sind die Gleichungen des inneren Gleichgewichts. Aus (9) ersehen wir, dass $\frac{dw}{de}, \cdots, \frac{dw}{da}, \cdots$ lineare Functionen der Deformationscomponenten e, f, g, a, b, c sind. Eine derselben wollen wir als Beispiel vollständig niederschreiben:

$$(11)\quad \frac{dw}{de} = (e, e)\,e + (e, f)\,f + (e, g)\,g + (e, a)\,a + (e, b)\,b + (e, c)\,c.$$

Wenn wieder α, β, γ die Componenten der Verschiebung bezeichnen, welche irgend ein innerer Massenpunkt P von der anfänglichen Lage (x, y, z) aus erleidet, so ist nach (8) und (1)

$$(12)\quad \begin{cases} e = \frac{d\alpha}{dx}, \quad f = \frac{d\beta}{dy}, \quad g = \frac{d\gamma}{dz} \\ a = \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}, \; b = \frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz}, \; c = \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}. \end{cases}$$

Es ist zu bemerken, dass die Coefficienten (e, e), (e, f), u. s. w. im Allgemeinen Functionen von (x, y, z) sind; jeder dieser Coefficienten ist aber eine Constante, wenn der feste Körper in seinem undeformirten Zustande homogen ist.

(i) **Im Falle unendlich kleiner Deformationen haben die Gleichungen des inneren Gleichgewichts nur eine Lösung, wenn die Oberflächenverschiebung gegeben ist.** — Es ist jetzt leicht, für den Fall unendlich kleiner Deformationen direct zu beweisen, dass die Gleichungen des inneren Gleichgewichts sowohl für einen heterogenen, als auch für einen homogenen festen Körper, dessen Oberfläche der angegebenen Bedingung unterworfen ist, nur eine Lösung zulassen. Zu diesem Zwecke seien α, β, γ Verschiebungscomponenten, welche den Gleichungen genügen, und es bezeichnen α', β', γ' beliebige andere Functionen von x, y, z, welche die-

selben Oberflächenwerthe wie α, β, γ haben. Wenn ferner $e', f', \ldots, w'$ Functionen bezeichnen, die in derselben Weise von α', β', γ', wie e, f, ..., w von α, β, γ abhängen, so ist nach dem Taylor'schen Satze

$$w' - w = \frac{dw}{de}(e' - e) + \frac{dw}{df}(f' - f) + \frac{dw}{dg}(g' - g)$$
$$+ \frac{dw}{da}(a' - a) + \frac{dw}{db}(b' - b) + \frac{dw}{dc}(c' - c) + H;$$

darin bezeichnet H dieselbe homogene Function zweiten Grades von $e' - e$, u. s. w., welche w von e, u. s. w. ist. Substituiren wir für $e' - e$, u. s. w. die Werthe, welche die Formeln (12) liefern, so geht die letzte Gleichung über in

$$w' - w = \frac{dw}{de}\frac{d(\alpha' - \alpha)}{dx} + \frac{dw}{db}\frac{d(\alpha' - \alpha)}{dz} + \frac{dw}{dc}\frac{d(\alpha' - \alpha)}{dy} + \cdots + H.$$

Wenn wir dies mit $dx\, dy\, dz$ multipliciren und sodann partiell integriren, so erhalten wir einfach der Gleichungen (10) wegen, und weil $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$ auf der Umgrenzungsfläche verschwinden,

$$(13) \qquad \iiint (w' - w)\, dx\, dy\, dz = \iiint H\, dx\, dy\, dz.$$

Nun ist aber H seiner Natur nach positiv. Folglich erfordert jeder von dem durch α, β, γ definirten abweichende innere Zustand, vorausgesetzt nur, dass er dieselbe Umgrenzungsfläche hat, zu seiner Hervorbringung eine grössere Arbeit als w, und zwar ist diese Mehrarbeit gleich der Arbeit, die nöthig sein würde, um vom undeformirten Zustande aus eine Verschiebung zu erzeugen, die α, β, γ superponirt die andere Verschiebung ausmachen würde. Da nun α, β, γ nur den Bedingungen (11) genügen und die gegebenen Oberflächenwerthe haben, so ergibt sich, dass nur eine Lösung diese Bedingungen erfüllen kann.

(j) **Die Gleichungen haben nicht nothwendig nur eine Lösung, wenn die auf die Oberfläche wirkenden Kräfte gegeben sind.** — Wenn aber (wie Stokes ausgeführt hat) nicht die Verschiebung, sondern die Kraft gegeben ist, welcher die Oberfläche ausgesetzt ist, oder wenn von aussen her eine Kraft auf die innere Substanz des Körpers einwirkt, so ist die Lösung im Allgemeinen nicht eindeutig, und es kann selbst bei einer unendlich kleinen Verschiebung Configurationen instabilen Gleichgewichts geben. Es möge z. B. ein Theil des Körpers aus einem Stahlstabmagneten bestehen und ein zweiter solcher Magnet ausserhalb des Körpers so gehalten werden, dass beide Magnete in derselben Linie liegen, und dass zwei

gleichnamige Pole einander genähert sind. Dann wird das Gleichgewicht instabil sein, und es wird Lagen stabilen Gleichgewichts geben, bei denen der innere Stab gegen die Richtung des äusseren schwach geneigt ist, wofern nicht die Starrheit des übrigen Theiles des Körpers eine gewisse Grenze überschreitet.

(k) **Bedingung der Isotropie.** — Wenn wir jetzt zum allgemeinen Problem zurückkehren, in welchem die Deformationen nicht als unendlich klein vorausgesetzt werden, so sehen wir, dass, wenn der feste Körper in jedem Theil isotrop ist, die w ausdrückende Function von A, B, C, a, b, c bloss eine Function der Wurzeln der Gleichung [§ 181 (11)]

$$(14)\quad \begin{cases} (A-\zeta^2)(B-\zeta^2)(C-\zeta^2)-a^2(A-\zeta^2) \\ \qquad -b^2(B-\zeta^2)-c^2(C-\zeta^2)+2abc=0 \end{cases}$$

sein muss, welche (d. h. die positiven Werthe von ζ) die Verhältnisse der Elongation längs der Hauptaxen des Deformationsellipsoides sind. Es ist unnöthig, hier auf den analytischen Ausdruck dieser Bedingung einzugehen. Für den Fall, dass jede der Grössen $A-1$, $B-1$, $C-1$, a, b, c unendlich klein ist, erfordert dieselbe offenbar, dass

$$(15)\begin{cases} (e,e)=(f,f)=(g,g);(f,g)=(g,e)=(e,f);(a,a)=(b,b)=(c,c); \\ (e,\,a)=(f,\,b)=(g,\,c)=0;\ (b,\,c)=(c,\,a)=(a,\,b)=0; \\ (e,\,b)=(e,\,c)=(f,\,c)=(f,\,a)=(g,\,a)=(g,\,b)=0 \end{cases}$$

sei. Die 21 Coefficienten reduciren sich daher auf folgende drei: —

(e, e), was wir mit dem einen Buchstaben $\mathfrak{A}$ bezeichnen
(f, g), „ „ „ „ „ „ $\mathfrak{B}$ „
(a, a), „ „ „ „ „ „ n „

Es ist klar, dass dies nothwendig und hinreichend ist für eine cubische Isotropie, d. h. für eine vollkommene Gleichheit der elastischen Eigenschaften nach drei zu einander senkrechten Richtungen OX, OY, OZ hin. Für eine sphärische Isotropie dagegen, d. h. für eine vollständige Isotropie nach allen durch die Substanz gehenden Richtungen hin, ist weiter erforderlich, dass

$$(16)\qquad \mathfrak{A}-\mathfrak{B}=2n$$

sei; dies lässt sich leicht auf zwei Weisen darthun: analytisch, indem man zwei der Coordinatenaxen in ihrer eigenen Ebene durch einen Winkel von 45° dreht; geometrisch, indem man die Natur der durch eins der Elemente a, b, c dargestellten Deformation (eine „einfache Schiebung“) untersucht und mit der Resultante von c und

$f = -e$ (was auch eine einfache Schiebung ist) vergleicht. Es empfiehlt sich jetzt,

(17) $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 2m$, also $\mathfrak{A} = m + n$, $\mathfrak{B} = m - n$

zu setzen, und danach geht der Ausdruck der für die Volumeneinheit genommenen potentiellen Energie über in

$$(18)\left\{\begin{aligned} 2w &= m(e+f+g)^2 \\ &\quad + n(e^2+f^2+g^2-2fg-2ge-2ef+a^2+b^2+c^2). \end{aligned}\right.$$

Wenn wir dies in (9) benutzen und für e, f, g, a, b, c die aus (12) entnommenen Werthe substituiren, so erhalten wir unmittelbar für die Gleichungen des inneren Gleichgewichts dieselben Gleichungen wie in § 698 (6).

(l) **Componenten des für eine unendlich kleine Deformation erforderten elastischen Zwanges.** — Um die von den Massenpunkten, welche zu beiden Seiten einer Fläche innerhalb des festen Körpers liegen, auf einander ausgeübte Kraft, wie sie durch § 662 (1) ausgedrückt ist, zu finden, haben wir offenbar, wenn wir die beziehungsweise von P, Q, R, S, T, U (§ 662) bei einer unendlich kleinen Aenderung der Gestalt oder der Dimensionen des Körpers geleistete Arbeit betrachten,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{dw}{de}, \; Q = \frac{dw}{df}, \; R = \frac{dw}{dg}, \\ S &= \frac{dw}{da}, \; T = \frac{dw}{db}, \; U = \frac{dw}{dc}. \end{aligned}\right.$$

Für einen isotropen festen Körper liefert also (18) die Ausdrücke, die wir oben in § 673 (12) gebraucht haben.

(m) **Moduln der Starrheit und des Widerstandes gegen eine Compression.** — Um die Coefficienten m und n in Verbindung mit den Grundbegriffen der Elasticität fester Körper zu interpretiren, nehmen wir zunächst an, es sei

$$a = b = c = 0 \text{ und } e = f = g = \frac{1}{3}\,\delta,$$

mit anderen Worten, die Substanz erfahre eine in allen Richtungen gleichmässige Ausdehnung, welche das Volumen in dem Verhältniss von 1 zu $1 + \delta$ vergrössert. In diesem Falle verwandelt sich (18) in

$$w = \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{3}\,n\right)\delta^2,$$

und wir erhalten

$$\frac{dw}{d\delta} = \left(m - \frac{1}{3}n\right)\delta.$$

Folglich ist $\left(m - \frac{1}{3}n\right)\delta$ die für die Flächeneinheit genommene zur Oberfläche normale Kraft, deren es bedarf, um irgend einen Theil des Körpers in der durch δ ausgedrückten Ausdehnung zu erhalten. Danach misst $m - \frac{1}{3}n$ die durch die Volumenänderung ins Leben gerufene elastische Kraft oder den elastischen Widerstand gegen die Volumenänderung und kann, als Elasticitätsmodulus angesehen, die Volumenelasticität genannt werden [vergleiche §§ 692, 693, 694, 688, 682 und 680]. Was man gewöhnlich die „Zusammendrückbarkeit" nennt, wird durch $\frac{1}{m - \frac{1}{3}n}$ gemessen.

Weiter sei $e = f = g = b = c = 0$; dies liefert

$$w = \frac{1}{2}na^2 \text{ und nach (19) } S = na.$$

Hieraus geht hervor, dass die für die Flächeneinheit genommene Tangentialkraft, die erfordert wird, um eine unendlich kleine Schiebung (§ 171) von der Grösse a zu erzeugen, na ist. Folglich misst n die dem Körper inne wohnende Kraft, einer Formänderung zu widerstehen und seine anfängliche Gestalt wieder anzunehmen, wenn dieselbe durch eine äussere Kraft geändert ist, d. h. n misst die Starrheit der Substanz.

D. Ueber die säculare Abkühlung der Erde *).

(a) Achtzehn Jahre lang hat mich der Gedanke beunruhigt, dass wesentliche Principien der Thermodynamik von denjenigen Geologen übersehen worden sind, welche sich allen Hypothesen ohne Unterschied widersetzen, nach denen in der Entwicklung der Erde verschiedene scharf von einander getrennte Perioden zu unterscheiden seien, und welche behaupten, dass wir nicht nur jetzt auf der Erde Beispiele all der verschiedenen Wirkungen vor uns haben, durch welche die Erdrinde im Laufe der Zeit modificirt worden ist, sondern dass diese Wirkungen nie oder doch nicht im Ganzen in früherer Zeit heftiger gewesen sind als jetzt.

(b) **Abnahme des Energievorraths im Sonnensystem.** — Es unterliegt keinem Zweifel, dass das Sonnensystem, sogar in seinem jetzigen Zustande, nicht einige Hunderttausend oder Millionen Jahre bestanden haben kann, ohne dass ein sehr beträchtlicher Theil der gesammten Energie, welche das System anfänglich für Sonnenwärme und vulcanische Wirkung besass (durch Abgabe nach aussen, nicht durch Vernichtung), unwiederbringlich verloren sei. Es ist ganz gewiss, dass der im Sonnensystem enthaltene Energievorrath in allen vergangenen Zeiten grösser gewesen ist als jetzt. Man könnte sich nun zwar denken, dass die Geschwindigkeit, mit welcher diese Energie durch die Sonnenstrahlung oder durch vulcanische Wirkungen in der Erde oder in anderen dunkeln Körpern des Systems aufgebraucht worden ist, in gewissen Perioden der Vergangenheit nahezu ebenso

*) Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1862 (W. Thomson).

gross oder vielleicht gar kleiner gewesen ist als jetzt; es ist aber weit wahrscheinlicher, dass zu jeder Zeit nach dem Beginn der gegenwärtigen Ordnung der Dinge der säculare Verlust in einer gewissen directen Proportion zu dem gesammten Energievorrath gestanden hat und daher von Jahr zu Jahr sehr langsam kleiner geworden ist.

(c) Ich habe versucht, dies für die Sonnenwärme in einem neulich in Macmillan's Magazine (März 1862) veröffentlichten Artikel zu beweisen, in welchem ich gezeigt habe, dass die Sonne höchst wahrscheinlich vor einer Million Jahren wärmer war, als sie jetzt ist. Folglich haben die geologischen Speculationen, welche sich darauf stützen, dass in früherer Zeit die Temperaturextreme grösser, die Stürme und Fluthen heftiger, die Vegetation üppiger und die Pflanzen und Thiere gröber und zäher gewesen seien, mehr Wahrscheinlichkeit für sich, als diejenigen der Vertreter einer äussersten Gleichförmigkeit in der Geschichte der Erde. Ein „Mittelweg", der in wissenschaftlichen Untersuchungen freilich nicht immer der sicherste ist, scheint es doch in diesem Falle zu sein. Es ist wahrscheinlich, dass die Annahme grosser Katastrophen, die alles Leben von der Erde vertilgten und plötzlich die ganze Oberfläche derselben zerstörten, durchaus falsch ist; ebenso ist es aber auch unmöglich, dass Hypothesen vollständig richtig sein können, nach welchen die Wärme und die Stürme 1,000,000 Jahre hindurch von gleicher Grösse gewesen seien.

(d) Fourier's mathematische Theorie der Wärmeleitung ist eine schöne Bearbeitung eines besonderen Falles aus der allgemeinen Theorie der „Zerstreuung von Energie" *). Eine Eigenthümlichkeit der praktischen Lösungen, welche Fourier's Arbeit darbietet, besteht darin, dass in jedem Falle eine Temperaturvertheilung, welche in einer unbegrenzten Zukunft allmälig ausgeglichen wird, durch eine Function der Zeit ausgedrückt wird, die für alle länger als eine gewisse bestimmbare Epoche verflossenen Zeiten ins Unendliche divergirt. Die Vertheilung der Wärme in einer solchen Epoche ist eine ursprüngliche, d. h. sie kann nicht durch natürliche Vorgänge aus einem vorausgehenden Zustande der Materie herrühren. Sie wird daher in Fourier's grossem mathematischen Gemälde passend eine „willkürliche ursprüngliche Wärmevertheilung" ge-

*) *Proceedings of Royal Soc. Edin.*, Febr. 1852. „On a Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Mechanical Energy". Siehe auch „On the Restoration of Energy in an Unequally Heated Space", *Phil. Mag.*, 1853, 1. Halbjahr.

nannt, da sie nur durch die Wirkung einer Kraft herbeigeführt werden konnte, die im Stande war, die Gesetze der todten Materie zu modificiren. In einem vor ungefähr neunzehn Jahren im Cambridge Mathematical Journal *) veröffentlichten Artikel gab ich das mathematische Criterium für eine wirklich ursprüngliche Vertheilung, und in einer vor der Facultät der Universität Glasgow im Jahre 1846 gelesenen Antrittsrede „De Motu Caloris per Terrae Corpus" theilte ich als eine Anwendung dieser Principien mit, dass ein ganz vollständiges geothermisches System uns die Daten zur Bestimmung einer ursprünglichen Epoche in dem Problem der Wärmeleitung der Erde liefern würde. Auf der Zusammenkunft der Gesellschaft britischer Naturforscher zu Glasgow im Jahre 1855 forderte ich, dass man specielle geothermische Tabellen entwerfe, um dadurch absolute Daten in der Geologie zu erhalten, und führte einige Fälle aus, besonders den der Salzquellen in Kreuznach in Rheinpreussen, in welchen Eruptionen basaltischen Gesteins Spuren ihres vulcanischen Ursprungs in rückständiger Wärme zu hinterlassen scheinen **). Ich hoffe, dass dieser Rath jetzt befolgt und sich in gewissem Grade als nützlich erweisen wird, obwohl die Einflüsse, welche auf die Temperatur im Erdinnern störend einwirken, wie Professor Philipps in einer anderen Zuschrift an die geologische Gesellschaft gezeigt hat, zu gross sind, als dass wir sehr genaue oder zufrieden stellende Resultate erwarten dürften.

(e) Der Hauptzweck der vorliegenden Mittheilung ist der, aus der bekannten allgemeinen Zunahme der Temperatur in der Erde den Zeitpunkt zu bestimmen, in welchem zuerst jener consistentior status eintrat, welcher nach Leibnitz's Theorie der Ausgangspunkt jeder geologischen Geschichte ist.

(f) **Temperaturzunahme im Erdinnern.** — In allen Theilen der Welt, in welchen die Erdrinde in Tiefen untersucht worden ist, die gross genug waren, um den grossen Einfluss der unregelmässigen und der jährlichen Variationen der Temperatur der Oberfläche zu vermeiden, hat man gefunden, dass die Temperatur allmälig steigt, wenn man tiefer in die Erde hinabgeht. Ueber die Grösse der Zunahme (für die man in einigen Gegenden nur $\frac{1}{110}$ Grad F., in anderen gar $\frac{1}{15}$ Grad F. für die Tiefe von 1 engl. Fuss

*) Feb. 1844. — „Note on Certain Points in the Theory of Heat".
**) British Association Report of 1855 (Glasgow) Meeting.

erhielt) hat man noch nicht an hinreichend vielen Orten Beobachtungen angestellt, um einen zuverlässigen Durchschnittswerth für die Rinde der ganzen Erde zu bestimmen. Als einen ungefähren Mittelwerth nimmt man gewöhnlich $\frac{1}{50}$ Grad F. per engl. Fuss an, mit anderen Worten: es wird als ein Ergebniss der Beobachtung angenommen, dass die Temperatur um etwa 1^0 F. steigt für jede 50 engl. Fuss, die man in die Erde hinabgeht.

(g) **Säcularer Wärmeverlust der Erde.** — Die Thatsache, dass die Temperatur mit der Tiefe steigt, involvirt einen unaufhörlichen Wärmeverlust aus dem Erdinnern, indem aus demselben Wärme in die Rinde oder durch diese in den Weltraum geleitet wird. Da nun die Erdrinde nicht von Jahr zu Jahr wärmer wird, so muss die Erde im Ganzen einen säcularen Wärmeverlust erleiden. Möglicher Weise ist die Wirkung dieses Verlustes keine Abkühlung, sondern nur ein Verbrauch der potentiellen Energie, welche in diesem Falle kaum etwas Anderes sein könnte, als die chemische Verwandtschaft zwischen den die Erdmasse bildenden Substanzen. Es unterliegt aber keinem Zweifel, dass die Erde im Ganzen entweder von Jahr zu Jahr kälter wird, oder dass sich die Wärme, die sie verliert, in ihrem Innern durch temporäre dynamische (d. h. in diesem Falle chemische) Wirkung wieder erzeugt. Mit Lyell*), der die chemische Hypothese adoptirte, vorauszusetzen, dass die Substanzen, die sich vereinigen, elektrolytisch durch die thermoelektrischen Ströme wieder getrennt werden möchten, welche durch die bei der Verbindung der Substanzen erzeugte Wärme erregt werden, und dass auf diese Weise die chemische Wirkung und die daraus folgende Wärmeerzeugung in einem endlosen Cyclus sich fortsetzten, verletzt die Principien der Physik in derselben Weise und demselben Grade, wie der Glaube, dass eine mit einem sich selbst aufziehenden Gehwerk construirte Uhr die Erwartungen ihres geistreichen Erfinders, dass sie ewig fortgehen würde, erfüllen könnte.

(h) Es muss in der That zugegeben werden, dass viele geologische Schriftsteller, welche die „Uniformität" vertheidigen und in anderen Beziehungen ihren Gegenstand tief philosophisch zu behandeln verstanden, in einer ganz sophistischen Weise gegen die Annahme stürmischerer älterer Entwicklungsperioden angekämpft

*) *Principles of Geology*, chap. XXXI, ed. 1853.

haben. Wenn sie sich damit begnügt hätten, darzuthun, dass viele vorhandene Erscheinungen, obschon sie auf eine äusserste Gewalt und einen plötzlichen Wechsel hindeuten, doch durch eine lang fortgesetzte Wirkung oder durch plötzliche Aenderungen zu Stande gebracht sind, die keine grössere Intensität als einige von denen haben, mit denen wir innerhalb der Perioden der menschlichen Geschichte bekannt geworden sind, so würde ihre Stellung unangreifbar gewesen sein und könnte jedenfalls nur durch eine detaillirte Discussion der von ihnen vorgebrachten Thatsachen angegriffen werden. Es würde ein überraschendes, aber nicht absolut unglaubliches Resultat sein, dass die vulcanische Wirkung im Ganzen niemals heftiger gewesen ist, als während der letzten zwei oder drei Jahrhunderte; aber es ist ebenso gewiss, dass sich jetzt weniger vulcanische Energie als vor 1000 Jahren in der ganzen Erde befindet, wie es keinem Zweifel unterliegt, dass ein Kriegsschiff, nachdem es fünf Stunden hindurch ohne frische Munition zu erhalten Schüsse und Bomben in nahezu gleichen oder ungleichen Intervallen abgefeuert hat, weniger Pulver enthält, als sich beim Beginn seiner Thätigkeit darauf befand. Und doch ist diese Wahrheit von vielen der ersten Geologen der Gegenwart ignorirt oder bestritten worden, weil sie glauben, dass die Thatsachen, die sich innerhalb ihres Gesichtskreises befinden, keine grössere Heftigkeit in den früheren Veränderungen der Erdoberfläche beweisen oder für eine nahezu gleichmässige Wirkung in allen Perioden sprechen.

(i) **Die chemische Hypothese zur Erklärung der Erdwärme ist nicht unmöglich, aber sehr unwahrscheinlich.** — Man könnte die chemische Hypothese zur Erklärung der Wärme des Erdinnern als nicht unwahrscheinlich ansehen, wenn sich eine Zunahme der Temperatur mit der Tiefe nur in isolirten Gegenden ergeben hätte, und in der That ist kaum daran zu zweifeln, dass die chemische Wirkung einen bemerkenswerthen (möglicher Weise jedoch negativen) Einfluss auf die Wirkung der Vulcane ausübt. Dass aber in einer grossen unbekannten Tiefe unter der Oberfläche überall eine langsame gleichmässige „Verbrennung“ oder chemische Verbindung irgend einer Art vor sich gehe, die allmälig, wenn die chemischen Verwandtschaftskräfte successive in einer Schicht nach der anderen gesättigt werden, immer weiter in die Erde eindringt, scheint ausserordentlich unwahrscheinlich, obgleich man nicht behaupten kann, dass es absolut unmöglich oder allen Analogien in der Natur entgegen wäre. Doch ist beim gegenwärtigen Standpunkt der Wissenschaft offenbar die weniger hypothetische Ansicht vorzu-

ziehen, nach welcher die Erde nichts als ein chemisch unthätiger, in der Abkühlung begriffener warmer Körper ist.

(j) Mangelhaftigkeit der Poisson'schen Hypothese. — Poisson's berühmte Hypothese, dass die jetzige Wärme des Erdinnern aus einem in einer früheren Periode erfolgten Durchgang des Sonnensystems durch wärmere Regionen des Weltenraumes herrühre, kann nicht den Umstand erklären, dass die Petrefactenbildung während dieser Epoche äusserer Wärme keine Unterbrechung erlitt. Forbes hat an drei verschiedenen Stellen in der Nähe von Edinburg Beobachtungen über die Temperatur des Erdinnern angestellt. Aus einem Mittelwerth der aus diesen Beobachtungen hergeleiteten Werthe des durch die Wärmecapacität der Volumeneinheit der Erdrinde ausgedrückten Leitungsvermögens derselben finde ich, dass, wenn der vorausgesetzte Durchgang durch einen wärmeren Theil des Weltraums vor nicht weniger als 1250 und nicht mehr als 5000 Jahren stattfand, die Temperatur jenes Raumes 25° bis 50° F. höher gewesen sein muss, als die jetzige mittlere Temperatur der Erdoberfläche, um die jetzige allgemeine Zunahme der Temperatur mit der Tiefe in der Erde — 1° F. per 50 engl. Fuss Tiefe — zu erklären. Die Geschichte widerlegt diese Annahme. Ferner werden, denke ich, die Geologen und Astronomen zugeben, dass die Erde vor 20,000 Jahren nicht in einem Raume sich befunden haben kann, der um 100° F. wärmer als jetzt die Erdoberfläche ist. Wenn aber der von Poisson vorausgesetzte Uebergang aus einer wärmeren in eine kältere Region vor mehr als 20,000 Jahren stattfand, so muss die Temperaturdifferenz mehr als 100° F. betragen haben, und daher hätte alles animalische und vegetabilische Leben zerstört werden müssen. Je weiter wir daher Poisson's warme Region zurückversetzen, und je wärmer wir sie voraussetzen, um so besser ist es für die Geologen, welche möglichst lange Perioden fordern; am besten ist für ihren Zweck aber Leibnitz's Theorie, welche einfach voraussetzt, dass die Erde früher eine glühende Flüssigkeit war, ohne zu erklären, wie sie in diesen Zustand gelangte. Wenn wir die Temperatur einer schmelzenden Felsmasse gleich ungefähr 10,000° F. (eine äusserst hohe Schätzung) annehmen, so kann die Erstarrung vor 200,000,000 Jahren erfolgt sein. Oder wenn wir voraussetzen, dass Felsmassen schon bei einer Temperatur von 7000° F. schmelzen (was mit der gewöhnlichen Annahme mehr übereinstimmt), so können wir annehmen, dass die Erstarrung vor 98,000,000 Jahren stattgefunden hat.

(k) **Wahrscheinliche Grenzwerthe des Wärmeleitungsvermögens und der Wärmecapacität der Erdoberfläche.** — Diese Bestimmungen gründen sich auf die unten entwickelte Theorie von Fourier. Die grösste Veränderung, die wir an ihnen zu machen haben, um die Differenzen in den Verhältnissen des Leitungsvermögens zur specifischen Wärme, die sich an den drei verschiedenen Stellen bei Edinburg ergeben haben, in Rechnung zu ziehen, besteht darin, dass man sie auf ungefähr die Hälfte reducirt oder sie um etwas mehr als die Hälfte vergrössert. Eine Reduction der bei Greenwich angestellten Beobachtungen der Erdwärme, die mir neuerdings Professor Everett aus Windsor mitgetheilt hat, liefert für die Greenwicher Felsmassen Zahlen, die zwischen den bei Edinburg erhaltenen liegen. Wir sind aber völlig unwissend in Betreff der Wirkungen, welche hohe Temperaturen auf das Leitungsvermögen und die specifische Wärme der Steine ausüben, und in Betreff der latenten Schmelzwärme derselben. Daher müssen wir in einer Berechnung, wie ich sie zu machen versucht habe, sehr weite Grenzen einräumen; ich glaube aber, dass wir mit vieler Wahrscheinlichkeit sagen können, dass die Erstarrung der Erde vor nicht weniger als 20,000,000 Jahren und vor nicht mehr als 400,000,000 Jahren stattgefunden haben kann; denn im ersteren Falle würde die Wärme des Erdinnern grösser sein müssen, als sie jetzt ist; im letzteren Falle würde die Temperatur mit der Tiefe nicht in dem Grade zunehmen, welchen die kleinsten durch directe Beobachtungen erhaltenen Resultate angeben. Ich schliesse daraus, dass Leibnitz's Epoche der Entstehung des consistentior status wahrscheinlich zwischen jenen Grenzen liegt.

(l) **Mathematischer Ausdruck für die innere Temperatur in der Nähe der Oberfläche eines heissen festen Körpers, der anfängt sich abzukühlen.** — Die mathematische Theorie, auf welche diese Berechnungen sich gründen, ist sehr einfach, nämlich bloss eine Anwendung einer der elementaren Lösungen, welche Fourier für das Problem gegeben hat: In einem festen Körper, der sich nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstreckt, zu irgend einer Zeit die Variation der Temperatur von Punkt zu Punkt und die in irgend einem Punkte wirklich vorhandene Temperatur unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass die Temperatur zu einer anfänglichen Epoche zu beiden Seiten einer gewissen unendlich grossen Ebene zwei verschiedene constante Werthe hatte. Die Lösung für die beiden gesuchten Elemente ist folgende: —

$$\frac{dv}{dx} = \frac{V}{\sqrt{\pi \varkappa t}} e^{-\frac{x^2}{4 \varkappa t}},$$

$$v = v_0 + \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} dz\, e^{-z^2};$$

darin bezeichnen

$\varkappa$ das durch die Wärmecapacität der Masseneinheit ausgedrückte Leitungsvermögen des festen Körpers;

V die halbe Differenz der beiden anfänglichen Temperaturen;

v_0 das arithmetische Mittel dieser Temperaturen;

t die Zeit;

x den Abstand irgend eines Punktes von der Mittelebene;

v die Temperatur des Punktes x zur Zeit t; und folglich

$\frac{dv}{dx}$ (nach der Bezeichnung der Differentialrechnung) die für die Längeneinheit senkrecht zu den isothermalen Ebenen genommene Grösse der Variation der Temperatur.

(m) Diese Lösung zu beweisen, haben wir nur Folgendes darzuthun: —

(1) Dass der Ausdruck für v der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = \varkappa \frac{d^2 v}{dx^2},$$

Fourier's Gleichung für die „lineare Wärmeleitung", genügt;

(2) Dass, wenn $t = 0$ ist, der Ausdruck für v für alle positiven Werthe von x in $v_0 + V$, für alle negativen Werthe von x in $v_0 - V$ übergeht;

(3) Dass der Ausdruck für $\frac{dv}{dx}$ der nach x genommene Differentialquotient des Ausdrucks für v ist.

Die Sätze (1) und (3) werden direct durch Differentiation bewiesen. Um (2) zu beweisen, haben wir, wenn $t = 0$ und x positiv ist,

$$v = v_0 + \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dz\, e^{-z^2},$$

oder nach dem bekannten Werthe $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ des bestimmten Integrals $\int_0^\infty dz\, e^{-z^2}$,

$$v = v_0 + V;$$

da nun für alle Werthe von t das zweite Glied für gleiche positive und negative Werthe von x gleiche positive und negative Werthe hat, so folgt, wenn $t = 0$ und x negativ ist,

$$v = v_0 - V.$$

Die bewundernswerthe Analyse, durch welche Fourier zu Lösungen gelangte, die die obige umfassen, bildet ein äusserst interessantes und wichtiges mathematisches Studium. Sie findet sich in seiner Théorie Analytique de la Chaleur, Paris 1822.

(n) Die Fig. 90 auf Seite 444 stellt durch zwei Curven beziehungsweise die vorhergehenden Ausdrücke für $\frac{dv}{dx}$ und v dar.

(o) Die in dieser Weise ausgedrückte und erläuterte Lösung lässt sich für eine gewisse Zeit ohne merklichen Irrthum auf den Fall einer Vollkugel anwenden, welche ursprünglich auf eine gleichmässige Temperatur erwärmt, und deren Oberfläche sodann plötzlich einer Einwirkung unterworfen wurde, die für alle folgende Zeit die Oberfläche in einer anderen constanten Temperatur erhält. Wenn z. B. der betrachtete Fall der einer aus fester Felsmasse bestehenden Kugel von 8000 engl. Meilen Durchmesser ist, so kann die Lösung mit kaum merklichem Fehler auf mehr als 1000 Millionen Jahre angewandt werden. Denn wenn die Felsmasse hinsichtlich des Leitungsvermögens und der specifischen Wärme von einer gewissen mittleren Beschaffenheit ist, so wird der Werth von $\varkappa$, wie ich in einer früheren Mittheilung an die königliche Gesellschaft *) gefunden habe, 400 sein; dabei ist als Längeneinheit der britische Fuss und als Zeiteinheit das Jahr angenommen; die Gleichung, welche die Lösung ausdrückt, geht dann über in

$$\frac{dv}{dx} = \frac{V}{35{\cdot}4} \cdot \frac{1}{t^{1/2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{1600\,t}},$$

und wenn wir t den Werth 1,000,000,000 oder einen etwas kleineren Werth ertheilen, so wird der Exponentialfactor weniger als $e^{-5{\cdot}6}$ (was ungefähr gleich $\frac{1}{270}$ ist und daher als unmerklich angesehen werden kann), wenn x grösser als 3,000,000 engl. Fuss oder 568 engl. Meilen ist. Danach wird während der ersten 1000 Millionen Jahre die Variation der Temperatur in Tiefen, welche 568 Meilen überschreiten, nicht merklich; sie ist also auf eine so dünne

*) „On the Periodical Variations of Underground Temperature.“ *Trans. Roy. Soc. Edinb.*, March 1860.

Kruste beschränkt, dass der Einfluss der Krümmung vernachlässigt werden kann.

(p) **Vertheilung der Temperatur 100 Millionen Jahre nach Beginn der Abkühlung einer hinlänglich grossen Felsmasse.** — Wenn wir jetzt voraussetzen, die Zeit vom Beginn der Veränderung an sei 100 Millionen Jahre, so geht die Gleichung über in

$$\frac{dv}{dx} = \frac{V}{354,000} e^{-\frac{x^2}{160,000,000,000}}.$$

Die Zeichnung zeigt daher (S. 444), wie die Temperatur in der Erde jetzt variiren würde, wenn die ganze Masse derselben anfänglich fest gewesen wäre und vor 100 Millionen Jahren überall dieselbe Temperatur besessen hätte, und wenn die Temperatur ihrer Oberfläche plötzlich überall um V Grad erniedrigt und sodann constant erhalten worden wäre; die hierbei benutzten Maasse sind folgende: —

(1) Für die längs OX zu messenden Tiefen unter der Oberfläche stellt die Länge a 400,000 engl. Fuss dar.

(2) Für die Curve der Temperaturzunahme per Fuss Tiefe stellt die längs der OY parallelen Ordinaten zu messende Länge b $\frac{1}{354,000}$ von V per Fuss dar. Wenn z. B. $V = 7000^0$ ist, so wird dieser Maassstab so beschaffen sein, dass b $\frac{1}{50{\cdot}6}$ eines Grades per Fuss darstellt.

(3) Für die Curve des Temperaturüberschusses drückt die längs der OY parallelen Ordinaten zu messende Länge b die Grösse $\frac{V}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$ aus, ist also 7900^0, wenn $V = 7000^0$ ist.

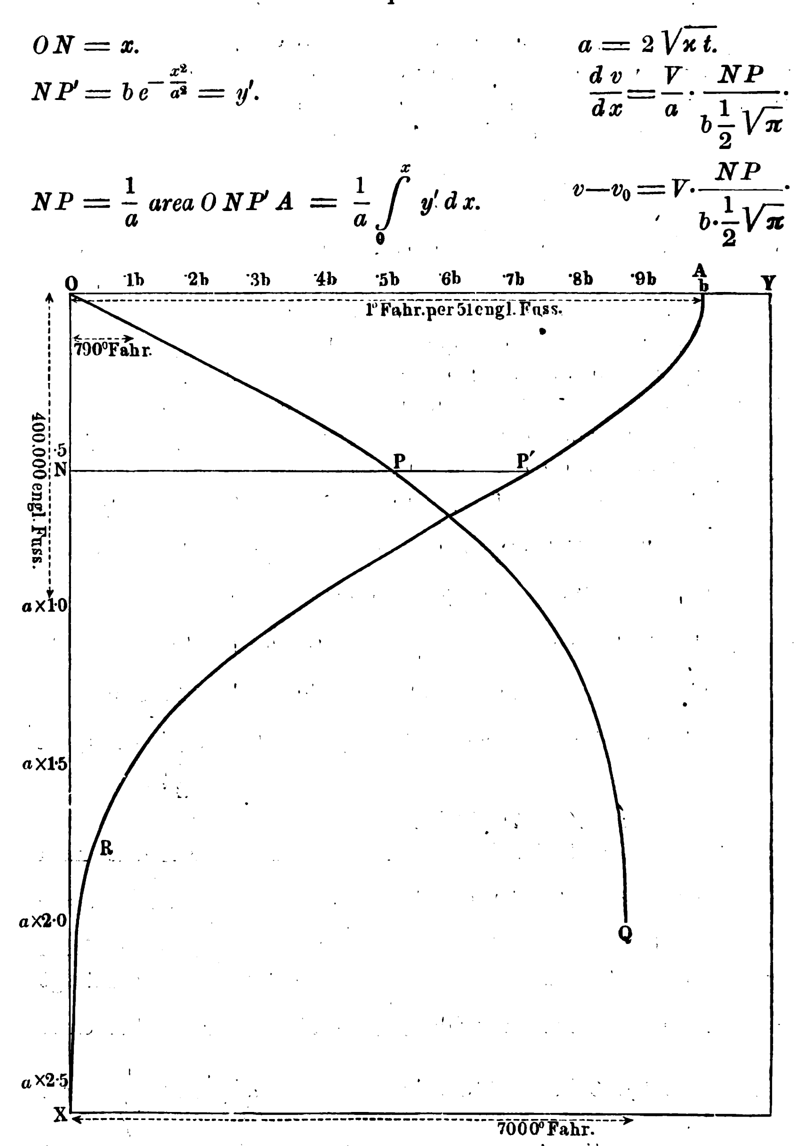
Danach nimmt die Temperatur von der Erdoberfläche nach innen zu für die ersten 100,000 Fuss um ungefähr $\frac{1}{51}$ Grad F. per Fuss zu. Unter dieser Tiefe beginnt die Temperatur merklich langsamer zu steigen. Bei einer Tiefe von 400,000 Fuss beträgt ihre Zunahme nur noch ungefähr $\frac{1}{141}$ Grad per Fuss. Bei einer Tiefe von 800,000 Fuss ist die Zunahme auf weniger als $\frac{1}{50}$ ihres anfänglichen Werthes gesunken, d. h. beträgt weniger als $\frac{1}{2550}$ Grad per Fuss; in dieser Weise wird die Zunahme rasch kleiner, wie aus

Zunahme der Temperatur in der Erde.

$ON = x.$ $\qquad a = 2\sqrt{\varkappa t}.$

$NP' = b\,e^{-\frac{x^2}{a^2}} = y'.$ $\qquad \frac{dv}{dx} = \frac{V}{a} \cdot \frac{NP}{b\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}.$

$NP = \frac{1}{a}\,area\,O\,N\,P'\,A = \frac{1}{a}\int_0^x y'\,dx.$ $\qquad v - v_0 = V \cdot \frac{NP}{b \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}.$



Die Curve $O\,P\,Q$ zeigt den Ueberschuss der Temperatur über die der Oberfläche.
Die Curve $A\,P'\,R$ zeigt die Grösse der Temperaturzunahme nach dem Mittelpunkt der Erde zu.

der Curve ersichtlich ist. Dies ist im Ganzen die wahrscheinlichste Darstellung der jetzigen Temperatur der Erde in Tiefen von 100 Fuss an, wo die jährlichen Variationen aufhören merklich zu sein, bis zu 100 Meilen, unterhalb welcher Grenze die Masse der Erde (sei sie nun flüssig oder fest) entweder ganz oder mit Ausnahme eines von Anfang an kalten Kernes, wahrscheinlich die dem Druck in jeder Tiefe entsprechende Schmelztemperatur oder doch eine davon nur sehr wenig abweichende Temperatur hat.

(q) **Das Klima wird durch die Erdwärme nicht merklich beeinflusst.** — Die oben dargelegte Theorie wirft Licht auf die so oft discutirte Frage: — Kann die Erdwärme lange geologische Perioden hindurch auf das Klima von Einfluss gewesen sein? — und erlaubt uns, dieselbe ganz entschieden zu verneinen. In dem Falle, den wir vorausgesetzt haben, würde die Temperaturzunahme 10,000 Jahre nach dem Beginn der Abkühlung in der Nähe der Oberfläche 2° F. per Fuss Tiefe betragen. Die Ausstrahlung von der Erde und der Atmosphäre in den Weltraum (über welche wir noch keine zufriedenstellende absolute Messung haben) würde im jetzigen Zustande der Erde fast gewiss genügend stark sein, um zu verhindern, dass eine Zunahme um 2° F. per Fuss Tiefe die Temperatur der Oberfläche um mehr als etwa 1° erhöht; und daraus schliesse ich, dass das allgemeine Klima nicht länger, als etwa während der ersten 10,000 Jahre nach dem Beginn der Erstarrung der Oberfläche durch die aus dem Innern zugeleitete Wärme merklich beeinflusst gewesen sein kann. Unzweifelhaft kann allerdings an einzelnen Orten eine Erhöhung der Temperatur durch warme Quellen oder durch Eruptionen geschmolzener Lava stattfinden, und überall würde während der ersten drei oder vier Millionen Jahre auf die Vegetation, wenn eine solche so bald nach der Epoche der Erstarrung existirt hätte, die merklich höhere Temperatur von Einfluss gewesen sein, welche die einen Fuss weit oder noch tiefer in die Erde eindringenden Pflanzenwurzeln angetroffen hätten.

(r) Welches auch die Grösse solcher Wirkungen zu irgend einer Zeit ist, dieselbe würde sich nach dem umgekehrten Verhältniss der Quadratwurzeln der seit der Anfangsepoche verflossenen Zeiten verringern. Wenn wir also 10,000 Jahre nach diesem Zeitpunkt 2° Zunahme per Fuss Tiefe haben, so würde die Zunahme nach

40,000 Jahren	1 Grad per Fuss		
160,000 „	$\frac{1}{2}$ „	„	„
4,000,000 „	$\frac{1}{10}$ „	„	„
100,000,000 „	$\frac{1}{50}$ „	„	„

betragen. Es ist daher wahrscheinlich, dass während der letzten 96,000,000 Jahre die Zunahme der Temperatur nach dem Mittelpunkt der Erde hin allmälig von $\frac{1}{10}$ bis zu $\frac{1}{50}$ Grad F. per Fuss kleiner geworden ist, und dass die Dicke der Erdrinde, durch welche hindurch irgend ein festgesetzter Grad der Abkühlung zu Stande gekommen ist, in derselben Periode allmälig von $\frac{1}{5}$ ihrer jetzigen Grösse zu dieser letzteren zugenommen hat. Steht dies nicht im Ganzen mit den richtig interpretirten Zeugnissen der Geologie in Uebereinstimmung? Stimmen nicht die ausgedehnten Basaltmassen, das allgemeine Auftreten von Bergketten, die gewaltsamen Verschiebungen und Durchbrechungen der Schichten, das bedeutende Vorherrschen umgestaltender Thätigkeit (welche in Tiefen von wenigen Meilen, vielleicht nicht einmal so tief stattgefunden haben muss) alle darin überein, zu beweisen, dass die Zunahme der Temperatur im Innern der Erde viel rascher gewesen sein muss, und es wahrscheinlich zu machen, dass die vulcanische Energie, die Erdbeben und jede Art der sogenannten plutonischen Wirkung in den früheren Perioden der Erde im Ganzen weit reichlicher und heftiger thätig gewesen ist als in der Gegenwart?

(s) **Einwände.** — Gegen diese Anwendung der mathematischen Theorie lassen sich jedoch folgende Einwände erheben: —

(1) Die Erde war einst ganz oder wenigstens auf ihrer ganzen Oberfläche geschmolzen, und man kann von ihr nicht oder doch nur mit grosser Unwahrscheinlichkeit voraussetzen, wie es in dem mathematischen Problem geschieht, dass sie je ein gleichmässig erwärmter fester Körper gewesen sei, dessen Temperatur die jetzige Temperatur der Erdoberfläche um 7000^0 übertroffen habe.

(2) Keine Wirkung in der Natur ist im Stande, eine Erniedrigung der Temperatur der Oberfläche um 7000^0 in einem Augenblick zu erzeugen und für alle spätere Zeit zu unterhalten.

Den zweiten Einwand, den wir zuerst vornehmen wollen, er-

ledige ich durch die Bemerkung, die, glaube ich, wohl nicht bestritten werden kann, dass eine der Luft und dem Himmel frei ausgesetzte grosse Masse geschmolzenen Gesteins, nachdem sie erst sich mit einer Kruste überzogen hat, in wenigen Stunden, oder in wenig Tagen oder doch in wenig Wochen eine so kalte Oberfläche besitzen wird, dass man ungestraft darüber hingehen kann. Folglich wird nach 10,000 Jahren oder in der That schon nach einem einzigen Jahre ihr Zustand ziemlich derselbe sein, als wenn die von ihrer Oberfläche erlittene Temperaturerniedrigung in einem Augenblick erzeugt und für alle folgende Zeit constant erhalten wäre. Den ersten Einwand beantworte ich damit, dass ich sage, dass, wenn die latente Schmelzwärme und die Variationen des Leitungsvermögens und der specifischen Wärme der Erdrinde bis zu ihrem Schmelzpunkt hinauf experimentell bestimmt sein werden, es leicht sein wird, die oben gegebene Lösung so zu modificiren, dass sie für den Fall einer flüssigen Kugel passt, welche in Folge der Wärmeleitung durch die feste Rinde in ein äusseres kaltes Medium allmälig von aussen nach innen zu erstarrt. Inzwischen können wir sehen, dass diese Modification keine beträchtliche Aenderung in der Temperatur hervorbringen wird, die sich für einen Punkt der Rinde ergibt, wofern sich nicht, entgegen dem, was wir nach der Analogie erwarten, die bei der Erstarrung frei gewordene latente Wärme als gross erweist im Vergleich zu der Wärme, welche eine gleiche Masse des festen Körpers abgibt, während sie sich von der Temperatur des Erstarrungspunktes zu derjenigen der Oberfläche abkühlt. Was aber die Sache näher trifft, ist, dass der Einwand, so plausibel er auch erscheint, trotzdem nicht stichhaltig ist, und dass das oben gelöste Problem aller Wahrscheinlichkeit nach weit mehr der wirklichen Geschichte der Erde entspricht, als das durch diesen Einwand vorgeschlagene modificirte Problem. Obwohl die Erde einst ganz oder wenigstens auf ihrer ganzen Oberfläche geschmolzen war, so ging sie demnächst doch wahrscheinlich in einen fester Körper über, dessen Temperatur überall oder überall in den äusseren Schichten, die geschmolzen gewesen waren, die des Schmelzpunktes war, und die Oberfläche fing nicht an abzukühlen, bevor die Erstarrung in dieser Weise oder doch nahezu in dieser Weise vollständig war. Dass diese Ansicht die richtige ist, kann kaum bezweifelt werden, wenn man die folgenden Gründe beachtet.

(t) Zunächst werden wir voraussetzen, dass die Erde zu einer Zeit aus einem festen Kern bestand, der überall mit einem sehr tiefen Ocean geschmolzener Felsmassen bedeckt und der Abkühlung

durch Ausstrahlung in den Weltraum überlassen war. Dies ist der Zustand, in welchen ein kalter Körper, der viel kleiner als unsere Erde ist, durch den Zusammenstoss mit vielen noch kleineren kalten Körpern gelangen würde, und steht daher in Uebereinstimmung mit der Hypothese über die Vorgeschichte der Erde, die wir als eine wahrscheinliche ansehen können. Es ist darin als ein besonderer Fall die mehr verbreitete Annahme enthalten, dass die Erde einst vollständig geschmolzen war, ein Zustand, der durch den Zusammenstoss von zwei nahezu gleichen Massen hätte herbeigeführt sein können. Die Beweise, welche die meisten Geologen zu der Ueberzeugung gebracht haben, dass die Erde einen feurig-flüssigen Anfang hatte, beziehen sich aber nur auf eine sehr kleine Tiefe unterhalb der Oberfläche und liefern uns durchaus keine Mittel, zwischen den wirklich stattfindenden Erscheinungen und denjenigen zu unterscheiden, die sich ergeben haben würden, wenn die Erde entweder eine vollständige Kugel flüssiger Felsmasse oder ein bis zu einer Tiefe von mehr als 50 bis 100 Meilen mit einer solchen Flüssigkeit bedeckter fester kalter Kern gewesen wäre. Indem wir daher von jeder Hypothese in Betreff der Antecedentien absehen, aus welchen der anfängliche feurig-flüssige Zustand der Erde durch natürliche Ursachen hervorging, und indem wir einfach annehmen, was die Geologie als wahrscheinlich erweist, dass die Erdoberfläche zu einer Zeit ganz mit geschmolzenen Felsmassen bedeckt war, brauchen wir nicht vorauszusetzen, dass die Tiefe dieser Lava mehr als 50 oder 100 Meilen betrug, obschon wir die Annahme einer grösseren Tiefe oder einer vollständig flüssigen Kugel nicht auszuschliessen brauchen.

(u) **Convectives Gleichgewicht der Temperatur.** — In dem Process der Abkühlung muss die Flüssigkeit [wie ich bei einer Betrachtung der Sonne in einem Artikel in Macmillan's Magazine (März 1862) und in einer Betrachtung der Atmosphäre der Erde in einer Mittheilung an die Literary and Philosophical Society von Manchester *) bemerkt habe] durch Fortführung (Convection) der Wärme dazu gebracht werden, dass sie einem bestimmten Gesetz der Temperaturvertheilung genügt, welches ich „das convective Gleichgewicht der Temperatur" genannt habe. Das heisst, die Temperaturen in den verschiedenen Theilen im Innern müssen für verschiedene Werthe des Drucks um solche Differenzen der Temperaturen von

*) *Proceedings*, Jan. 1862. „On the Convective Equilibrium of Temperature in the Atmosphere".

einander abweichen, wie sie irgend ein Theil der Flüssigkeit zeigen würde, wenn er mit der Temperatur und dem Druck einer bestimmten Schicht gegeben und dann einer Variation des Drucks ausgesetzt, dabei aber verhindert worden wäre, Wärme zu verlieren oder zu gewinnen. Der Grund davon ist die grosse Langsamkeit der eigentlichen Wärmeleitung und der folglich überwiegende Einfluss, welchen die grossen Ströme in einer continuirlichen Flüssigkeitsmasse auf die Vertheilung der Temperatur in der Masse ausüben.

(v) Das thermo-dynamische Gesetz, welches den Zusammenhang ausdrückt zwischen Temperatur und Druck in einer flüssigen Masse, der man nicht gestattet, Wärme zu verlieren oder zu gewinnen, ist theoretisch erforscht und in den Fällen von Luft und Wasser von Joule und mir selbst *) experimentell bewahrheitet. Es zeigt, dass die Temperatur in der Flüssigkeit von der Oberfläche nach unten zu wächst, wenn, wie es am wahrscheinlichsten der Fall ist, die Flüssigkeit bei der Abkühlung sich zusammenzieht. Wenn die Flüssigkeit andererseits, gleichwie Wasser in der Nähe seines Gefrierpunktes, bei der Abkühlung sich ausdehnte, so würde die Temperatur nach den eben ausgesprochenen convectiven und thermodynamischen Gesetzen (§§ u, v) thatsächlich in grösseren Tiefen niedriger als in der Nähe der Oberfläche sein, selbst wenn die Flüssigkeit sich von der Oberfläche aus abkühlt, und nur eine sehr dünne Schicht leichterer und kälterer Flüssigkeit, welche durch wirkliche Leitung Wärme verlöre, würde längs der Oberfläche bestehen, bis die Erstarrung an der Oberfläche anfinge.

(w) **Wirkung des Drucks auf die Temperatur.** — Ferner wird nach dem von meinem Bruder, Professor James Thomson **), erforschten und von mir ***) für Wasser experimentell bewahrheiteten thermo-dynamischen Gesetz des Gefrierens die Temperatur des Gefrierpunktes in grossen Tiefen des grossen Drucks wegen höher als an der Oberfläche sein, wenn sich die Flüssigkeit beim Gefrieren

*) Joule, „On the Changes of Temperature produced by the Rarefaction and Condensation of Air, *Phil. Mag.* 1845. Thomson, „On a Method for Determining Experimentally the Heat evolved by the Compression of Air: Dynamical Theory of Heat, Part IV, *Trans. R. S. E.*, Session 1850 bis 1851; wieder abgedruckt in *Phil. Mag.* Joule and Thomson, „On the Thermal Effects of Fluids in Motion", Trans. R. S. *London*, Juni 1853 und Juni 1854. Joule and Thomson, „On the Alterations of Temperature accompanying Changes of Pressure in Fluids", *Proceeding R. S.* London, Juni 1857.

**) „Theoretical Considerations regarding the Effect of Pressure in lowering the Freezing-Point of Water", *Trans. R. S. E.*, Jan. 1849.

***) *Proceedings R. S. E.*, Session 1849 bis 1850.

zusammenzieht, oder niedriger als an der Oberfläche, wenn sich die Flüssigkeit beim Gefrieren ausdehnt.

(x) In welchem Zusammenhange die Temperatur der Erstarrung für jeden Druck mit der entsprechenden Temperatur des convectiven Gleichgewichts steht, ist unmöglich zu sagen ohne Kenntniss — und diese besitzen wir noch nicht — der durch die Wärme bewirkten Ausdehnung, sowie der specifischen Wärme der Flüssigkeit, ferner der beim Uebergang aus dem flüssigen in den festen Zustand eintretenden Aenderung des Volumens und der frei werdenden latenten Wärme.

(y) **Erörterung der Frage, ob die Erstarrung an der Oberfläche oder im Centrum oder auf dem Boden begonnen hat.** — Wenn wir z. B. voraussetzen, wie es höchst wahrscheinlich richtig ist, dass sich die Flüssigkeit sowohl bei ihrer Abkühlung bis zum Gefrierpunkt, als auch beim Gefrieren selbst zusammenzieht, so können wir ohne bestimmte numerische Daten in Betreff jener Elemente nicht angeben, ob die durch Anwendung eines gegebenen Drucks erzeugte Erhöhung der Temperatur der Erstarrung oder der wirklichen Temperatur eines Theils der Flüssigkeit, die sich gerade noch über ihrem Gefrierpunkt befand, die grössere ist. Wenn die erstere grösser ist als die letztere, so würde die Erstarrung am Boden oder im Centrum beginnen, falls kein fester Kern da ist, an dem sie ihren Anfang nehmen könnte, und würde von da nach aussen zu vorschreiten; in diesem Falle könnte keine vollständige dauernde Ueberkrustung der ganzen Oberfläche erfolgen, bis die ganze Kugel fest geworden ist, ausgenommen möglicher Weise unregelmässige, verhältnissmässig kleine Räume voll Flüssigkeit.

(z) Wenn dagegen die durch Anwendung eines Drucks auf einen gegebenen Theil der Flüssigkeit erzeugte Erhöhung der Temperatur grösser ist als die durch den gleichen Druck erzeugte Erhöhung der Temperatur des Gefrierpunktes, so wird die Oberflächenschicht der Flüssigkeit zuerst den Gefrierpunkt erreichen und auch wirklich zuerst gefrieren.

(aa) Wenn aber nach der zweiten Voraussetzung des § v die Flüssigkeit sich in der Nähe ihres Gefrierpunktes bei ihrer Abkühlung ausdehnte, so würde der feste Körper wahrscheinlich ebenfalls von kleinerem specifischen Gewicht sein als die Flüssigkeit in ihrem Gefrierpunkt. Folglich würde sich die Oberfläche dauernd mit einer festen Kruste überziehen, und diese Kruste würde fortwährend nach innen zu wachsen, da durch die Kruste Wärme nach aussen geleitet, folglich immer mehr Flüssigkeit im Innern gefrieren würde. Auf

diese Weise würde der Zustand erzeugt, der von den meisten Geologen vorausgesetzt wird.

(bb) **Wichtigkeit einer experimentellen Bestimmung der bei der Erstarrung geschmolzener Felsmassen eintretenden Volumenänderung.** — Bischof's Experimente, deren Zuverlässigkeit, so viel mir bekannt ist, niemals angezweifelt wurde, zeigen aber, dass geschmolzener Granit, Schiefer und Trachyt sich sämmtlich beim Gefrieren um etwa 20 Proc. zusammenziehen. Es sollten in der That über diesen so wichtigen Gegenstand mehr Experimente angestellt werden, sowohl um die von Bischof für Steinmassen erhaltenen Resultate zu bewahrheiten, als auch um zu bestimmen, wie sich in dieser Beziehung Eisen und andere nicht oxydirte Metalle verhalten. Inzwischen müssen wir es als wahrscheinlich ansehen, dass die geschmolzene Masse der Erde beim Festwerden in der That eine beträchtliche Contraction erlitten hat.

(cc) **Bischof's Experimente, welche eine Contraction beweisen, machen es wahrscheinlich, dass die Erdoberfläche sich nicht abkühlen konnte, so lange nicht das Innere im Ganzen erstarrt war.** — Wenn daher nach irgend welchen Relationen zwischen den verwickelten physikalischen Umständen, die hier in Betracht kommen, die Erstarrung wirklich an der Oberfläche begann, entweder überall oder in irgend einem Theil derselben, so musste, so lange nicht die ganze Kugel erstarrt war, die fest gewordene Oberflächenschicht zerbrochen und auf den Boden oder zum Centrum hin gesunken sein, bevor sie eine hinreichende Dicke erlangt haben konnte, um auf einer unter ihr liegenden specifisch leichteren Flüssigkeit stabil zu bleiben. Es ist in der That ganz klar, dass, wenn die Erde zu irgend einer Zeit aus einer festen Granitschicht von etwa 50 oder 100 Fuss Dicke und einer davon umschlossenen continuirlichen geschmolzenen Masse bestanden hätte, die in ihren oberen Theilen, wo der Druck klein ist, ein um 20 Proc. kleineres specifisches Gewicht als die feste Rinde besessen hätte, dieser Zustand nur wenige Minuten gedauert haben könnte. Die Starrheit einer festen Schale, deren Fläche so ungeheuer gross im Vergleich zur Dicke ist, musste gleich Null sein, und bei der geringsten Störung würde ein Theil sich biegen, bersten und die Flüssigkeit über die ganze Rinde auslaufen lassen. In Folge davon würde die Rinde selbst in Stücke zerbrechen, und diese müssten zu Boden sinken oder sämmtlich nach dem Mittelpunkt hin fallen und

dort einen Kern bilden, falls ein solcher nicht schon vorhanden ist, so dass bei ihm die Erstarrung beginnen könnte.

(dd) Es ist jedoch kaum möglich, dass sich eine solche continuirliche Kruste jemals zu einer Zeit auf der ganzen geschmolzenen Oberfläche gebildet haben und hinterher eingesunken sein kann. Die in § y angegebene Art der Erstarrung scheint im Ganzen am meisten in Uebereinstimmung mit dem zu sein, was wir über die physikalischen Eigenschaften der Masse wissen, um die es sich handelt. So weit das Resultat in Betracht kommt, fällt sie, glaube ich, mit der Ansicht zusammen, welche Hopkins*) als die wahrscheinlichste adoptirt hat. Mag es nun daher kommen, dass der Zustand für die ganze Erdsubstanz oder für einige Theile derselben mehr der in § z beschriebene war, was wohl als möglich erscheint, oder mag die Ursache in der Zähigkeit (wie sie Mörtel besitzt) liegen, welche in einer geschmolzenen Flüssigkeit sich zeigen muss, deren Bestandtheile während der Abkühlung dadurch, dass sie vor Vollendung der Erstarrung bei verschiedenen Temperaturen krystallisiren, getrennt werden, und welche wir thatsächlich an der aus den heutigen Vulcanen ausströmenden Lava bemerken: es ist wahrscheinlich, dass, wenn die ganze Kugel oder eine sehr dicke Oberflächenschicht derselben, die noch flüssig oder auch schon zähe sein konnte, bis in die Nähe der Temperatur der vollständigen Erstarrung abgekühlt war, eine Bekrustung an der Oberfläche beginnen musste.

(ee) Es ist wahrscheinlich, dass sich so über ausgedehnten Theilen der Oberfläche eine Kruste bilden kann, und dass dieselbe zeitweilig [sei es nun wegen der in ihr enthaltenen blasenartigen Hohlräume, die noch eine Folge des Aufwallens der Flüssigkeit an einigen Orten sind, oder auf alle Fälle wegen der Zähigkeit der Flüssigkeit] oben auf der Flüssigkeit liegen bleibt, bis sie eine hinreichend grosse Dicke erlangt hat, um der Schwerkraft zu gestatten, ihren Anspruch geltend zu machen und die schwerere starre Masse unter die leichtere Flüssigkeit zu senken. Dieser Process muss so lange seinen Fortgang nehmen, bis die gesunkenen Krustentheile vom Boden aus ein hinlänglich eng geripptes Skelett aufbauen, so dass eine neu entstandene Kruste, indem sie gewissermaassen die kleiner gewordenen Flächen der Lavateiche oder Seen überbrückt, bestehen bleiben kann.

---

*) Siehe dessen Report on „Earthquakes and Volcanic Action". British Association Report for 1847.



(ff) **Wahrscheinliche Ursachen der Vulcane und der Erdbeben.** — Hat sich so ein Theil der Flüssigkeit in einen von Hohlräumen durchzogenen festen Körper verwandelt, so muss die flüssig gebliebene Masse ihres kleineren specifischen Gewichts wegen fortwährend bestrebt sein, sich an die Oberfläche hindurchzuarbeiten. Es kann dies dadurch geschehen, dass Massen des festen Körpers von den Decken der Hohlräume oder Tunnel herabfallen, wodurch Erdbebenstösse verursacht werden, oder dass die Decke, wenn sie recht dünn ist, ganz durchbricht, wodurch entweder zwei solcher Hohlräume sich vereinigen, oder der Flüssigkeit eines derselben gestattet wird, frei über die äussere Fläche der Erde hinzufliessen; endlich gelangt die flüssig gebliebene Masse noch durch das allmälige Sinken der festen Masse nach oben, welches daher rührt, dass nach den neuerdings von Professor James Thomson veröffentlichten Ansichten *) Theile derselben unter dem grossen Zwange, dem sie ausgesetzt sind, wieder schmelzen müssen. Die Resultate, welche sich aus diesem Streben der flüssigen Masse ergeben müssen, scheinen hinlänglich gross und mannigfaltig zu sein, um alle Erscheinungen der Erdbeben, der Hebungen und Senkungen fester Massen und der Eruptionen geschmolzener Felsmassen zu erklären, sowohl diejenigen, die wir auf der Erde jetzt vor sich gehen sehen, als auch alle diejenigen, welche die Geologie uns kennen lehrt.

(gg) Diese Schlüsse, die wir bloss aus einer Betrachtung der Aufeinanderfolge von Abkühlung und Erstarrung gezogen haben, wie sie nach dem von Bischof für die specifischen Gewichte fester und geschmolzener Steinmassen erhaltenen Resultate nothwendig erfolgen, stehen hinsichtlich des jetzigen Zustandes des Erdinnern in vollständiger Uebereinstimmung mit §§ 832 . . . 849; danach ist die Erde nicht, wie gewöhnlich vorausgesetzt wird, ganz flüssig bis auf eine dünne feste Schale von 30 bis 100 Meilen Dicke, sondern sie ist im Ganzen sicherlich von grösserer Starrheit, als eine continuirliche Glaskugel von demselben Durchmesser, und wahrscheinlich auch starrer, als eine ebenso grosse Stahlkugel.

---

*) *Proceedings of the Royal Society of London*, 1861. „On Crystallization and Liquefaction as influenced by Stresses tending to Change of Form in Crystals".

